

# 波 浪 予 知 論

(風波の発達に関する諸研究について)

## は し が き

ここで考える波浪は、風の吹送によって生ずる風波と、それによるうねりに限るものとする。波浪の予知の問題は海洋学的にも工学的にも重要な、また興味ある問題であるが、波の発生や伝播に関する物理的機構は複雑であり、さらにその実際的な応用には不明確な要素が多いため、物理的及び工学的な研究が数多くなされているにかかわらず、未だ決定的な方法には到達していない。

現在は波浪予知のための風波の発生機構に関する物理的な研究が盛んに進められている一方、実際問題からの要請に応ずる工学的な方法も並行して進んでおり、両者の基本的な考え方と方法とは必ずしも一致していない。またそれぞれの分野の中で行なわれている研究の結果も実際に応用した場合必ずしも常に一致した結論を与えるとは限らない。したがってこれらの方法を実際問題に適用した場合には、各々の方法の限界や適用範囲を十分理解した上で、実際の目的に適した方法を選ぶか、多少の修正を加えて用いる必要がある。

海の波の著るしい特徴はその不規則性にあり、海面の不規則波形又は波形分布の取り扱い確率論的な考え方を導入したエネルギースペクトルの適用によって処理されつつある。波浪予知の問題においては、波の不規則性は最も基本的な問題である。

本文は工学的な立場からわれわれの波浪予知の目的を述べ、風波の発達機構に対する従来の研究の概要を述べて参考に供したいと思う。

## 1. 波浪予知の目的

波浪予知は、海洋及び海岸に関する問題にはほとんど常に必要とされるであろうが、特にわが国において最も重要な問題は次の2つに大別されよう。

- (i) 船舶の安全航行のための海洋の波の予報
- (ii) 海岸保全事業および港湾建設計画のための波の性質の解明

(この外沿岸漁場の開発や沿岸海中構造物の建設の問題もあるが、多かれ少かれこれらの問題に対する方法は、(i) 及び (ii) の中に含まれてくると考えられる)。

前者の問題は対象として多く海洋の波を考え(場合によっては湾内の波も入る)、またその予知は全く予報(Forecasting)でなければならないことが多い。後者の問題は、対象が沿岸の波に限られ、また予報というよりも、追算(Hindcasting)が主な問題となることが多い。両者を切り離して考えることはもとよりできないが、これらの目的の相違は適用すべき予知の方法とその結果の解析の方法にかなりの相違を生ずるものと考えられる。

ここでは目的を後者に限って考えることとしよう。この場合さらに具体的にその内容を考えると次のようになる。

- (i) 海岸及び港湾構造物の設計のための計画波の決定。
- (ii) 港湾計画のために必要な波の性質の解明。
- (iii) 海岸保全及び港湾計画のための漂砂の推定のための波の性質の解明。
- (iv) 海岸及び港湾工事施工のための波の性質の解明。

(i) は構造物の断面設計に必要な設計波を決定することであり、構造物の所要強度を決定すべき支配的な波の性質を知ることが必要であり、通常構造物設置位置の特定条件における（例えば異常気象時や台風時）最大の波の波高、周期及びその方向を知れば十分とされる。

(ii) は構造物の配置計画（例えば防波堤等の法線決定）あるいは港湾への船舶の出入方向を決定すべき長期にわたる波の性質（波高と周期及び方向）を知ることが必要である。

(iii) は口木の沿岸の漂砂方向及び量は主として沿岸の波によって支配されることから、長期継続した波の性質が必要である。

(iv) は工事を施工する場合の作業計画を決めるために必要で、やはり上のような継続した波の性質が必要である。

このような目的から見れば、波の性質は必ずしも Forecasting を必要とせず、むしろ正確な過去の気象条件を用いて数多くの Hindcasting を行なうことが必要であることが分る。

また沿岸においては、海洋と異なり海底地形と陸上地形による波に対する局地的な条件の相違は著しく、海洋において正確な波が予知されたとしても、海岸においてはさらにその局地性が加味されて、常に正しい値が求められるとは限らない。特にわが国においては日本海沿岸の一部を除いては、半島の突出や湾入のために平面的な地形の影響が著しい海岸がほとんどであり、また海湾内では波に対してもまた風に対しても地形的な効果は大きい。

このような点から考えるとわが国の海岸の波の予知には (i) 長期にわたる Hindcasting を必要とし、(ii) 局地的条件が著しいために必ずしも海洋の波の予知方法は常に適用されるとは限らないことに注意する必要がある。このため沿岸においては、できるだけ多くの観測点を設けて、Hindcast された値を実測値によって補正することが必要であり、海洋と異なってそれは比較的容易になされる。

海岸の波を推算する具体的方法は、すでに水理公式集（昭和38年8月版）、同解説（昭和39年3月土木学会関西支部）あるいはその他の資料に述べられているので、本文においては、それらの具体的方法についてはふれず、波浪予知のためになされてきた研究の概略を述べるにとどめたい。

## 2. 概 要

海面を吹送する風による波の発生とその推定に関する研究は、初め Kelvin-Helmholtz(1871) の密度の異なる2層流体の potential flow の境界面における不安定問題として理論的な考察がなされたが、実際の波の発生限界の不一致から、Jeffreys (1925・1926) が初めて波の crest による風の sheltering の効果を考えに入れた Sheltering Hypothesis を提唱し、波の初期発生の機構に一段と合理的な説明を与えることに成功し、波の存在による風速分布の乱れが、再び波に対して react するという考え方にある示唆を与えた。その方法はやはり空気と水との境界面における不安定問題として取り扱ったものである。しかし実際の海で風によって十分発達した波についてまでこの方法を拡張することは、微小振幅波として取り扱った以上不可能のことである。そこで Sverdrup および Munk(1947)はさらに十分発達した波について実測と適合する説明を与えるべく、sheltering の効果の外に、Jeffreys が否定した、風による skin friction または tangential stress の効果を導入して、energy balance の方法で、波の発達を過渡状態および定常状態に分けて、風速と風の duration 及び風速と fetch による波の推定の実用的方法を提案した。この方法では、風の tangential stress の効果を強調しすぎた観があり、また energy balance によってのみ波の成長を説明するものとして、その物理的な機構に深く立入っていないことに不満があるとされるが、微小振幅波という制約を受けずに問題を解決し、かつ實際上極めて有効な波の予知法を提供したものとして、大きな価値があると考えられる。これに続いて Darbyshire(1952)、Neumann (1952) 及び Pierson (1955) が相次いで、実測を基とした波の実用的な予知法を提供し、実際面での波の予知は極めて有効に行なわれるようになってきた。しかし Sverdrup-Munk, Darbyshire, Neumann などの一連の研究は、風と波の実測値に対する説明として実用的かつ便宜的な方法を提供したに止まり、風による波の発生機構についての明確な説明を与える所まで立ち入っていない。

Eckart (1953) は波の発生に対して gust (風の息) が支配的な効果をもつと仮定し、Cauchy-Poisson の

波の問題と類似の方法で gust による波の発生と分布を理論的に解明し、storm は gust の random な集合から成るものとして、storm による波の分布を計算した。この方法ではやはり波は無限小振幅波としての範囲に止まり、また水面に作用する圧力分布は全く水面波形による影響は受けないものとしている点でかなり実際の状態と異なり、極く初期発生時の波の取り扱いに限定されるように見える。この結果は実際に観測される波に近い計算波高を与えるためには、圧力分布が実際よりも 10 倍程度大きくなければならないことになり、合理的な波の発生機構を教えるには致らなかった。

Phillips (1957) は、Eckart の仮定したような特殊の gust を考えず、完全に乱れた状態の風で、多くの wave number と対応する移動速度をもつ圧力分布を考え、これによって生ずる波のスペクトル密度を計算する方法を取り、波の発生と発達段階を 2 つに分け initial stage においては、圧力分布の移動速度が、同じ wave number をもつ波の進行速度と近似するとき、resonance の状態でその wave number の波が発生することを見出し、また第 2 の主要な波の発達段階 (principal stage) でも同じような resonance の状態で波が成長を続け、スペクトル密度は時間  $t$  に比例して増加するという結論を得た。この方法では勿論波は微小振幅波として取り扱われ、Eckart と同様に波の存在は圧力分布とは全く無関係であるとしている。このような共鳴現象による波の発生機構を Resonance Theory と呼んでいる。しかし結局この方法においても、計算された波高が実測に近い値を示すためには、Eckart と同様に圧力強度は  $10^2$  倍以上大きくなければならないことになり、やはり正しい発生機構とはいえないとされる。

Miles (1957) は Jeffreys の示唆した波の風に対する reaction を考え、Phillips の強調した風の turbulent motion を無視し、turbulence は単に風速のある鉛直分布の維持に関連するものとし、対数型の鉛直分布をもつ風の吹送とそれによる波との間の interaction によって、風から波にエネルギー輸送が行なわれるとする、Interaction Theory によって波の発生と成長に対する説明を与えた。もちろんこの場合もやはり波は無限小振幅波であるから、その限度内での成長を示すことになるが、実測値との一致は極めて良好である。その initial stage における波のエネルギー密度の増加は、Phillips の principal stage におけるごとく時間  $t$  に比例し、その後の principal stage においてはエネルギー密度は時間の指数関数として増加していくことになる。この理論はさらに Lighthill (1962) によって具体的な物理解釈が与えられ、長く疑問とされた波の発生機構の解釈は本質的な点で終止符が打たれたことになる。もちろんこの理論のみで波の成長の段階がすべて説明されるのではなく、実際に観測される風速を凌駕するような著るしく発達した波の存在、あるいはうねりに含まれる極めて長周期の波の存在は、この理論の限界である無限小振幅波の域を出たものと考えられ、波に含まれる種々の wave number の間での non-linear interaction の効果や碎けによる波のエネルギーの移動などがこれを説明する方法として盛んに論議されるようになっていく。

このように理論的な説明は輝かしい成果を収めているが、実用への段階には未だ多くの問題が残されており、例えば海面上での種々の波の存在による風速の鉛直分布の型式を決定すべき海面粗度の推定や空気と水との温度差による鉛直分布の変化、海岸と海面の境界における同様の变化など、Interaction Theory そのものによる波の推定にも解明すべき問題が多い。一方実用的な面から開発されて来た波の予知法は、それ自体として直接理論的な解明に寄与する所は多くなかったかも知れないが、その内に含まれた多くの考察と解釈とは本質的な解明に間接的に大きな寄与を果しており、さらに実用上の面から見るときは、理論的な方法の cover することのできない問題を包蔵したまま、実際に極めて有効な方法を提供しており、工学的に見た場合はやはりこれらの実用的方法は不可欠の価値をもっている。

ここでは先づ波浪の発生機構に対する原理的な説明を与えて来た理論をかんたんに紹介して参考とし、さらに現在実用されている 2, 3 の方法について説明を試みたいと思う。著者はもとよりこの種々の理論的取り扱いに未熟であるため、理解に不十分な点も多く、説明に誤りなしとはしない。読者の御寛容を願い、詳細については原論文について御研究あられんことを願う。

## 第一章 波の発生機構

波の発生機構やその推定については、原理的な研究と実際的な研究があることはすでに述べたが、本章ではそ

の原理的な研究の進みを追うことにし、実際的な研究については第2章で説明することにしよう。原理的な研究は Kelvin-Helmholtz に始まるといわれるが、その方法は Jeffreys の研究の前段に述べられるのと大きな差はないので、Jeffreys の理論から始めて Eckart, Phillips 及び Miles の順に追って行きたい。

波の発生についての原理的な研究の成功は、Jeffreys の sheltering theory に始まって、その考えを拡張した Miles の Interaction Theory に終るとも云えるので、先づ sheltering の概念について述べた後で、Jeffreys の研究に入ることにしよう。

## 1. Sheltering

Jeffreys (1925, 1926) は海面を吹送する風は完全な potential flow ではないと考えた。potential flow においては、流速の最大と圧力の最小とは波の山において起り、また流速の最小と圧力の最大は波の谷で起る。したがって海面において波を発生する作用は存在する(すなわち境界面における不安定を生ずることは可能である)が、おのおのの波の山の両側での圧力分布は対称であって、空気から海面へのエネルギーの輸送は行なわれない。Jeffreys は波の山に沿う空気の流れは風下側の背面において、波面から剝離するために波の山に沿う圧力分布は対称ではなく、風上側の斜面において大きく、風下側の斜面は遮蔽されて圧力は小さくなると考えた。そして風上側に作用する垂直圧力は、あたかもその斜面が流れの中に、ある傾きをもっておかれた平板に対する流れの圧力と同様であって、流速の平方とその傾きの角度に比例すると仮定した。すなわち波面を、

$$\eta = a \sin k(x - ct) \quad (1.1)$$

とすると、波面の傾斜は  $(\partial\eta/\partial x)$  で表わされ、

$$(\partial\eta/\partial x) = ak \cos k(x - ct) \quad (1.2)$$

作用する圧力は、

$$p = \beta \rho_a (U - c)^2 (\partial\eta/\partial x) \quad (1.3)$$

で表わされる。ここで  $\beta$  は無次元定数、 $\rho_a$  は空気の密度、 $U$  は風速、 $c$  は波速である。

この圧力  $p$  は水面に対して垂直に作用する圧力であり、その水平方向の成分は  $p \cdot \partial\eta/\partial x$  で表わされる。そこでこの波面が速度  $c$  をもって進行するならば、単位時間にその波に対してなされる仕事は、

$$E = \frac{1}{T} \int_0^T p (\partial\eta/\partial x) \cdot c \cdot dt = \frac{ack}{T} \int_0^T p \cos k(x - ct) dt \quad (1.4)$$

で表わされる。

圧力  $p$  は波の山に対して非対称な分布をしており、これを波形の harmonics であらわすと、

$$p = \sum_1^n A_n \sin nk(x - ct) + \sum_1^n B_n \cos nk(x - ct) \quad (1.5)$$

のようになると考えられる。(1.5) 式を (1.4) 式に代入すると、積分の各項は、

$$\int_0^T \sin k(x - ct) \cos k(x - ct) dt, \quad \int_0^T \cos^2 k(x - ct) dt$$

$$\text{および} \quad \int_0^T \sin^2 k(x - ct) \cos k(x - ct) dt, \quad \int_0^T \cos nk(x - ct) \cos k(x - ct) dt$$

となる。これらの中  $n=1$  以外の高次の項の積分値は 0 となり、また第一番目の項も同様であり、結局第2の項だけが残る、これによって風は波に対して仕事をする事となる。(1.5) 式における  $n=1$  の基本項のみを残すと、

$$p = A \sin k(x - ct) + B \cos k(x - ct) = C \sin k(x - ct + \epsilon) \quad (1.6)$$

である。potential flow においては  $\epsilon=0$  であって、エネルギー輸送は起らない。しかし上述のような空気の粘性のために potential flow と異なって  $\epsilon$  はある値をもち、それによる第2項すなわち波形と  $90^\circ$  位相の外れた圧力がエネルギー輸送に寄与することとなる。(1.6) 式を (1.4) 式に代入すると、海面の単位面積について単位時間に風から波に輸送されるエネルギーは、

$$E = B \cdot a \cdot c \cdot k / 2 \quad (1.7)$$

として表わされる。

$B$  は (1.5) および (1.6) 式から分るように空気の圧力成分の中で、波形と位相を異にするが等しい周波数をもつ成分であり、これを空気と波の相対的な速度  $(U-c)$  の平方に比例するとすればそれは、

$$B = 4C_p \left( \frac{\rho_a}{2} \right) (U-c)^2$$

の形で表わされる。ここで  $4C_p$  は無次元の係数であって、波形によって変わるものである。 $4C_p$  は特に位相の異なった成分と区別するものとしてこの記号を用いている。しかし実際にはこのように進行する海面全体について考えると、結局このような圧力は水面に対する風の摩擦抵抗であり、それを一般の流体力学の表示に従って摩擦係数  $C_a$  を定義し、

$$C_a (\rho_a / 2) (U-c)^2 \quad (1.8)$$

として表わすと、風かに波に対して供給されるエネルギーは単位時間について、

$$E = C_a \cdot \frac{\rho_a}{2} (U-c)^2 \cdot c \quad (1.9)$$

として表わされることになる。

このような圧力は空気のような粘性の小さい流体においては、その水面での流れが potential flow と少しく異なってくることによるものであるが、粘性の影響による水面でのせん断力 (skin friction) の波に対する効果が問題となる。Jeffreys は skin friction を  $S' \rho_a U^2$  として、この friction によって風は影響をうけないという仮定を用いて、水も風も共に irrotational としてこれによる波の発生の限界風速を計算して、これが実測よりもはるかに大きいとして skin friction の効果は無視されたと考えた。この効果は後に示すような Sverdrup および Munk の理論において強調されて用いられたけれども、最近の研究においては、風から波へのエネルギー供給の機構においては省略されるべきものとされている。すなわち空気や水における粘性の小さい流体の場合には、流れは potential flow として一般的に良く説明されるもので、粘性によるエネルギーの消失は少なく、それが直接本質的な結果を大きく変えることはないと考えられている。確かに水面においては境界層の発達に伴って流速こう配が非常に大きく、したがって流速の鉛直分布に影響することが大きく、間接的にそれが圧力分布を変えることになるが、直接的には skin friction は境界面での渦の発生による分子粘性による運動のエネルギーの消失となり、水面における波の potential motion に寄与することはできないと考えられる。したがって波の発生の問題においては skin friction による切線応力の効果は無視されるべきであり、圧力変動の効果だけが考慮されるべきことになる。

このように波の potential motion に対して寄与する圧力によるエネルギー供給と単に渦を発生して熱エネルギーとして消費されるせん断力によるエネルギーとは明白に区別して考えることが必要である。第2章で述べるように Sverdrup および Munk がその理論においてせん断力による波へのエネルギー輸送を考えたのは、風速よりも大きい進行速度をもつ波の存在または発達を説明するためであったようで、実際 skin friction は風速と波速に関係するのではなく、風速とそれよりも十分小さい実際の水粒子運動の間の相対速度に関係するものであるから、 $c > U$  の状態でもエネルギー供給は可能と考えることはできる。しかし実際にはこのような波速したがって波長の大きい波に対するエネルギーの供給は、その上に重合する波長の短い steep な波に対する圧力によるエネルギー供給を通して波長の長い波に伝えられるものと考えることができる。したがって此処で、同時に存在する異なった波長の波の間でのエネルギー交換 (non-linear interaction) が重要となってくるのである。

## 2. Jeffreys (1925,1926) の理論

Jeffreys は、有限の速度差をもって流れる密度の異なる2つの流体の境界面の不安定問題として取り扱った Kelvin-Helmholtz の波の発生理論が、実測による波の初期発生の限界風速あるいは波長などと一致しないことから、他の効果すなわち波の前面と後面での圧力差 (sheltering effect) を考慮して、別の型の波の発生理論を導いた。Jeffreys は問題を3次元の波に拡張し、波の峯の長さも考えた取り扱いをしたが、これは本質的なものではない。

先づ2つの流体、水および空気は非圧縮性の完全流体で共に irrotational motion を行ない 水深は無限大

であるとする。流速の分布は一様であり、undisturbed state からの境界面の displacement は微小振幅であるとし、その境界内での運動を考えるものとする。

原点を静水面に、軸を鉛直上方にとり、上の流体は密度  $\rho'$ 、速度  $U'$ 、下の流体は密度  $\rho$ 、速度  $U$  をもって  $x$  軸に平行に流れるものとする。速度ポテンシャルをそれぞれ  $\phi'$ 、および  $\phi$ 、surface elevation を  $\zeta$  とし、 $\partial/\partial t$ ,  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$ ,  $\partial/\partial z$  なる operator をそれぞれ  $a$ ,  $p$ ,  $q$ , および  $\theta$ 、また  $\gamma^2 = -(p^2 + q^2)$  とすると、連続の式は

$$p^2\phi = \partial^2\phi/\partial x^2 + \partial^2\phi/\partial y^2 + \partial^2\phi/\partial z^2 = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{したがって } \phi = U \cdot x + e^{i\gamma z} A(x, y, t) \quad (2.2)$$

とおくことができる。境界面での運動学的条件は

$$d\zeta/dt = \partial\zeta/\partial t + U\partial\zeta/\partial x = (\partial\phi/\partial z)_{z=0} \quad (2.3)$$

となり、これは次の形で書かれる。

$$(\sigma + Up)\zeta = \gamma A \quad (2.3)'$$

したがって  $\phi$  および  $\phi'$  は次のようになる。

$$\phi = U \cdot x + \frac{\sigma + Up}{\gamma} \cdot e^{i\gamma z} \cdot \zeta \quad (2.4)$$

$$\phi' = U' \cdot x - \frac{\sigma + U'p}{\gamma} \cdot e^{i\gamma z} \cdot \zeta \quad (2.5)$$

流体内部の圧力  $P$  は  $Q$  を水粒子速度の合成速度とすると次の式で表わされる。

$$\frac{P}{\rho} = -\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{2} Q^2 - gz = -\sigma\phi - Ue^{i\gamma z} pA - gz + \text{const.} \quad (2.6)$$

したがって  $z=\zeta$  においては下の流体については

$$\frac{P}{\rho} = -\left\{ (\sigma + Up)^2 + g \right\} \zeta + \text{const.} \quad (2.7)$$

上の流体については

$$\frac{P'}{\rho'} = \left\{ (a + U'p)^2 - g \right\} \zeta + \text{const.} \quad (2.8)$$

表面張力を  $T$  とすると  $P'$  と  $P$  の差は表面張力による圧力  $T(\partial^2\zeta/\partial x^2 + \partial^2\zeta/\partial y^2)$  であり、

$$P' - P = T \cdot (p^2 + q^2) \cdot \zeta \quad (2.9)$$

(2.7), (2.8) 式を (2.9) 式に代入して、 $\zeta$  についての微分方程式として 次式を得る。

$$\{\rho(\sigma + Up)^2 + \rho'(\sigma + U'p)^2 + g(\rho - \rho')\gamma + T \cdot \gamma^3\} \zeta = 0 \quad (2.10)$$

ここで  $\zeta \propto \cos(\gamma t - kx) \cos k'y$  において、( $k$  は  $x$  方向の wave number  $2\pi/L$ ,  $k'$  は  $y$  方向の wave number で、この式は  $x$  方向に進行する short-crested wave の 1 つのモデルを表わす)、(2.10) 式に代入すると次の関係式を得る。

$$\gamma = k \cdot \frac{\rho U + \rho' U'}{\rho + \rho'} \pm \left\{ \frac{g(\rho - \rho')\gamma + T\gamma^3}{\rho + \rho'} - k^2 \frac{\rho \rho' (U' - U)}{(\rho + \rho')^2} \right\}^{1/2} \quad (2.11)$$

$\zeta$  が上記の形をもつときは operator  $\gamma$  はつぎのようになる。

$$\gamma^2 = k^2 + k'^2 \quad (2.12)$$

2次元の波を考えると  $k'=0$ ,  $\gamma=k$  となり、(2.11) 式は、Kelvin の解と同じになる。(この場合は (2.8) 式から

$$p' \propto (\gamma^2/k - 2U'\gamma + U'^2k + g) \cos(\gamma t - kx)$$

となり、 $p'$  と  $\zeta$  とは in phase であり、このような圧力条件の下での不安定問題を取り扱うことになる。)

(2.11) 式の右辺第2項には平方根の形が入っており、これが実数の場合は与えられた disturbance  $\zeta$  は成長も減衰もしない。これが虚数となると  $\zeta$  の振幅は指数関数的に増大することとなる。したがって波の発生条件として2次式が得られる。

$$k^2 (U' - U)^2 \geq \frac{\rho + \rho'}{\rho \rho'} \{g(\rho - \rho')\gamma + T\gamma^3\} \quad (2.13)$$

$$\geq \frac{\rho + \rho'}{\rho \rho'} \{g(\rho - \rho')k + Tk^3\} \quad (2.14)$$

$$\geq \frac{2(\rho + \rho')}{\rho \rho'} \{T \cdot g(\rho - \rho')\}^{1/2} k_0^2 \quad (2.15)$$

(2.13) 式は丁度風が波を発生させる限界, (2.14)式は2次元の波の場合 ( $\gamma = k, k' = 0$ ), (2.15) 式は  $g(\rho - \rho')/k + T \cdot k$  を最小ならしめる  $k$  の値  $k_0^2 = g(\rho - \rho')/T$  を代入したときの値を示す。水と空気の場合は  $\rho = 1 \text{ gr/cm}^3$ ,  $\rho' = 0.0013 \text{ gr/cm}^3$ ,  $T = 73 \text{ dyn/cm}$  として  $k_0 = 3.5 \text{ cm}^{-1}$ , したがって critical wave length  $L_0 = 2\pi/k_0 = 1.8 \text{ cm}$  となり, (2.15) 式から波を発生させる最小風速は  $U' - U = 640 \text{ cm/sec}$  となる。しかしこれは実際の観測値よりもはるかに大きく, また波長は実際の限界波長よりも余りに小さすぎることになる。

したがって Jeffreys はここで仮定したような完全流体の irrotational motion の考えをすて, 別の考え方から出発する必要があるとした。Jeffreys によると, 波の初期発生においては水の運動における turbulence は重要ではなく, むしろ分子粘性の影響を考える方が実際に近いであろうし, また一方水面に波があるときは, そのために空気の運動は irrotational ではなくなり, その rotational な運動がさらに波の大きさを規定するように作用すると考えられる。その機構について2つを考えた。まづ第一は, 波面上を吹送する空気の流れは水面の波形に完全に追従することができず, 風に対して遮蔽された波面 (波の背面) では空気の流れは波面から剥離して水平軸をもった渦を生じ, このため波の前面での垂直圧力は背面でのそれよりも大きくなることが期待される。その大きさは流れの方向に傾いた平板に対する圧力の大きさと類似から  $\rho' U'^2 \partial \xi / \partial x$  に比例し, かつその面に対して垂直に作用するものと考えた。 $U'$  はここでは波の crest 上の風速であり,  $\rho'$  は空気の密度である。このような力の分布は水面上では  $x$  の harmonic function として表わされるであろうが, 今の場合は波の波長と同じ波長をもったものだけについて考えればよいから, このような力を  $S \rho' U'^2 \partial \xi / \partial x$  とおくことができる。 $S$  は無次元の常数であり, これを sheltering coefficient, この仮説を sheltering hypothesis と呼ぶ。

第二の機構は skin friction であり, これは乱流における摩擦力が  $S' \rho' U'^2$  の形で表わされ,  $S'$  は無次元常数で 0.002 に近い値をとることが一般に知られている。この2つの影響を考慮した取り扱いを Jeffreys は示したが, 第一の sheltering の取り扱いをここで示すことにする。

粘性を考慮した水の運動は, も早最初に仮定した potential motion ではなく, つぎのような運動方程式と連続の式で示される。 $x$  方向については

$$du/dt = -(1/\rho) \partial p / \partial x + \nu \nabla^2 u \quad (2.16)$$

$y, z$  方向についても同様で,  $\nu$  は水の動粘性係数である。連続の式としては

$$\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = 0 \quad (2.17)$$

ここで前と同様に  $x$  方向に一樣な流れ  $U$  を与えて, また同様の微分の operator を用いると (2.16), (2.17) 式はつぎようになる。

$$\{\sigma + Up - \nu(p^2 + q^2 + \theta^2)\}(u, v, w) = -\frac{1}{\rho}(p, q, \theta)P \quad (2.18)$$

$$pu + qv + \theta w = 0 \quad (2.19)$$

これと表面条件

$$z=0 \text{ に対して } d\xi/dt = w \quad (2.20)$$

を用い, また水面  $z=0$  における応力成分を

$$\left. \begin{aligned} p_{zz} &= -P + 2\rho\nu\theta w = \rho Q\xi \\ p_{zx} &= \rho\nu(\theta u + pw) = \rho R\xi \\ p_{zy} &= \rho\nu(qw + \theta v) = \rho Q\xi \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

とおき, それぞれ  $\xi$  の linear operator  $Q, R$  で表わされるとすると,  $\xi$  についてつぎの微分方程式が得られる。

$$Q\xi = 2\nu\lambda\gamma^2 \left( \frac{R}{\sigma + Up} - 2\nu \right) \xi - \left( 1 + \frac{2\nu\gamma^2}{\sigma + Up} \right) \left\{ \gamma R\xi - \frac{a + Up}{\gamma} + 2\nu\gamma^2 (\sigma + Up) \xi \right\} \quad (2.22)$$

ここで  $\nu\gamma^2 \ll (\sigma + Up)\xi$ , すなわち粘性による波の減衰は1周期間では小さいと考えてよいから (この条件は

$2\pi/k^2\nu \gg T$  に相当し  $2\pi/k^2\nu$  は振幅が  $e^{-1}$  だけ減衰する時間に比例する) (2.22) 式は近似的につぎのようになる。

$$\{(\sigma + Up + 2\nu\gamma^2) - Q\gamma + R\gamma^2\}\zeta = 0 \quad (2.23)$$

ここで風による水面のせん断力を無視した場合を考えると、 $R=0$  とおいて良い。水面への垂直応力  $\rho Q\zeta$  を考えると水面  $z=0$  に対しては  $\zeta$  による静水圧  $g(\rho - \rho')\zeta$  が下方に作用し、表面張力による  $T(\partial^2\zeta/\partial x^2 + \partial^2\zeta/\partial y^2)$  が同じように下向きに作用する。さらに前述した sheltering effect による垂直応力として  $Sp'U'^2\partial\zeta/\partial x$  がある。これはいま考えている  $U'$  が負のとき  $x$  の増加する方向に作用するから、 $p_{xx}$  は  $p\zeta$  が正のとき正となり、結局

$$\rho Q\zeta = \{-g(\rho - \rho') - T\gamma^2 + Sp'U'^2p\}\zeta \quad (2.24)$$

となる。このような3つの力の中第1, 第2のものは  $\zeta$  と in phase であり, 第3の力だけが  $\partial\zeta/\partial x$  に比例し out-of-phase となる。結局 sheltering coefficient  $S$  は out-of-phase の程度を示す量である。

(2.23)式に (2.24)式を代入すると  $\zeta$  の微分方程式として次式を得る。

$$\{(\sigma + Up + 2\nu\gamma^2) + C^2\gamma^2 - \frac{Sp'U'^2p}{\rho}\}\zeta = 0 \quad (2.25)$$

$$\text{ここで} \quad \rho C^2 = \frac{g}{\gamma}(\rho - \rho') + T\gamma \quad (2.26)$$

今の場合 波は流れに対して進行しないで振幅のみが変わるときを考え、

$$\zeta \propto e^{i\omega t} \cos kx \cos k'y$$

とおき,  $\gamma, k, k'$  を常数とすると, operator  $\gamma$  は  $\gamma^2 = k^2 + k'^2$  であり, (2.25), (2.26)式から

$$\{(\gamma + 2\nu r^2) + C^2 r^2 - U^2 k^2\}\zeta + \{2U(\gamma + 2\nu r^2) - \frac{Sp'U'^2r}{\rho}\}p\zeta = 0 \quad (2.27)$$

$\zeta$  および  $p\zeta$  は恒等的に0ではないから, (2.27)式からつぎの2つの関係が得られる。

$$\gamma = -2\nu r^2 + \frac{Sp'}{2\rho} \cdot \frac{U'^2\gamma}{U} \quad (2.28)$$

$$k^2 U^2 = C^2 r^2 + (\text{2次以上の項}) \quad (2.29)$$

(2.28) 式から  $U$  が負であるとき ( $U'$  と同じ方向であるとき),  $\gamma$  は常に負であるから波は必ず減衰することになり, 波の発生のためには  $U'$  が負であるときは  $U$  は正でなければならない。これらの  $U$  および  $U'$  は静止していると考えた波の crest に対する速度であるから, 波の発生のためには波速は空気と水の間速度をもたねばならないことになる。また (2.26), (2.29)式から

$$U^2 = \frac{\rho - \rho'}{\rho} \cdot \frac{gr}{k^2} + \frac{T}{\rho} \cdot \frac{r^3}{k^2} \quad (2.30)$$

波が成長するための条件は  $\gamma \geq 0$  であるから, (2.28) 式より

$$U'^2 \geq C \cdot U \cdot \gamma \quad \text{但し} \quad C = \frac{4\nu\rho}{Sp'} \quad (2.31)$$

$k$  の一定値に対して  $\gamma$  は  $k'$  と共に増加するから  $U$  および  $|U'|$  は  $k'$  と共に増加する。水面に対する空気の相対速度は  $U' - U$ , その絶対値は  $U' + U$  である。したがって  $x$  方向に進む波に対しては, この disturbance を生ずるために必要な最小の相対風速は方向の wave number  $k'$  が0のとき, したがって波の crest が無限に長い2次元の場合ということになる。さらに重力波を考え  $T$  を無視し, 水面に対する相対風速を  $V$  とすると (2.31)式で  $U' = V - U$  とおき,

$$\gamma \leq (V - U)^2 / CU \quad (2.32)$$

また  $\gamma \gg k$  であるから, (2.30) 式で  $T=0$  とおくと

$$kU^2 \geq g(\rho - \rho')/\rho \quad (2.33)$$

$$\text{したがって} \quad r \geq g(\rho - \rho')/\rho U^2 \quad (2.34)$$

(2.32), (2.34) 式から

$$U(V - U)^2 \geq C \cdot g(\rho - \rho')/\rho \quad (2.35)$$

与えられた  $V$  に対して左辺を最大ならしめる  $U$  の値で  $0$  と  $V$  の間にあるものは  $U = \frac{1}{3}V$  であり, このとき,



(2.35) 式は

$$V^3 \geq 27C \cdot g(\rho - \rho')/4\rho \quad (2.36)$$

となり波を発生させるための風速条件としては (2.36) 式が満足されれば良い。  $\nu = 0.018 \text{ cm}^2/\text{sec}$  とすると (2.36) 式は

$$V \geq 73S^{-1/3} \text{ cm/sec} \quad (2.37)$$

またこの限界条件では (2.33) 式から

$$k^3 = 5S^2 \quad (2.38)$$

となる。

Jeffreys の観測の結果では波が発生する最小風速は約  $110 \text{ cm/s}$  程度であり (2.37) 式から  $S \doteq 0.3$  となり、また (2.38) 式から  $k \doteq 0.7 \text{ cm}^{-1}$ 、これに対する波長  $L \doteq 8.8 \text{ cm}$  となり、観測値と良く一致すると考えられた。また  $S \doteq 0.3$  の値は測定はできないが肯定できる値であると Jeffreys は考えた。実際には  $S \doteq 0.3$  は過大であり、第5節に示すように一定ではなく、wave number  $k$  と風速により変り  $0.01 \sim 0.1$  程度の値となる。これは Jeffreys が全く風速の鉛直分布を考えていないためのことである。Jeffreys は同様の方法で skin friction の効果を検討したが、その結果 skin friction を過大に見積った場合でも波を発生せしめるための最小風速は実際よりも数倍大きくなるということになり、skin friction は波の発生に寄与することは少ないと判断した。

上述のような sheltering の簡単化された取り扱い、もちろん波の発生を説明するには十分でないが、この考え方が後の Sverdrup および Munk, あるいは Neumann, さらに Miles の理論に重要な基礎を提供した点で重要な意味をもっている。このような深海波の取り扱いに続いて、1926年の論文で Jeffreys は浅海波の場合についても考察しているがここでは省略する。

### 3. Eckart (1953) の理論

Eckart は海面上を吹送する風はある大きさと強さおよび継続時間もち、平均風速  $U$  をもって進行する多数の gust の集合であって、これらのおおのの gust によって水面に垂直に作用する圧力の分布に対応して波が発生し、その重合の結果として海面で観測されるような不規則な波形をもち、種々の方向に進行する波を生ずると考えた。要するに波の発生は水面における圧力分布の移動に伴って生ずるものであるという考えで、波の存在による海面の粗度は gust の圧力分布には何らの影響を与えないと仮定するものである。

1つの gust による水面での圧力分布は半径  $L$  及び持続時間  $T$  をもち、平均風速  $U$  をもって風と同じ方向に移動するものとし、その分布は次式で表わされるものとする。

$$a_0(\mathbf{X}, t) = \text{const} \cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \{ (\mathbf{X} - \mathbf{U} \cdot t)^2 / L^2 + t^2 / T^2 \} \right] \quad (3.1)$$

ここで  $\mathbf{X}$  は位置のベクトル、 $t$  は時間である。これを wave number  $\mathbf{K}$ , frequency  $\omega$  のフーリエ積分と考えると、そのフーリエ変換はつぎのようになる。

$$A(\mathbf{K}, \omega) = [LT^{1/2} / (2\pi)^{3/2} \pi^{3/4}] \exp \left[ -\frac{1}{2} \{ k^2 L^2 + (\omega - \mathbf{K} \cdot \mathbf{U})^2 \cdot T^2 \} \right] \quad (3.2)$$

この場合  $A(\mathbf{K}, \omega)$  は

$$(2\pi)^3 \int |A|^2 d\mathbf{K} d\omega = 1 \quad (3.3)$$

によって normalize されている。したがって  $a_0(\mathbf{X}, t)$  はつぎのフーリエ積分で表わされる。

$$a_0(\mathbf{X}, t) = \frac{LT^{1/2}}{\pi^{3/4} (2\pi)^{3/2}} \int \exp \left[ -\frac{1}{2} k^2 L^2 - (\omega - \mathbf{K} \cdot \mathbf{U})^2 \cdot T^2 \right] \cdot \exp [i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{X} - \omega t)] d\mathbf{K} d\omega \quad (3.4)$$

このような圧力分布の移動によって生ずる水面の運動は irrotational であり、また微小振幅であるとし、 $g\phi_0$  を速度ポテンシャル、 $\rho$  を水の密度、 $g$  を重力の加速度とし、原点を静水面、 $z$  軸を鉛直上方にとると、連続の条件から

$$\nabla^2 \phi_0 = 0 \quad (3.5)$$

また  $z \rightarrow \infty$  のとき  $\nabla \phi_0$  及び  $\phi_0 \rightarrow 0$

$$(3.6)$$

gust の圧力を  $\rho g a_0$  で表わすと水面での圧力条件はつぎのようになる。

$$\partial^2 \phi_0 / \partial t^2 + g \partial \phi_0 / \partial z = \partial a_0 / \partial t \quad (z=0) \quad (3.7)$$

また水面の elevation  $\eta_0(\mathbf{X}, t)$  は次式で表わされる。

$$\eta_0(\mathbf{X}, t) = (\partial \phi_0 / \partial t)_{z=0} - a_0(\mathbf{X}, t) \quad (3.8)$$

このような条件を満足する解  $\phi_0$  が単一の gust による水の運動の速度ポテンシャルを与えることになる。Eckart はこれをつぎのように示した。

$$g\phi_0 = R \iiint \int 2\omega A(\mathbf{K}, \omega) \exp\{-i\sigma(k-\kappa) + i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{X} - \omega t) + kz\} d\mathbf{K} d\omega d\sigma \quad (3.9)$$

$$\text{ここで } \kappa = \omega^2/g \quad (3.10)$$

$\sigma$  は補助変数で、 $\omega$  および  $\sigma$  に関する積分は 0 から  $\infty$  までにかわる。(3.8)式から  $\eta_0$  はつぎようになる。

$$\eta_0 = R \iiint \int (-2ik) A(\mathbf{K}, \omega) \exp\{-i\sigma(k-\kappa) + i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{X} - \omega t)\} d\mathbf{K} d\omega d\sigma \quad (3.11)$$

これに (3.2) 式の  $A(\mathbf{K}, \omega)$  を代入し method of stationary phase により  $\eta_0$  の近似的な形はつぎのように与えられる。

$$\eta_0 = 0 \quad t \ll T \quad (3.12)$$

$$\eta_0 = (2^{1/2} \pi^2 b / L^2 t) \cdot B \cdot \sin(k_0 r - \omega_0 t), \quad t \gg T, \quad r \gg L \quad (3.13)$$

$$\text{ただし } B(\omega_0, \theta) = k_0^2 L^2 \exp\{-(1/2)k_0^2 L^2 - (1/2)(\omega_0 - k_0 U \cos \theta)^2 T^2\} \quad (3.14)$$

ここで  $r = |\mathbf{X}|$  であり、 $\theta$  は  $\mathbf{X}$  と  $\mathbf{U}$  との間の角度すなわち波の進行方向と風向とのなす角度を示す。 $\omega_0$  は

$$r = (g/2\omega_0) \cdot t = \frac{1}{2} c_0 t \quad (3.15)$$

なる群速度の式から決まり、 $c_0$  は wave number  $k_0$  の波の位相速度である。すなわち

$$c_0 = (g/k_0)^{1/2} = g/\omega_0 \quad (3.16)$$

(3.13) 式から分るように  $t \gg T$ , および  $\gamma \gg L$  すなわち原点から十分はなれた場所での波の振幅は時間に逆比例して減衰する。

$B$  は  $\omega_0$  と  $\theta$  との関数であり、(3.16) 式から  $\gamma/t$  及び  $\theta$  の関数となる。そこで  $B$  をつぎの無次元量

$$R = 2r/U \cdot t = g/\omega_0 U = c_0/U \quad \text{および} \quad \mathfrak{L} = gL/U^2, \quad \mathfrak{T} = gT/U \quad (3.17)$$

であらわすと

$$B(R, \theta) = (\mathfrak{L}^2/R^2) \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{T}^2(R - \cos \theta)^2\}/R^4\right] \quad (3.18)$$

となる。この値の  $R$  および  $\theta$  に対する分布を  $\mathfrak{L}=3, \mathfrak{T}=10$  および  $\mathfrak{L}=\frac{1}{3}, \mathfrak{T}=10$  に対して図示すると図-1.

3.1 および図-1.3.2 のようになる。このような分布において  $B$  の極大値を与える  $R$  および  $\theta$  は

$$u = R/\cos \theta, \quad M = \mathfrak{L}^2/\cos^4 \theta, \quad N = \mathfrak{T}^2/8 \cos^2 \theta \quad (3.19)$$

とおいたとき

$$M + 4N(u-1)(u-2) - 2u^4 = 0 \quad (3.20)$$

を満足する  $u$  の値においておこる。この式から結局  $M$  及び  $N$  の種々の値に対して  $u=1$  及び 2 の近傍で (3.20) 式がほぼ常に満足されることになる。このことは例えば  $\theta=0$  のときすなわち風向と同じ方向に進行する波においては  $R=1$ , または 2 すなわち (3.17) 式から  $c_0=U$ , または  $\frac{1}{2}c_0=U$  のとき、したがって、波の位相速度が風速に等しいとき、または波の群速度が風速に等しい時に  $B$  が最も大きく、したがって  $\eta_0$  が最も大きいことを示すものである。

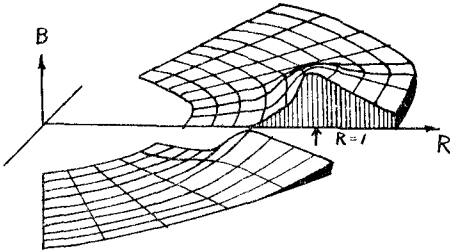


図-1.3.1  $B$  の値の分布  
 $\mathfrak{L}=3 \quad \mathfrak{T}=10$  の場合 (Eckart, 1953)

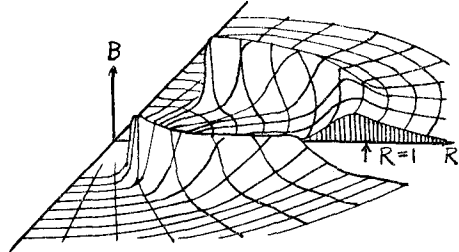


図-1.3.2  $B$  の値の分布  
 $\mathfrak{L}=1/3 \quad \mathfrak{T}=10$  の場合 (Eckart, 1953)

さらに  $\theta$  の方向についての  $B$  の最大値の様子は概略

$$B_m = (\mathfrak{L}^2/R^4) \cdot \exp(-\mathfrak{L}^2/2R^4)$$

で見積られる。(3.20) 式を満足する  $u$  の値の,  $\theta$  の変化による変動は少ないから  $\mathfrak{L}$  が大きいときは  $B_m$  は  $\cos\theta$  の減少と共に急激に減少する(図-1.3.1の場合)。 $\mathfrak{L}$  が小さい時は,  $B_m$  は初め少し増加して  $\cos\theta$  がある限界値以上になると急速に 0 に近づく(図-1.3.2の場合)。このように中心が  $R=\frac{1}{2}$ ,  $\theta=0$  にある直径  $R=1$  の円柱状の ridge の形で  $B$  が分布することになる。

この取り扱い結局 (3.1) 式で与えられるような圧力分布が風と共に移動し減衰する場合に水面に生ずる Cauchy-Poisson の波と同様のものである。

実際の storm はこれらの single gust の random な集合であって storm による海面に生ずる波は single gust による波の重合と考えられる。この場合は簡単のために gust による圧力は (3.1) 式によって与えられた形とすべて同一であると仮定する。storm の強さはその中心における圧力  $P$  と storm の直径  $D$  によって決まるものとし, それを構成するおのおのの gust は storm の中心からの距離によって強さが変わるものと考ええる。その強さは任意の 2 つの gust の組合せで決まり storm の中心に対する gust の位置を  $\mathbf{X}$  および  $\mathbf{X}'$  とするとき, その平均距離  $\frac{1}{2}(\mathbf{X}+\mathbf{X}')=\mathbf{r}$  によって決まるものとし

$$w(\mathbf{r}) = P^2 \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2D^2}\right) \quad (3.21)$$

で表わされるものとする。 $w(\mathbf{r})$  の意味は (3.4) 式で表わされる 2 つの gust の同じ位置  $\mathbf{X}$  及び同時刻  $t$  での自己相関を取ると, その値が  $w(\mathbf{X})$  を示すもので, それは点  $\mathbf{X}$  での mean square wind pressure に相当するものである。

このように仮定すると波に対しても全く同様の強さ  $w(\mathbf{r})$  の効果をそのままあてはめることができ, これらの gust の重合の結果水面に生ずる波のスペクトル分布を計算することができることになる。計算は複雑でここには示さないが, この計算の結果と, 実際の storm による波が 5~10 ケの波の群をなして進行するという事実と比較して, Eckart は gust の duration  $T$  は大体 15~30 sec 位, また実際の風波の発達したものの位相速度が風速と大体近いという事実から考えて, gust の大きさ  $L$  は風速 20m/s の場合, 大体 40m 位になると推定した。また storm area の外側  $\gamma \gg D$  の波の crest の長さは storm の中心からの距離  $r$  に比例し, その直径  $D$  に反比例し,  $r/D=10$  の場合 crest の長さは大体 2.2 波長位になるということを推定した。

$r$  が  $D$  に較べて十分大きい storm area の外では, 卓越する波の進行方向は storm の中心からの半径方向であり,  $\eta$  の root mean square wave height を  $H$  とすると,  $H$  はつぎのように求められている。

$$H^2 = 8\pi \frac{P^2 D^2}{r L} \cdot G^2 / \left(1 + 16 \frac{\cos^2 \theta}{\mathfrak{L}^2}\right)^{1/2} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad G^2 &= \left(\frac{\mathfrak{L}}{\cos^2 \theta}\right)^3 \exp\left[-\left(\frac{\mathfrak{L}}{\cos^2 \theta}\right)^2\right] & \text{for } \cos\theta > 0 \\ &= 0 & \text{for } \cos\theta < 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

上式で  $r=|\mathbf{r}|$  は storm の中心からの距離,  $\theta$  はベクトル  $\mathbf{r}$  と風速  $\mathbf{U}$  とのなす角,  $\mathfrak{L}$  および  $\mathfrak{L}'$  は (3.17) 式で定義された量である。

この式から波は平均風向を中心として  $\pm 90^\circ$  以内に対してのみ発生することになる。 $\mathfrak{L}$  の効果すなわち gust の duration の効果は (3.22) 式の分母の補正項として入る程度で,  $H^2$  は storm の中心からの距離  $r$  に反比例する。このことは平面波の拡散に対するエネルギー保存の法則と一致している。 $H^2$  は予測されるように storm の中心の強さと直径の平方に比例する。関数  $G^2$  は gust の大きさと風向に関係する量であるが,  $\mathfrak{L}/\cos\theta=1.225$  の時最大値  $G_m^2=0.640$  をとり, その他の  $\mathfrak{L}/\cos^2\theta$  に対しては 0 に接近する。 $\mathfrak{L}>1.225$  に対しては最大値  $G_m$  にはならないが,  $\theta=0$  において最大値を取り,  $|\theta|$  が増加すると急速に 0 に近づく。また  $\mathfrak{L}<1.225$  に対しては  $\theta=0$  は一つの極小値で  $G$  はある角度  $\theta_m$  に対して  $G_m$  を取り,  $|\theta|>\theta_m$  に対しては急速に 0 に近づく。このような分布は single gust による波の ridge の分布に似ている。このように  $\mathfrak{L}$  が大きい場合すなわち  $gL/U^2$  が大きいときには, single gust の場合と類似で有効な波を発生しないと考えられ,  $\mathfrak{L}$  が小さいときは

風に対して大きな角度を与えて進行する波を生ずることになり、したがって風の方向と一致した卓越した波を生ずる gust は  $\vartheta=0.3\sim 3$  の程度と推定され、例えば  $\vartheta=1$  の場合  $U=20\text{m/s}$  とすると  $L=40\text{m}$  となり、この程度の gust が最も効果的な波を生ずることになると推定される。

実際に観測される波が果してこのような機構によって生ずるものであるかどうかという疑問を確かめる1つの方法として、Eckart は (3.22) 式を用いて  $P$  の値を推測している。

(3.22) 式で  $G=G_m=0.640$  とおき  $\vartheta$  の項を省略するとつぎのように簡単化される。

$$H \doteq 10P^2 D^2 / rL \quad (3.24)$$

1945年1月17～18日カリフォルニア海岸で実測された平均波高  $2H=2.8\text{m}$ 、周期  $16\text{sec}$  に対して、この時の天気図から  $D=425\text{km}$ 、 $r=3800\text{m}$ 、 $\vartheta=58\text{km}$  ( $L=1$ 、 $U=24\text{m/s}$  として) を用いると、(3.24) 式から  $P \doteq 1.6\text{cm}$  を得る。これは  $U=24\text{m/s}$  による  $\frac{1}{2}\rho aU^2=3.8\text{cm}$  と comparable である。しかし実際にはこのような風速による水面への垂直圧力については疑問があり、観測される程度の波を発生するには (3.24) 式における  $P$  が実際の値の約10倍以上となければならないこととなる。

storm の内側 ( $r < D$ ) では wave component は storm の外側におけるように卓越方向は決まっていないで、種々の方向の波が交又する。その卓越方向は中心から周辺に近づくとともに次第に明瞭になるが、その計算結果は複雑で数値的な結果は与えられない。

このように計算結果が実際の波を予測するためには不十分であることの1つの原因は波の発生が圧力分布の進行による効果だけを考慮して取り扱われていることにあり、風速は単にその圧力分布の移動速度にのみ関係し、直接に波の発生に寄与していないことにあると考えられる。これは微小振幅波の取り扱いにおいてはやむを得ないことで、Eckart はこの理論は波高が大きくなって風と波との interaction が考えられる状態になるときは、当然修正されるべきであるとしている。実際に有限波高のために風から波へ輸送されるエネルギーは波面のこう配  $\partial\eta/\partial x$  の2乗または3乗に比例する傾向にあるから、これらの影響を無視した場合は、全く波の初期発生の問題に限られてしまうことになる。Eckart は実際の波の発生機構として、このような圧力分布による垂直圧力のみが重要な要素ではないかも知れないし、実験室における波の場合について考えると、むしろ圧力変動よりも風のせん断力が効果的であると考えられるので垂直応力の効果とせん断応力の効果についてもっと確める必要があり、さらに他の機構として Helmholtz の instability の問題を考える必要があるとした。

Eckart のこの理論は実際の波の大きさを推定するには失敗したが、gust のような圧力分布によって発生する波や、storm による波の具体的な分布を研究する方法として興味があると思われる。

#### 4. Phillips (1957,1958) の理論

Phillips は Eckart の仮定したような wind gust をさらに一般化し gust の大きさもその duration も全く random な完全に turbulent な風を考え、水面近くをある速度  $U_0$  をもって進行する渦より成る random な圧力変動を仮定した。そしてこのような圧力分布によって起る波を最大ならしめるような  $U_0$  を定義することによって波の成長を計算する方法を取った。

このような圧力分布も、またそれによって生ずる波も当然 random な分布をもつから、理論はすべてそれらのスペクトル密度の発達を取り扱う形を取っている。Eckart の場合と同様にこの圧力分布による垂直圧力によってのみ波は発生し、発生した波と圧力分布の間には何らの interaction も考えていない。しかし Eckart と異なり、Phillips の方法では  $U_0$  の速度をもって進行する座標系に対する圧力分布の integral time scale (渦の成長または持続時間) を最大ならしめる条件から、圧力分布と波との間の resonance によって波が発達していくことを見出している。

圧力分布の変動によって生ずる水面の displacement  $\eta(\mathbf{X},t)$  は、その位置  $\mathbf{X}(x,y)$  の stationary random function (定常偶然関数) であるから wave number  $\mathbf{K}$  によって

$$\eta(\mathbf{X},t) = \int \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{X}) \cdot d\mathbf{A}(\mathbf{K},t) \quad (4.1)$$

なる Fourier-Stieltjes 変換で表示される。したがってこの instantaneous spectrum は

$$\Phi(\mathbf{K},t) = (2\pi)^{-2} \int E(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (4.2)$$

で与えられる。ここで  $E(\mathbf{r})$  は次式で表わされる  $\eta(\mathbf{X}, t)$  の covariance(相関)である。(4.2)式のスペクトル  $\Phi(\mathbf{K}, t)$  はまたつぎの形で (4.1) 式から表わされる。

$$\Phi(\mathbf{K}, t) = \frac{\overline{dA(\mathbf{K}, t) dA^*(\mathbf{K}, t)}}{dK_1 dK_2} \quad (4.3)$$

ここで  $dA^*$  は  $dA$  の共役複素関数である。 $dK_1 dK_2$  は  $\mathbf{K}$  平面での面積を示し、結局  $\Phi(\mathbf{K}, t)$  は  $\mathbf{K}$ -平面の単位面積についてのエネルギー密度を示す。

同様にして圧力分布  $p(\mathbf{X}, t)$  もまた stationary random function であるから

$$p(\mathbf{X}, t) = \int \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{X}) d\tilde{\omega}(\mathbf{K}, t) \quad (4.5)$$

で表わすと、そのスペクトル関数  $\mathbf{T}(\mathbf{K}, t)$  は次式で wave number  $\mathbf{K}$  と time separation  $t$  との関数として表わされる。

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{K}, t) &= (2\pi)^{-2} \int \overline{p(\mathbf{X}, t') p(\mathbf{X} + \mathbf{r}, t' + t) \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{r} \\ &= \frac{\overline{d\tilde{\omega}(\mathbf{K}, t') d\tilde{\omega}^*(\mathbf{K}, t' + t)}}{dK_1 dK_2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

そこで  $d\tilde{\omega}(\mathbf{K}, t)$  が与えられた場合、それに response する  $dA(\mathbf{K}, t)$  を求めることが問題である。

いま  $\mathbf{T}(\mathbf{K}, t)$  を turbulent pressure fluctuation の相関  $\overline{p(\mathbf{X}, t') p(\mathbf{X} + \mathbf{r}, t' + t)}$  のフーリエ変換とすると、wave number  $\mathbf{K}$  に対する integral time scale は

$$\int_0^\infty \mathbf{T}(\mathbf{K}, t) dt = \mathbf{T}(\mathbf{K}, 0) \cdot \theta(\mathbf{K}) \quad (4.7)$$

として定義される。この座標系に対して  $\mathbf{V}$  なる速度で動いている座標系から見るときは、同じスペクトル関数は  $\exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} \cdot t) \mathbf{T}(\mathbf{K}, t)$  であらわれ、したがってその integral time scale  $\theta(\mathbf{K}, \mathbf{V})$  は

$$\int_{-\infty}^\infty \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} \cdot t) \mathbf{T}(\mathbf{K}, t) dt = 2\mathbf{T}(\mathbf{K}, 0) \cdot \theta(\mathbf{K}, \mathbf{V}) \quad (4.8)$$

として表わされる。これから

$$\int_0^\infty \mathbf{T}(\mathbf{K}, \tau) \cos[K(U - C)\tau] d\tau = \mathbf{T}(\mathbf{K}, 0) \cdot \theta(\mathbf{K}, C \sec \alpha - u) \quad (4.9)$$

ここで  $C(\mathbf{K})$  は wave number  $\mathbf{K}$  の波の速度で、 $\alpha$  は  $\mathbf{V}$  と  $C$  の方向 ( $\mathbf{V}$  と波の進行方向とのなす角、 $u$  は  $|\mathbf{U}|$  を示す) である。(4.7) 式から分るように time scale  $\theta$  はスペクトル関数  $\mathbf{T}(\mathbf{K}, t)$  が時間とともに変動する場合 (具体的には渦が進行するとき) 初めのスペクトルが持続する時間の scale をあらわすものであり、(4.8) 式で  $\mathbf{V}$  を  $\mathbf{U}$  と  $C$  との差と考えると  $\theta$  は  $V = u - C \sec \alpha$  の関数となる。

wave motion は irrotational であり、水は非粘性非圧縮性とし速度ポテンシャルを  $\phi(\mathbf{X}, t)$  とすると、連続の式として

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (4.10)$$

微小振幅波では水面の力学的条件は次式で表わされる。

$$\frac{1}{\rho} \left\{ p - T \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \right\} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} - g\eta \quad (4.11)$$

$\rho$  は水の密度、 $T$  は表面張力、 $g$  は重力の加速度である。

この条件式を速度  $\mathbf{U}$  をもって進行する座標系に変換するとつぎのようになる。

$$\frac{p}{\rho} = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} - U_x \frac{\partial \phi}{\partial x} - U_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{z=0} - g\eta + \frac{T}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \quad (4.12)$$

$U_x$  及び  $U_y$  は  $\mathbf{U}$  の  $x, y$  成分である。水面の幾何学的条件は

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (4.13)$$

これを同様に速度  $\mathbf{U}$  の座標系に変換すると

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t} - U_x \frac{\partial \eta}{\partial x} - U_y \frac{\partial \eta}{\partial y} = \int (dA' - i\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} \cdot dA) \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{X}) \quad (4.14)$$

(4.10) および (4.14) 式を満足し、かつ  $z \rightarrow \infty$  で 0 となるような  $\phi$  は次式で示される。

$$\phi = - \int \frac{dA' - i\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} \cdot dA}{K} \cdot \exp(-Kz) \cdot \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{X}) \quad (4.15)$$

ここで  $K=|\mathbf{K}|$  である。これから (4.12) 式の Fourier-Stieltjes 変換を取り、次式が導かれる。

$$dA'' - 2in_1 dA' - (n_1^2 - n_2^2) dA = -\frac{K}{\rho} d\tilde{\omega}(t) \quad (4.16)$$

ここで ' の記号は時間  $t$  についての微分を示し、また

$$n_1 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = K \cdot U \cos \alpha, \quad n_2 = (gK + TK^3/\rho)^{1/2} \quad (4.17)$$

である。 $n_1$  は座標系の移動速度 (convection velocity) の波の進行方向への分速度と wave number  $K$  との積、 $n_2$  は free wave の波速  $C(K) = (g/K + TK/\rho)^{1/2}$  から分るように  $KC(K)$  である。 $\alpha$  は wave number  $K$  の波と  $\mathbf{U}$  とのなす角度である。上式を  $t=0$  で  $dA = dA' = 0$  という初期条件を与えて解くと、つぎの解が得られる。

$$dA(\mathbf{K}, t) = \frac{iK}{2\rho n_2} \int_0^t d\tilde{\omega}(\mathbf{K}, \tau) \left[ \exp\{-i(n_1 - n_2)(\tau - t)\} - \exp\{-i(n_1 + n_2)(\tau - t)\} \right] d\tau \quad (4.18)$$

これは速度  $\mathbf{U}$  をもって動いている座標系における圧力変動による水面波の発達を示す式である。

ここで座標系の速度  $\mathbf{U}$  は任意の値を取ることができ、ここでは (4.8) 式で表わされる integral time scale  $\theta$  を最大ならしめるような速度にとり、これを  $d\tilde{\omega}(\mathbf{K})$  の convection velocity といい、 $\mathbf{U}_0$  として表わすこととする。

(4.18) 式を  $t \ll \theta$  の場合すなわち初期の波の発生と、 $t \gg \theta$  の場合すなわち wave number  $\mathbf{K}$  の圧力変動の time scale よりも相当長い時間経過した後の波の発達の状態に分けて考える。

(i)  $t \ll \theta$  の場合 (initial stage)

この場合は  $d\tilde{\omega}(\mathbf{K}, t)$  はその初期値  $d\tilde{\omega}(\mathbf{K}, 0)$  から余り変化していないと考えてよいから、 $d\tilde{\omega}$  は時間  $t$  には無関係とする。したがって (4.18) 式は

$$dA(\mathbf{K}, t) \doteq \frac{K d\tilde{\omega}(\mathbf{K})}{\rho(n_1^2 - n_2^2)} \left[ 1 - \frac{n_1 + n_2}{2n_2} \exp\{-i(n_1 - n_2)t\} + \frac{n_1 - n_2}{2n_2} \exp\{-i(n_1 + n_2)t\} \right] \quad (4.19)$$

また

$$dA^*(\mathbf{K}, t) \doteq \frac{K d\tilde{\omega}^*(\mathbf{K})}{\rho(n_1^2 - n_2^2)} \left[ 1 - \frac{n_1 + n_2}{2n_2} \exp\{i(n_1 - n_2)t\} + \frac{n_1 - n_2}{2n_2} \exp\{i(n_1 + n_2)t\} \right]$$

したがって (4.4), (4.6) 式から波のスペクトル関数は圧力変動のスペクトル関数  $\mathbf{T}$  によりつぎのように表わされる。

$$\Phi(\mathbf{K}, t) \doteq \frac{K^2 \mathbf{T}(\mathbf{K})}{\rho^2(n_1^2 - n_2^2)^2} \left\{ \frac{3}{2} + \frac{n_1^2}{2n_2^2} - \frac{n_1 + n_2}{n_2} \cos(n_1 - n_2)t + \frac{n_1 - n_2}{n_2} \cos(n_1 + n_2)t - \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_2^2} \cos 2n_2 t \right\} \quad (4.20)$$

(4.20) 式の括弧内の値が時間  $t$  とともに波の発達する傾向を与えるものであるが、この最も大きい値は  $n_1 = n_2$  の場合に起こり、(4.17) 式から分るように  $d\tilde{\omega}(\mathbf{K})$  の convection velocity と波速とが近似した resonance の場合に相当する。その時には  $n_2 t \gg 1$  では (4.20) 式は近似的につぎようになる。

$$\Phi(\mathbf{K}, t) \doteq \frac{K^2 \mathbf{T}(\mathbf{K})}{2\rho^2 n_2^2 (n_1 - n_2)^2} \{1 - \cos(n_1 - n_2)t\} \quad (4.21)$$

$$\text{ただし } n_1 \doteq n_2, \quad 1/n_2 \ll t \ll \theta \quad (4.22)$$

$n_1 \doteq n_2$  の条件は

$$U_0 \cos \alpha \doteq (g/K + TK/\rho)^{1/2} = C(K)$$

すなわち圧力変動の convection velocity  $\mathbf{U}_0$  の波の方向への分速度が波速と近似した場合である。また (4.21) 式の  $K^2 \mathbf{T}(\mathbf{K})$  の形から  $\Phi(\mathbf{K})$  の最も発達しやすい形は  $K$  が大きい (波長  $L$  が小さい) 波でかつ convection velocity  $U_0 \cos \alpha$  に近い速度で進行する波であることが分る。

$1/n_2 \ll t \ll \theta$  の条件は波数  $K$  の波の波長  $L \ll \theta \cdot C(K)$  すなわち波が  $\theta$  時間内に進行する距離に比して  $L$  が小さいという状態、またはその波の周期  $T$  が  $\theta$  に比べて十分小さいことを意味する。したがって (4.21) 式に示すような波の発達は ripple かまたはそれに近い重力波に対して最もよく適合するということになる。

(ii)  $t \gg \theta$  の場合 (principal stage)

この場合は (4.18) 式から波のスペクトル関数はつぎようになる。

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{K}, t) &= \frac{dA(\mathbf{K}, \tau) dA^*(\mathbf{K}, \tau')}{dK_1 dK_2} \\
&= \frac{K^2}{4\rho^2 n_2^2} \int_0^t \int_0^t \mathbf{T}(\mathbf{K}, \tau - \tau') \left[ \exp\{-i(n_1 + n_2)(\tau - \tau')\} + \exp\{-i(n_1 - n_2)(\tau - \tau')\} \right] \\
&\quad - 2\exp\{-in_1(\tau - \tau')\} \exp\{-in_2(\tau + \tau')\} \cos 2n_2 t \Big] d\tau d\tau' \quad (4.23)
\end{aligned}$$

これは  $t \rightarrow \infty$  のときは次式に漸近する。

$$\Phi(\mathbf{K}, t) \sim \frac{K^2 t}{4\sqrt{2}\rho^2 n_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{T}(\mathbf{K}, \tau) \left[ \exp\{-i(n_1 + n_2)\tau\} + \exp\{-i(n_1 - n_2)\tau\} \right] d\tau \quad (4.26)$$

(4.8)式から integral time scale  $\theta(\mathbf{K}, \mathbf{V})$  を用いると

$$\Phi(\mathbf{K}, t) \sim \frac{K^2 \mathbf{T}(\mathbf{K}, 0)}{2\sqrt{2}\rho^2 n_2^2} \cdot t \cdot \{\theta(\mathbf{K}, \mathbf{V}_1) + \theta(\mathbf{K}, \mathbf{V}_2)\} \quad (4.27)$$

$$\text{ここで } -\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_1 = n_1 + n_2 = K \{U \cos \alpha + (g/K + TK/\rho)^{1/2}\} \quad (4.28)$$

$$-\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_2 = n_1 - n_2 = K \{U \cos \alpha - (g/K + TK/\rho)^{1/2}\} \quad (4.29)$$

$\theta(\mathbf{K}, \mathbf{V}_1)$  は波と反対方向に進む座標系から見た場合の integral time scale,  $\theta(\mathbf{K}, \mathbf{V}_2)$  は波と同じ方向に進む座標系から見た場合の integral time scale である。したがって (4.7) 式の意味から見た場合、明らかに  $\theta(\mathbf{K}, \mathbf{V}_1) \ll \theta(\mathbf{K}, \mathbf{V}_2)$  であり、(4.27) 式は  $\theta(\mathbf{K}, \mathbf{V}_1)$  を省略して近似的につぎの式になる。

$$\Phi(\mathbf{K}, t) \sim \frac{K^2 \mathbf{T}(\mathbf{K})}{2\sqrt{2}\rho^2 n_2^2} \cdot t \cdot \theta(\mathbf{K}, \mathbf{V}_2) \quad (4.30)$$

$\theta(\mathbf{K}, \mathbf{V}_2)$  は波と同じ方向に進む座標系から見た場合の圧力変動のスペクトルの発達時間または持続時間と考えられ、具体的には渦の成長または持続時間であり、 $\theta(\mathbf{K}, \mathbf{V}_2)$  がいかなる座標速度において最大となるかは、関数  $\theta(\mathbf{K}, \mathbf{V}_2)$  の精しい性質について知られていないから、明確には分らない。しかし渦の移動速度に近い速度で移動す座標系から見たときに、 $\theta$  は最も大きくなるはずであり、したがって概略の傾向はつぎのように推定される。すなわちこの座標系の速度  $\mathbf{U}$  を圧力分布の convection velocity  $\mathbf{U}_c$  と等しく取ると、( $\mathbf{U} = \mathbf{U}_c$ ),  $\theta(\mathbf{K}, \mathbf{V}_2)$  の order は長さの scale  $K^{-1}$  を波速  $C(K)$  とその方向の  $\mathbf{U}_c$  の速度の差 (すなわち波速と convection velocity との相対速度)  $U \cos \alpha - C(K)$  で割ったもので estimate されると見なすことができ、

$$\theta(\mathbf{K}, \mathbf{V}_2) \doteq \frac{1}{K(C(K) - U \cos \alpha)} \quad (4.31)$$

の形で表わされるものと考えられる。これから wave number  $K$  の波の進行速度と圧力変動の convection velocity が近似するとき、波のエネルギー密度は resonance の形で増加することとなる。これを 2 次元スペクトルとして考え、ある wave number  $K = |\mathbf{K}|$  をもつ圧力変動について考えると、これらの圧力変動は風に対して種々の角度をもって進む同じ  $K$  をもつ波を生ずる傾向にある。一般に風速は対応する波の速度とは異なっているであろうが、その波の方向への風速の成分が丁度 free gravity wave の速度に等しいならばそのとき pressure input と oscillation の free mode との間に matching が成立し、一般の resonance があらわれる。そして波の振幅は最も急速に成長することになる。

その角度

$$\alpha = \sec^{-1}(U_c/C(K))$$

のことを resonance angle という。そこで  $U_c \gg C$  の場合にはおのおのの frequency band におけるエネルギーは平均風向の両側に  $\phi = \pm \alpha$  の 2 つの方向に主として進行することが分る。この様子は図-1.4.1 に示すごとくである。

(4.30), (4.31) 式から重力波に対しては  $n_2^2 = gK$  であり、

$$\Phi(\mathbf{K}, t) \sim \frac{\mathbf{T}(\mathbf{K}) \cdot t}{2\sqrt{2} \cdot \rho^2 g (C(K) - U \cos \alpha)} \quad (4.32)$$

これから分るようにスペクトルの形は時間  $t$  に直接的に比例して増加して行く。

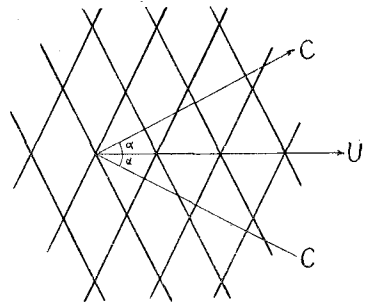


図-1.4.1 風向と Resonance wave

このようにして圧力分布のスペクトル  $T(K)$  が分れば、また  $\theta(K, V_2)$  の形がさらに正確に分れば、波のスペクトルも求められることになる。

Phillips はさらに (4.32) 式の形の概略値を簡単につぎのようにおくことができるとした。

$$\Phi(K, t) \sim \frac{T(K) \cdot t}{2\sqrt{2} \rho^2 \cdot U_* \cdot g} \quad (4.33)$$

したがって

$$\overline{\eta^2} \sim \frac{\overline{p^2} \cdot t}{2\sqrt{2} \rho^2 \cdot U_* \cdot g} \quad (4.34)$$

とおくことができ  $\overline{p^2} \div 9 \times 10^{-2} \rho a^2 U^4$  ( $U$  は海面上約 5 m の高さの風速) の程度と見積り、 $\overline{\eta^2} \sim 0.035 (\rho a / \rho_w)^2 \cdot (U^3 \cdot t / g)$  ( $\rho_w$  は水の密度) として、有義波高  $H$  についての

$H^2 \div 8 \overline{\eta^2}$  (Longuet-Higgins, 1952) の関係から

$$gH/U^2 \sim 6 \times 10^4 (gt/U)^{1/2} \quad (4.35)$$

の関係を導き、Sverdrup 及び Munk (1947) との比較からこの理論の正当性を主張した。しかしその後 Phillips の用いた  $\overline{p^2}$  の値は実測値より 2 桁大きいものであったことが、したがってその結果推定される波は到底実測に見られるものの order ではないということになり、この理論も完全なものとはされないことになった。しかしこの事自身は Phillips の理論を否定することにはならないかも知れないのであって、(4.31) 式以降の integral time scale に対する近似の取り方の影響も考えられる。第 5 節に述べる Miles の理論の出現によってこの理論が現象のいかなる位置を占めるかが明らかにされよう。

Phillips (1958) はこのような波の発生機構には直接の関連はないが、波のスペクトルの equilibrium range を支配するいわゆる  $\omega^{-5}$  法則を見出ししている。これは十分に長い fetch と duration をもつ風の吹送において見られる海面の white caps が、波の high frequency component の成長の限界を示すものと見なし、それは short steep wave の crest の附近の水の下方への運動の加速度が重力の加速度  $g$  に等しい状態で起こるという砕波の条件によって支配されるとして、その range におけるスペクトル密度の最大の限界値を次元考察によって与えたものである。すなわち wave number の大きい波のエネルギー密度はこれ以上増加することがないという状態を equilibrium の状態といい、この時のスペクトルの形を規定するものである。

Phillips によれば波のスペクトルの equilibrium range は波の crest の砕波条件によって支配される領域と考えるものであるから、それは風の fetch や duration には無関係であると考えてよい。そこで波のエネルギー密度に対して、次元解析で考えるべき物理量は水と空気の密度  $\rho_w$  及び  $\rho_a$ 、風速を示す摩擦速度  $U_*$ 、水面の粗度  $z_0$ 、重力の加速度  $g$ 、水の表面張力  $T$ 、粘性  $\nu$  及び波に関する wave number  $K$  または frequency  $\omega$  である。これらすべての物理量を逐次考察して行って最後に残すべき支配的な量について次元考察をして答に到達することができる。

まず、対象とする wave number 及び frequency は表面張力に関係する波よりもはるかに小さいと考えることができる。それは white caps のような状態に対しては明らかに表面張力の影響は無視できると考えられるからである。したがって、

$$K \ll \left( \frac{\rho_w g}{T} \right)^{1/2}, \quad \omega \ll \left( \frac{4 \rho_w g}{T} \right)^{1/4} \quad (4.36)$$

の範囲の  $K$  と  $\omega$  について考えれば良い。つぎに水の粘性の影響は波の減衰に対してまづ直接的にあらわれるが、いま考える状態の下では粘性による波のエネルギー損失は風から波に供給されるエネルギー量に較べて無視できる位であるから、粘性もまた考えるに及ばない。つぎに空気と水の密度であるが、いま考えている物理量の中に質量の次元をもつものは密度だけであるから、それは  $\rho_a / \rho_w$  の形で入るだけである。この値は実際上一定であるから、これも除外してよい。

風速  $U_*$  と粗度  $z_0$  は Ellison (1956) によると

$$z_0 \propto U_*^2 / g \quad (4.37)$$

の形で結びついている。この条件が white caps を生ずるような状態の下でも成立するものと仮定すると、結局考えるべき残りの物理量は風速  $U_*$  と重力の加速度  $g$  及び wave number  $K$  または frequency  $\omega$  であり、一



一般的には  $\rho a / \rho_w$  を含むことになる。

いま考えているような white caps に対しては風によって、crest の水が吹きとばされるという場合は考えていないから、その限界条件は crest の水の下方の加速度が  $g$  をこえないということだけであり、これに対して風速  $U_*$  は海面の white caps の状態にある波の数を増加するという効果はあっても、その条件自体に影響を及ぼすとは考えられない。そうすればエネルギー密度に関係する量としては  $g$  と  $\omega$  又は  $K$  のみとなる。

ここで海面の一点における surface elevation  $\eta(\mathbf{X}, t)$  の frequency spectrum を考えるとそれは次式で定義される。

$$\Phi(\omega) = (2\pi^{-1}) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\eta(\mathbf{X}, t) \eta(\mathbf{X}, t+\tau)} \cdot \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad (4.38)$$

また, instantaneous wave number spectrum は

$$\Psi(\mathbf{K}) = (2\pi)^{-2} \int \overline{\eta(\mathbf{X}, t) \eta(\mathbf{X}+\mathbf{r}, t)} \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (4.39)$$

で定義される。したがって  $\Phi(\omega)$  は  $L^2 T$  の次元をもち、また  $\Psi(\mathbf{K})$  は  $L^4$  の次元をもつ。これらの定義と上述の事項とからただちに次的に

$$\Phi(\omega) \sim \alpha g^2 \omega^{-5} \quad (4.40)$$

の関係を得る。 $\alpha$  は absolute constant である。 $\Psi(\mathbf{K})$  に対してはつぎの関係が得られる。

$$\Psi(\mathbf{K}) \sim f(\theta) K^{-4} \quad (4.41)$$

ここで  $\theta$  は vector wave number  $\mathbf{K}$  の方向を指定する角度であり、 $f(\theta)$  はこの equilibrium range に属する component waves の方向分布によって定まるものである。

(4.40)式がいわゆる  $\omega^{-5}$  則であり、十分に発達した波の平衡状態の frequency range に対して成立すると考えられる。常数  $\alpha$  は Burling (1955) が short fetch の波に対して実測から導いた式

$$\Phi(\omega) = 7.0 \times 10^3 \times \omega^{-5} (\text{c. g. s. unit}) \quad (4.42)$$

と比較することにより

$$\alpha = 7.4 \times 10^{-3} \quad (4.43)$$

であることが分る。この法則は Burling の観測の外にも Longuet-Higgins, Cartwright (1962) による floating buoy による実測からも確められている。第2章に述べる Bretschneider のスペクトルにおいても、fetch  $F \rightarrow \infty$ ,  $r \rightarrow 0$  とすればやはり  $\omega$  の大きい部分に対して  $\omega^{-5}$  則が成立つ。Neumann のスペクトルにおいては  $\omega^{-6}$  という形になるが、これはそのスペクトルがここで考えたような short steep wave を含まない実測値に基づいているためであり、Neumann のスペクトルはむしろこの equilibrium range からさらに低い frequency への extrapolation とも見られる。

図-1.4.2 は Burling の実測によるスペクトルから Phillips が  $\omega^{-5}$  法則を示したものである。太い実線は (4.40)式で計算した equilibrium range に対するスペクトル線、それを囲む点線は Burling の実測スペクトルの最高値の範囲を示し、×印はその平均位置を示している。左側の矢印をもった曲線群は Burling のスペクトルで未だ equilibrium の状態に到達していない発達しつつある low frequency のスペクトル線を示したものである。この図から high frequency band でのスペクトルの発達の様子が見られて面白い。

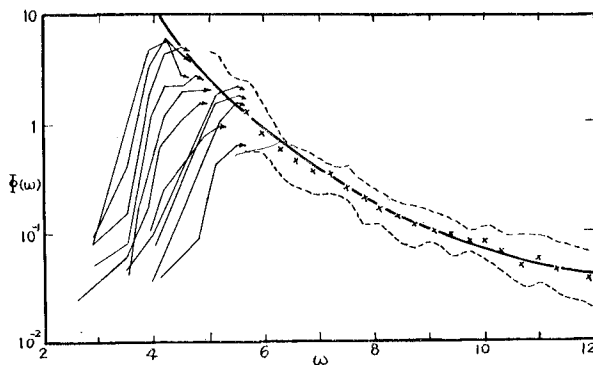


図-1.4.2 Equilibrium range のスペクトル  
(Phillips, 1958)

## 5. Miles (1957, 1959, 1960) の理論

第1節において述べたように、水面の surface elevation と in phase な圧力の component は波に対して何らのエネルギーを与えない。しかし surface slope と in phase な圧力の component は波に対して仕事をすることができ、それが水の粘性による損失を凌駕するときに波の振幅は成長することができる。第2節に示した Kelvin-Helmholtz の波の発生に関する機構は圧力の波に対する in phase component によるものでこれは風速が大きくなると有効でないと考えられる。Miles は乱れによってある垂直分布をもった風を考え、この分布の下をすでに存在する波の進行によって生ずる空気の圧力変動によって風から波にエネルギーが輸送されると考え、水面附近における水と空気の運動から波の発達を説明した。空気は非粘性非圧縮とし、水面附近では wave motion のない時には shear flow として風速分布  $U(y)$  をもとし ( $y$  軸は鉛直上方に取る)、乱れによる変動 (turbulence) は直接波の運動に関係することなく、単に mean shear flow  $U(y)$  を維持するにすぎないとする。水はやはり非粘性非圧縮性とし irrotational motion を行ない、また水面波形のこう配は

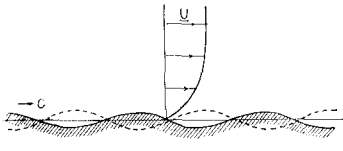


図-1.5.1 Miles の波のモデル

$$\partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial y^2 = 0 \quad (5.1)$$

が成立し、表面条件として

$$\partial \eta / \partial t = (\partial \phi / \partial y)_{y=0} \quad (5.2)$$

力学的条件として  $T$  を表面張力とすると

$$-\frac{1}{\rho} \{ p_a - T(\partial^2 \eta / \partial x^2 + \partial^2 \eta / \partial y^2) \} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{y=0} - g\eta \quad (5.3)$$

$\phi$  が  $x$  について  $\exp(iKx)$  ( $K$  は wave number) の形を取ると、(5.1)式から  $\phi$  は  $\exp(iKx) \cdot \exp(Ky) \cdot f(t)$  の形となり、 $\partial \phi / \partial y = K\phi$  したがって (5.2)式から  $\partial \phi / \partial t = \partial^2 \eta / K \partial t^2$  となり、(5.3)の条件式は  $\eta$  のみについてつぎのようになる。

$$p_a - T \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) = \frac{\rho_w}{K} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g\eta \quad (5.4)$$

重力波を考えるときは  $T \rightarrow 0$  としてつぎのようになる。

$$(\rho_w / K) \eta_{tt} + \rho_w g \eta = -p_a \quad (5.5)$$

すなわち  $\eta$  は水面の単位面積について  $\rho_w / K$  なる質量の水の鉛直運動の方程式として表わされる。ここで  $\rho_w$  は水の密度、 $g$  は重力の加速度、 $p_a$  は空気の垂直圧力である。

水面を進行する波形をつぎの形でおく。

$$\eta(x, t) = a \exp\{iK(x - Ct)\} \quad (5.6)$$

$C$  は波の位相速度で波形は  $x$  の正方向に進行する。この波の進行による空気の圧力  $p_a$  は風速についてのある reference speed  $U_1$  (Jeffreys は  $(U-C)$  としている) の平方と波形のこう配  $K\eta$  に比例すると考える (いまは  $U_1$  は未定としておく)。すなわち

$$p_a = (\alpha + i\beta) \rho_a U_1^2 K \eta \quad (5.7)$$

ここで  $\rho_a$  は空気の密度、 $(\alpha + i\beta)$  は無次元の圧力係数で  $\alpha$  と  $\beta$  は後に述べる空気の運動から求められる  $C$  および  $K$  の関数である。

空気の圧力抵抗のない場合 ( $p_a = 0$ ) には、波速  $C_w$  は通常の位相速度として深海波では

$$C_w^2 = g/K \quad (5.8)$$

として表わされる。いまの場合は波速  $C$  は  $C_w$  と異なり (5.6), (5.7) 式を (5.5) 式に代入して

$$C^2 = C_w^2 + S(\alpha + i\beta) U_1^2 \quad (5.9)$$

として求められる。ここで  $S = \rho a / \rho_w$  である。(5.9)式の右辺第2項が  $C_w^2$  に比して小さいと仮定すると第1近似として

$$C = C_w \left[ 1 + \frac{1}{2} S(\alpha + i\beta) \left( \frac{U_1}{C_w} \right)^2 \right] \quad (5.10)$$

となる。この実数及び虚数部分をそれぞれ  $R(C)$  及び  $I(C)$  で示すと、(5.6)式から分るように  $\eta$  又は  $p_a$  の振幅の時間的な変化をあらわす logarithmic decrement は  $|\eta(t+T)|/|\eta(t)|$  の対数として  $-2\pi I(C)/R(C)$  となる。いま、

$$\zeta = 2I(C)/R(C) \quad (5.11)$$

とおくと、logarithmic decrement は  $-\pi\zeta$  で表わされ、 $\zeta$  は波の振幅の時間的な変化を表わす factor となる (これを negative damping ratio という)。このように定義された  $\zeta$  を用いると、(5.6)式の  $\eta$  は近似的に  $a \exp(1/2 KC\zeta t) \cdot \exp\{iK(x-ct)\}$  の形となり平均の波のエネルギー  $\bar{E}$  は  $a^2$  に比例し、その時間的な変化  $\partial \bar{E} / \partial t$  は  $KC\zeta a^2$  に比例することになるから

$$\zeta = \frac{1}{KCE} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (5.12)$$

となり、 $\zeta$  は radian-cycle 当りの平均エネルギーの増加を示す量であることが分る。

(5.10) 式から近似的に  $\zeta$  はつぎようになる。

$$\zeta = S\beta (U_1/C)^2 \quad (5.13)$$

かくして波の発達は  $\beta$  及び  $U_1$  によって決められ、波の振幅は (5.6)式からも分るように時間の指数関数として増加することになる。(5.13)式では近似的に  $C=C_w$  となるが、以下簡単のために  $C_w$  を  $C$  として表わす。

まず  $\beta$  の値を決定するために空気の運動について考える。空気を非圧縮非粘性とし、その風速分布を  $U(y)$  とした場合、波の進行に伴って生ずる disturbance による圧力 (perturbation pressure) を  $p$  とし、空気の速度 (perturbation velocity) の  $x$  および  $y$  方向の成分をそれぞれ  $u$  および  $v$  とする。これらの small perturbation の運動方程式と連続の式はつぎようになる。

$$\rho_a (u_t + Uu_x + vU_y) = -p_x \quad (5.14)$$

$$\rho_a (v_t + Uv_x) = -p_y \quad (5.15)$$

$$u_x + v_y = 0 \quad (5.16)$$

ここで添字はそれに関する偏微分を示す。

stream function  $\psi$  を導入すると、

$$u = -\psi_y, \quad v = \psi_x \quad (5.17)$$

$p$  及び  $\psi$  が (5.6)式の  $\eta$  の形を持つとすると、(5.14) 及び (5.15)式から

$$\rho_a [(U-C) \psi_y - U_y \psi] = p_x \quad (5.18)$$

$$\rho_a K^2 (U-C) \psi = p_y \quad (5.19)$$

となり、この両式から  $p$  を消去すると、 $\psi$  の満足すべき偏微分方程式として次式を得る。

$$(U-C) \psi_{yy} - [K^2 (U-C) + U_{yy}] \psi = 0 \quad (5.20)$$

これは非粘性流体に対する Orr-Sommerfeld の方程式で  $U=C$  において regular singularity をもっている。(Lin, 1955)

この式を解くためにつぎのようにおく。

$$\xi = Ky, \quad U-C = U_1 w(\xi) \quad \psi = U_1 \phi(\xi) \eta(x, t) \quad (5.21)$$

ここで  $U_1$  は (5.7)式に用いたと同じもので、 $\xi, w$  は無次元量である。(5.20) 式はかんたんにつぎのようになる。

$$\phi'' - \left(1 + \frac{w''}{w}\right) \phi = 0 \quad (5.22)$$

この式に対する境界条件としては

(a) 空気と水の境界面は流線に沿っていること。波面に接する空気の水平速度は近似的に  $U-C$  であり、その垂直方向の速度は  $\psi_x$  で与えられるから、波面での  $\psi_x$  と  $U-C$  との比は波面のこう配に等しい。これから

$$y = y_0 + \eta \doteq y_0 \text{ に対して } \psi_x/(U - C) = iK\eta \quad (5.23)$$

という条件が成立すべきである。ここで  $y_0$  は厳密には水面に接するのではなく、 $Ky_0 \ll 1$  という条件を満足する水面に近い stream line の平均的位置と考える。この仮定は波形のこう配の小さい（波高が小さいことは必要でない）波に対しては正しいことが後に証明される。これから (5.23) 式は

$$\phi_0 = w_0 \quad (5.24)$$

となる。ただし 0 は  $y = y_0$  に対する  $\xi = \xi_0$  を示す。

(b) 波による空気の disturbance は  $\xi$  が大きくなると 0 に近づく、したがってこの条件はつぎのようである。

$$\xi \rightarrow \infty \text{ のとき } \phi \rightarrow 0 \quad (5.25)$$

この条件と (5.22) 式を満足する  $\phi$  を用いると圧力  $p$  は (5.18) 式からつぎのように表わされる。

$$p = \rho_a U_1^2 K(w\phi' - w'\phi)\eta \quad (5.26)$$

これと (5.7) 式を比較して (5.25) 式の条件を入れると

$$\alpha + i\beta = w_0 (\phi_0' - w_0') \quad (5.27)$$

したがってわれわれは (5.27) 式の右辺の虚数部分として  $\beta$  の値を求めることができる。ここで  $w$  は近似的に実数と考えることができるから、 $\beta$  は  $w_0 \phi_0'$  の虚数部分として与えられる。

計算の結果は

$$\beta = -\pi |\phi_0|^2 \cdot (w_0''/w_0') \quad (5.28)$$

となる。ここで  $C$  は  $w$  を 0 ならしめるすなわち  $U = C$  ならしめる  $\xi$  の値  $\xi_0$  における値を示すもので、 $w_0 = 0$  である。

すでに明かなように  $\beta$  の値が正であるか負であるかによって、 $\eta$  又は  $p$  が時間的に発達するか減衰するかが決まる。一般の風速分布では常に  $w_0' > 0$  であるから (5.28) 式から  $w_0''$  すなわち風速  $U(y)$  が波速  $C$  に等しい高さでの風速分布の曲率  $U''(y)$  が負であるか、正であるかによって波が発達するか否かが決まることになる。また、(5.12) の式によって、波に供給されるエネルギー量もこの曲率の大きさに比例することが分る。このようなことから Miles はつぎのように推定している。

(i) ある風速分布の下では  $-d^2U(y)/dy^2$  が大きい値をもつような波速の波のみが成長することが期待される。波速  $C$  の lower limit は直線的な風速分布をもつ水面にごく近い sublayer の存在又はそのような風速分布と風との相互作用によって決められるであろうし、また upper limit は風速分布の外側すなわち boundary layer の外側の風速値に限定され、その風速よりも幾分小さいものとなるであろう。（このことは風によって発達し得る波速  $C$  の限界が風速分布によって限定されることを示唆すると同時に、与えられた風速分布による波のスペクトルに optimum frequency band の存在することを示唆する）。

(ii) 波の発生の初期においては、 $-d^2U/dy^2$  の大きい値は風速分布の下の方（水面に近い方）に起こるから、その風速値を波速とする波が卓越するものと考えられる。（初期発生の波が小さな波速をもつ large wave number のものであることを意味する）。

(iii) 上述のような  $\beta$  の性質から見ると、Jeffreys の sheltering coefficient  $S$  を測定しようとして、固定した波面のモデルについて行なった実験は明らかに有意な結果を与えるものではないと考えられる。何故ならばその場合には  $U(y) = C$  なる点は丁度固定した波面の上で起こることになるからである。

ここで問題は (5.28) 式の  $|\phi_0|^2$  の値を求めることである。(5.28) 式は  $\xi \rightarrow \infty$  における条件 (5.25) 式と特異点  $\xi = \xi_0$  附近における  $\phi$  の性質から

$$\phi_0 = \frac{1}{w_0'} \int_{\xi_0}^{\infty} w\phi d\xi \quad (5.29)$$

の形で表わすことができる。 $\phi$  として便宜上つぎの近似式を仮定して見ることにする。

$$\phi = w(\xi) \cdot e^{-\xi} \quad (5.30)$$

この形は境界条件を満足するが、微分方程式 (5.22) は  $|w''| \gg |w|$  (すなわち  $\xi$  の小さい値) または  $|w''| \ll |w|$  ( $\xi$  の大きい値) についてしか満足されない。問題の  $\xi = \xi_0$  についてはもちろん満足しないので、明らかに十分な近似ではないが、便宜的に  $\beta$  の値の概略の傾向を推定するのに用いられ、また実際この仮定で対数分布

の風速を仮定した計算結果はかなり信頼できるものであったことが後に Miles のさらに正確な計算 (1959) によって示されている。かくして

$$\beta = -\pi \frac{w_0'''}{w_0'^3} \left[ \int_{\xi_0}^{\infty} e^{-\xi w^2} d\xi \right]^2 \quad (5.31)$$

として  $\beta$  が与えられることになる。したがって風速分布  $U(y)$  が与えられると  $\beta$  は  $\xi_0$  の関数として表わすことができる。残る問題は (5.13) 式における  $U_1$  である。

これはいままで具体的に規定されることなく reference speed として定義されているのみであるから、wave number  $K$  が与えられたとき  $\xi = \xi_0$  ( $y = y_0$ ) における  $U_1$  がいかなる値を取るべきかが規定されねばならない。

いま、 $y = y_0$  における風速 (ここで考えている風速分布の最下端での値) を  $U_0$  とし、風速分布が対数的であるとすればつぎの形で表わされる。

$$U(y) = U_0 + U_1 \log(y/y_0) \quad (5.32)$$

$U_0$  は一定値と考えるから、この風速分布に対する reference speed  $U_1$  は対数の係数である。一方 turbulent flow に対する風速分布は neutral condition においては次式で与えられる。

$$U(y) = \frac{U_*}{K} \log \frac{y}{z_0} \quad (5.33)$$

ここで  $U_* = (\tau_0/\rho a)^{1/2}$  は摩擦速度と呼ばれ、 $\tau_0$  は表面の摩擦抵抗、 $\rho a$  は空気密度、また  $K$  は Kármán の常数約 0.4 で  $z_0$  は海面の粗度を表わす係数である。

上の2つの式から

$$U_1 = U_*/K \quad (5.34)$$

したがって  $\rho a U_1^2$  は海面での風の摩擦抵抗  $\tau_0$  に比例したものであり、また

$$U_0 = \frac{U_*}{K} \log \left( \frac{y_0}{z_0} \right) \quad (5.35)$$

であることがわかる。

$U = C$  なる条件を満足する  $y = y_0$  なる値は (5.32) 式および (5.33) 式から

$$C = U_0 + U_1 \log(y_0/y_0) = U_1 \log(y_0/z_0) \quad (5.36)$$

によって与えられ、したがって (5.21) および (5.31) 式から

$$w = \log(\xi/\xi_0) \quad (5.37)$$

$$\beta = \pi \xi_0^3 \left[ \int_1^{\infty} \exp(-\xi u) \log^2 u du \right]^2 \quad (5.38)$$

となる。さらに (5.38) 式はつぎのようになる。

$$\beta(\xi_0) = \pi \xi_0^3 \left\{ \frac{1}{6} \pi^2 + \log^2(\gamma \xi_0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \xi_0^n}{n! \cdot n^2} \right\}^2 \quad (5.39)$$

ここで  $\gamma$  は Euler の constant で  $\log \gamma \doteq 0.5772$  である。 $\xi_0$  の大きい値に対する漸近式としては

$$\beta(\xi_0) \sim 4\pi \xi_0^{-3} \cdot e^{-2\xi_0} (1 - 6\xi_0^{-1} + 31\xi_0^{-2} - \dots) \quad (5.40)$$

$\beta$  の  $\xi_0$  に対する値は計算の結果 図-1.5.2 に示されている。(ここで 図-1.5.2 は (5.39)、(5.40) 式そのままの計算結果ではなく、Miles (1959) は (5.30) 式のような仮定を用いなく、さらに正確な計算を曲線座標によって行っており、その結果を示している)。図から  $\xi_0 \doteq 0.01$  で  $\beta$  は最も大きく約 3.4 である。また  $\xi = 1$  の程度になると  $\beta$  はほとんど 0 である。

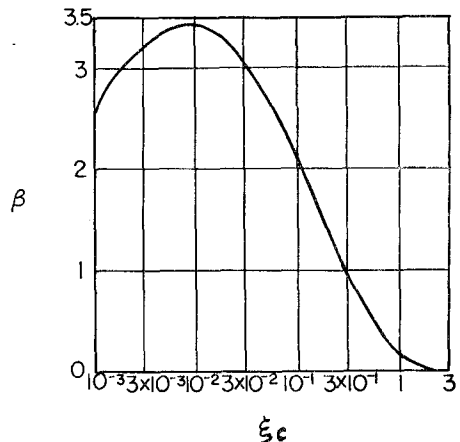


図-1.5.2  $\beta$  と  $\xi_0$  の関係 (Miles, 1960)

このようにして風速分布  $U(y)$  が与えられると、ある wave number  $K$  の波速  $C$  に対して (5.36) 式から  $y_e$  が決まり、重力波では  $C^2 = g/K$  から  $\xi_e$  が分り、これに対して  $\beta$  が求められ波の発達の割合が (5.13) 式から分ることになる。

重力波においては

$$K = g/C^2 \quad (5.41)$$

であり、(5.36) 式から  $y_e = z_0 \exp(C/U_1)$  であるから

$$\xi_e = K y_e = \left( \frac{g z_0}{U_1^2} \right) \left( \frac{C}{U_1} \right)^{-2} \exp(C/U_1) = \Omega \cdot \left( \frac{C}{U_1} \right)^{-2} \exp(C/U_1) \quad (5.42)$$

として無次元の風速分布常数

$$\Omega = g z_0 / U_1^2 \quad (5.43)$$

を用いると、 $\xi_e$  したがって  $\beta$  は  $\Omega$  をパラメーターとして  $C/U_1$  で表わされる。 $\beta$  と  $C/U_1$  の関係は  $\Omega = 3 \times 10^{-3}$ ,  $10^{-2}$ , 及び  $2 \times 10^{-2}$  に対して 図-1.5.3 に示ようになる。

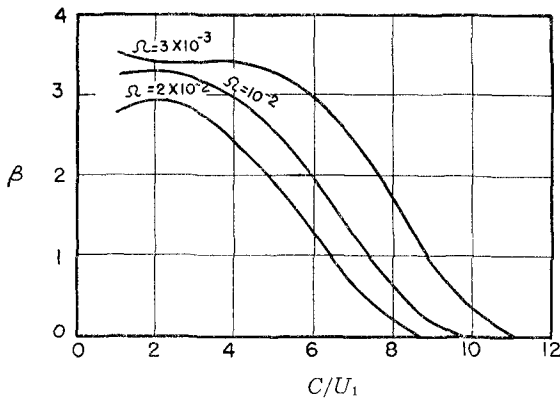


図-1.5.3  $\beta$  と  $C/U_1$  の関係 (Miles, 1960)

( $\alpha \neq 0$  のときは  $U_1$  を  $U_1 \cos \alpha$  とおく)

は  $C/U_1$  と  $\Omega = g z_0 / U_1^2$  によって完全に決ることが分ったが、実際に海面の風として与えられるものは、海面上数 m 又は 10 m 程度の所で測られた平均風速である。これを  $U_\infty$  として表わすと、今迄考えた parallel shear flow  $U(y)$  を生じている境界層のほぼ上縁に近い風速である。したがって  $U_\infty$  を与えられたとき、 $U_1$  及び  $\Omega$  又は  $z_0$  はいかなる値を取るかということが問題となる。これは専ら風速分布自体の問題であるからそれについて簡単に述べよう。

neutral condition における風速分布は、固体壁の粗度をある長さ  $z_0$  で代表させ、摩擦速度  $U_* = (\tau/\rho)^{1/2}$  を用いると、 $U(y)/U_*$  は  $y/z_0$  および  $U_* z_0/\nu$  ( $\nu$  は流体の動粘性係数) の関数として、一般的につきのような関係があることが Nikuradse により見い出されている。

$$\frac{U}{U_*} = \frac{1}{K} \left[ \log_e \frac{y}{z_0} + B_1 \left( \frac{U_* z_0}{\nu} \right) \right] \quad (5.46)$$

$K$  は Kármán の常数で約 0.4,  $z_0$  は粗面の凸凹の約 1/30 の値であるとされる。関数  $B_1$  は 図-1.5.4 に示すように変わる。この図から分るように  $B_1$  は  $U_* z_0/\nu < 0.1$  の場合には近似的に  $\log(U_* z_0/\nu) + 2.2$  で表わされ、また  $U_* z_0/\nu > 10$  では 0 と考えられる。前者の場合を流れが aerodynamically (または hydrodynamically) に smooth であるといい、後者を

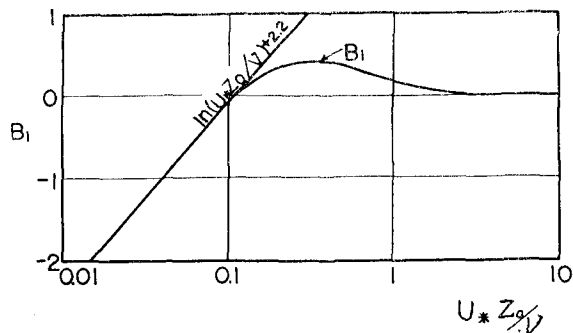


図-1.5.4  $B_1$  と  $U_* z_0/\nu$  との関係 (Nikuradse)

rough であるという。したがって前者の場合は風速分布は roughness length  $z_0$  によらないし、後者の場合は粘性  $\nu$  によらないことになる。われわれの場合はもちろん多くの場合後者が問題である。

実際に  $U_*$  及び  $z_0$  を求めるには、(5.46)式を変形して

$$U = \frac{U_*}{K} \log_e y - \frac{U_*}{K} \log_e z_0 + U_* B_1 \left( \frac{U_* z_0}{\nu} \right) \quad (5.47)$$

$$\text{及び} \quad \frac{1}{K} \log_e \left( \frac{U_* z_0}{\nu} \right) - \frac{B_1}{K} \left( \frac{U_* z_0}{\nu} \right) = -\frac{U}{U_*} + \frac{1}{K} \log_e \frac{y U_*}{\nu} \quad (5.48)$$

となるから、 $y$  に対する  $U$  の分布  $U(y)$  を測定すれば (5.47)式から  $U$  と  $\log_e y$  との関係を示す直線のこう配として  $U_*/K$  すなわち  $U_*$  が求められ、また (5.48)式から右辺の値は既知であるから  $B_1$  の形を仮定して計算すると  $U_* z_0/\nu$  が分り、 $z_0$  の大きさが求められることになる。

このようにして多くの観測値から求められる  $z_0$  の代表的な値は Ellison (1956) によるとつぎのようである。

| 表面の性質                  | $z_0$ (cm) |
|------------------------|------------|
| fully grown root crops | 10         |
| wheat field            | 5          |
| downland (Summer)      | 3          |
| downland (Winter)      | 1.5        |
| short grass            | 0.3        |
| sea in moderate wind   | 0.1        |

このように  $z_0$  の値は表面の状況で変わり、また風速によって変わることもある。特に海面ではそれが著しく海面上の short steep waves の存在に多く影響される。しかし完全に rough な海面で、かつ turbulent wind の場合、水の粘性と表面張力を考えなければ次元的に

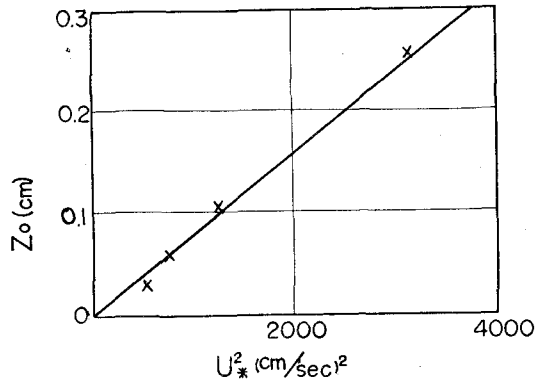
$$U_*^2 \propto \text{const. } g z_0 \quad (5.49)$$

の関係にあるべきことが推定され (Ellison 1956), その一例が図-1.5.5に示されている。この  $z_0$  の正確な測定は困難で  $z_0$  が  $U_*^2$  に比例して増加するという結果 (Van Dorn 1953) や反対に  $U_*^2$  の増加に伴って  $z_0$  が減少するという結果 (Keulegan, 1953) も示されている。しかし現在では (5.49)式の関係が正しく、また  $z_0$  の値も大体 0.1 cm の order であるとされている。

なお  $U_1$  に関しては Sheppard (1958)によると、海面上の風速計で測った風速を  $U_a$  (cm/sec) とすると、大体  $U_1$  は次式で与えられる。

$$U_1 = (U_a/K)(0.08 + 0.00114 U_a)^{1/2} \times 10^{-3} \quad (5.50)$$

図-1.5.5  $z_0$  と  $U_*$  との関係 (Hay, 1954)



Miles は Roll (1948)の観測から水面上 2 m 及び 10 m の高さの風速を  $U_{200}$  及び  $U_{1000}$  とすると大体つぎのような関係で  $U_1$  が見積られるとしている。

$$2.5 U_* = U_1 \div 0.1 U_{200}, \quad (5.51) \quad 2.5 U_* = U_1 \div 0.08 U_{1000} \quad (5.52)$$

このような関係から見ると、 $U_1$  は海面上数 m の風速  $U_a$  の約  $1/9$  位と考えて良いとされる。

結局 Miles は  $z_0$  及び  $\Omega$  に対してつぎのように示している。

(i) aerodynamically smooth flow ( $U_* = 5 \sim 10$  cm/sec 以下) の場合は

風速分布は

$$\left. \begin{aligned} U(y)/U_* &= 5.75 \log_{10}(U_* y/\nu) + 5.50 \\ z_0 &= 1.7 \times 10^{-2} U_*^{-1}, \quad \Omega = 2.7 U_*^{-3} \text{ (c.g.s. 単位)} \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

(ii) moderate wind over wavy layer ( $U_* = 10 \sim 30$  cm/sec 程度) の場合は

$$\left. \begin{aligned} U(y)/U_* &= 5.75 \log_{10} \left( \frac{U_*(y+a)}{\nu a} \right) + 1.85 \\ z_0 &= 7.3 \times 10^{-2} U_*^{-1} \quad \Omega = 1.16 U_*^{-3} \end{aligned} \right\} (5.54)$$

ただし  $a$  は水面における平均波高で,  $y$  は波の crest 上から測る。

(iii) fully developed rough flow ( $U_* \geq 30$  cm/sec 程度以上) の場合は

$$\left. \begin{aligned} U(y)/U_* &= 5.75 \log_{10} (U_* y / \nu) \\ z_0 &= 8 \times 10^{-5} U_*^2, \quad \Omega = 1.25 \times 10^{-2} \end{aligned} \right\} (5.55)$$

上記の (i) (ii) (iii) の分類はそれぞれ前述した  $U_* z_0 / \nu$  による aerodynamically smooth, transient, および rough flow に対応するものである。これらの分類は厳密なものではなく,  $U_* = 30$  cm/s に対して (5.54) 式では  $z_0 = 2 \times 10^{-3}$  cm, (5.55) 式では  $z_0 = 7 \times 10^{-2}$  cm というように大きな不連続がある。

$U_*$  の種々の値に対する  $z_0$  と水面上 2m における風速  $U_{200}$  (cm/s) 及び  $\Omega$  の計算値を示すと次表のようである。ただし  $U_{200}$  は (5.51) 式でなく, (i) (ii) (iii) の各領域について計算したものである。

| $U_*$ (cm/s) | $z_0$ (cm)           | $U_{200}$ (cm/s) | $\Omega$             | 用いた式   |
|--------------|----------------------|------------------|----------------------|--------|
| 5            | $3.4 \times 10^{-3}$ | 110              | $2.2 \times 10^{-2}$ | (5.53) |
| 10           | $1.7 \times 10^{-3}$ | 290              | $2.7 \times 10^{-3}$ | (5.53) |
| 10           | $7.3 \times 10^{-3}$ | 250              | $1.2 \times 10^{-2}$ | (5.54) |
| 30           | $2.4 \times 10^{-3}$ | 850              | $4.3 \times 10^{-3}$ | (5.54) |
| 30           | $7.2 \times 10^{-3}$ | 600              | $1.2 \times 10^{-3}$ | (5.55) |

上述した Miles の理論は現象を二次元運動として表面張力の影響を無視し, 特定の wave number  $K$  の波について発達を考えたものであるが, これに引続き Miles (1960) は Phillips resonance theory における principal stage の重力波の発生を含み, 時間とともに成長して非線型効果が重要となるまでのすべての段階を含む一般的な海面状態の発生を説明するように, この interaction theory を拡張した。

まず波の発生は水面における垂直圧力の変動によるとする本質的な原理にしたがい, また波の発生は空気と波との interaction によるとする原理によって, 水面での圧力分布をつぎの 2 つから成ると考える。

$$p(x, t) = p_0(x, t) + p_1(x, t) \quad (5.56)$$

ここで  $p_0(x, t)$  は波が存在しない場合の圧力分布,  $p_1(x, t)$  は  $\eta(x, t)$  なる波の進行により perturb されて生ずる圧力で,  $\eta$  に直線的に比例するものとする (前は  $p_1$  に相当する圧力は wave number と組み合わされた形として (5.7) 式で与えられているが, ここでは他の影響例えば水の粘性抵抗なども含まれていると考える)。

$p_0(x, t)$  はその振幅が時間と共にゆるやかに変動しながら速度  $V$  をもって進行する圧力分布であるとし, その形をつぎのようにおく。

$$p_0(x, t) = f(t) \cdot \exp\{iK(x - Vt)\} \quad (5.57)$$

$$\text{ただし } |\dot{f}/KVf| \ll 1 \quad (5.58)$$

$p_1(x, t)$  は上述によって

$$p_1(x, t) = -\zeta \cdot \rho_w \cdot C \cdot \eta_t \quad (5.59)$$

とおく。ここで  $\zeta$  は常数,  $C$  は wave number  $K$  の波の波速である。このような圧力分布に response する水面波形の中特に (5.57) 式の圧力変動の移動速度 (convection velocity)  $V$  に近い波速  $C(K)$  をもつ, すなわちこの圧力変動に resonance して起こるような波が重要であることが Phillips によりすでに示されている。したがって水面波形をつぎの形におく。

$$\eta(x, t) = a(t) \exp\{iK(x - Ct)\}, \quad C(K) \doteq V \quad (5.60)$$

ここでも  $a(t)$  は時間とともにゆるやかに変わる関数であり, したがって

$$|\dot{a}/KCa| \ll 1 \quad (5.61)$$

の条件をもつ。この場合波速  $C$  は (5.7) 式と異なり実数である。

このように圧力分布を  $p_0$  と  $p_1$  に分け, また波の速度  $C(K) \doteq V$  という形を仮定したことは Phillips の理論において  $p_1$  を考慮せずに導かれた結果を修正し, 前述の空気と水との interaction の重要性を考慮するととも



に, Phillips の resonance theory の考えも取り入れて, それらの重要度と役割とを検討しようとするからである。なお, いまの場合は現象を  $x$  及び  $y$  方向の二次元運動として取り扱うが, これを三次元的に考えて風速  $V$  とある角度  $\alpha$  をなす方向に進む波に対して拡張するためには, 単に  $V$  を波の方向に対する成分として

$$\mathbf{V} = u(K) \cos \alpha \quad (5.62)$$

とおけばよい。ここで  $u(K)$  は wave number  $K$  をもつ圧力変動の component の移動速度 (convection velocity) である。

現象を ripple を含むごく初期の波から考える必要があり, irrotational な線型運動を仮定すると, 前の式 (5.4) から  $p$  が  $e^{iKx}$  の形をもつから,  $\eta$  に対する運動方程式はつぎようになる。

$$(\rho_w/K)\eta_{tt} + (\rho_w \cdot g + TK^2)\eta = -p \quad (5.63)$$

free wave の波速  $C$  は上式で  $p=0$  とおき

$$C^2 = g/K + (T/\rho_w)K \quad (5.64)$$

となる。(5.57), (5.59), (5.60)式を (5.63)式に代入すると

$$\eta_{tt} - \zeta KC \eta_t + K^2 C^2 \eta = -(K/\rho_w)f(t) \cdot \exp\{i(Kx - Vt)\} \quad (5.65)$$

これが圧力  $p_0 + p_1$  に response する水面波形  $\eta$  を規定する方程式である。この式を初期条件

$$t=0 \quad \eta = \eta_t = 0 \quad (5.66)$$

すなわち初めに静止していた水面の場合について解くとつぎの形で  $\eta$  が求められる。

$$\eta(x, t) = \frac{e^{iK(x-Vt)}}{2i\rho_w C} \int_0^t e^{m(t-\tau)} \{e^{iK(V-C)(t-\tau)} - e^{iK(V+C)(t-\tau)}\} f(\tau) d\tau \quad (5.67)$$

ここで  $C$  が  $V$  に近い場合, すなわち resonance wave の場合, 上式の  $(V+C)$  を含む項の影響は  $t$  が大きくなると  $(V-C)$  の項に比して小さく, したがって  $V \div C$  の条件で上式はつぎようになる。

$$\eta(x, t) \div \frac{e^{iK(x-Vt)}}{2i\rho_w C} \int_0^t e^{\{m+iK(V-C)\}(t-\tau)} f(\tau) d\tau \quad (5.68)$$

(5.67), (5.68)の式では

$$m = \frac{1}{2}\zeta KC \ll 1 \quad (5.69)$$

の条件が入っている。このことは  $\zeta \ll 1$  であることを意味するもので,  $\zeta$  は前に用いた negative damping ratio と全く同じ意味をもち, radian-cycle 当りの波の平均エネルギーの時間的増加を示し,

$$\zeta = \frac{1}{KCE} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (5.70)$$

である。

(5.60)式と (5.68)式を比較すると

$$a(t) = \frac{e^{mt}}{2i\rho_w C} \int_0^t e^{\{m+iK(V-C)\}\tau} f(\tau) d\tau \quad (5.71)$$

すなわち (5.57)式のような wave number  $K$  をもってゆるやかに変動しながら速度  $V$  をもって進行する圧力変動によって水面に生ずる卓越した波の同じ wave number  $K$  の水面波形の振幅は (5.71)式で表わされることが分った。

そこでいま, 実際の圧力変動がそれぞれの wave number  $\mathbf{K}$  に対応する速度  $\mathbf{U}(\mathbf{K})$  をもち, その振幅  $d\tilde{\omega}(\mathbf{K}, t)$  がゆるやかに変わっていくような多くの random component pressure の集合から成ると考えると圧力分布  $p_0$  はつぎのように Fourier-Stieltjes 変換の形で表わすことができる。

$$p_0(\mathbf{X}, t) = \int \exp[i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{U} \cdot t)] d\tilde{\omega}(\mathbf{K}, t) \quad (5.72)$$

ここで  $\mathbf{X}$  は水面での位置ベクトル,  $\mathbf{K}$  は wave number vector である。この圧力分布に response する水面波形はつぎの形を仮定することができる。

$$\eta(\mathbf{X}, t) = \int \exp[i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{U} \cdot t)] dA(\mathbf{K}, t) \quad (5.73)$$

(5.72)式の  $d\tilde{\omega}(\mathbf{K}, t)$  は (5.57)式の振幅  $f(t)$  に対応し, 同様に (5.60)式の  $a(t)$  は (5.73)式から

$$\exp[i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{U})t] dA(\mathbf{K}, t)$$

に対応する。したがって (5.68)式から

$$dA(\mathbf{K}, t) = -\frac{1}{2i\rho_w C} \int_0^t \exp[\{m + iK(V - C)\}(t - \tau)] d\tilde{\omega}(\mathbf{K}, \tau) d\tau \quad (5.74)$$

ここでは (5.62)式と同様の意味で  $\mathbf{V} = u(K) \cos \alpha \div C(K)$  という条件を受けている。この場合  $\alpha$  は決まった風向と  $K$  なる wave number の波の進行方向との角度である。

Phillips と同様に水面波形のエネルギー・スペクトル密度を  $\Phi(\mathbf{K}, t)$  とすると

$$\Phi(\mathbf{K}, t) = \frac{dA(\mathbf{K}, t) dA^*(\mathbf{K}, t)}{dK_1 dK_2} \quad (5.75)$$

$dA^*(\mathbf{K}, t)$  は  $dA(\mathbf{K}, t)$  の共役複素関数で  $dK_1 dK_2$  は  $\mathbf{K}$  平面上の単位面積をあらわし、極座標では  $K \cdot dK \cdot d\alpha$  に等しい。

圧力分布のスペクトルはやはり Phillips より

$$\mathbf{T}(\mathbf{K}, t) = (2\pi)^{-2} \int p_0(\mathbf{X}, t') p_0(\mathbf{X} + \mathbf{r}, t' + t) \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{d\tilde{\omega}(\mathbf{K}, t') d\tilde{\omega}(\mathbf{K}, t' + t)}{dK_1 dK_2} \quad (5.76)$$

(5.74)式を (5.75)式に代入して

$$\Phi(\mathbf{K}, t) = \frac{1}{4\rho_w^2 C^2} \int_0^t \int_0^t \exp[m(2t - \tau - \tau') + iK(V - C)(\tau' - \tau)] \mathbf{T}(\mathbf{K}, \tau - \tau') d\tau d\tau' \quad (5.77)$$

これから最後につぎの形を得る。

$$\Phi(\mathbf{K}, t) = \frac{e^{mt}}{2\rho_w^2 C^2 m} \int_0^t \sinh[m(t - \tau)] \cos[K(V - C)\tau] \mathbf{T}(\mathbf{K}, \tau) d\tau \quad (5.78)$$

かくして圧力変動のスペクトルが与えられると、波のスペクトルも求められることになる。ただしこの式ではやはり  $V \div C(K)$  という条件が入っているから、そのような wave number の附近でこれは成立するものと考えねばならない。

ここで Phillips の定義したような重力波の発達における principal stage を考える。これは Phillips の理論において示したように時間  $t$  が、wave number  $\mathbf{K}$  の圧力変動の成分  $d\tilde{\omega}(\mathbf{K}, t)$  の発達又は持続時間を表わす integral time scale  $\theta(\mathbf{K})$  よりも十分大きくなった時をいうものである。この場合には (5.78)式から  $\Phi$  の漸近式として

$$\Phi(\mathbf{K}, t) \sim \frac{F(t, m)}{2\rho_w^2 C^2} \int_0^\infty \mathbf{T}(\mathbf{K}, \tau) \cos[K(V - C)\tau] d\tau \quad (5.79)$$

$$= (2\rho_w^2 C^2)^{-1} F(t, m) \mathbf{T}(\mathbf{K}, 0) \cdot \theta(\mathbf{K}, C \sec \alpha - u) \quad (5.80)$$

$$\text{ここで} \quad F(t, m) = \frac{e^{2mt} - 1}{2m} \quad (5.81)$$

いま、 $mt$  が小さいとき、 $F(t, m)$  を展開すると

$$F(t, m) = t + mt^2 + \dots \quad (mt \rightarrow 0) \quad (5.82)$$

したがって  $F(t, m) \rightarrow t$  である。

Phillips が導いたスペクトル (4.30)式と較べると、(5.80)式は係数における  $1/\sqrt{2}$  の相異だけで  $mt \rightarrow 0$  の時は (4.30) 式に一致する。

このことから Phillips の考えた principal stage は  $mt$  が小さい段階での圧力変動の直接的作用の下で起こる重力波の初期発生に対応するものと考えることができ、波のスペクトルは時間  $t$  に比例して増加し、 $mt$  の値が次第に増加するとともに Miles の仮定した空気と波との interaction による効果が著しくなり、その後の成長は時間の指数関数として増加することが考えられる。この段階への変移は (5.81)式および (5.82)式により  $mt$  の 1 に対する大きさによって決まるということになる。また、(5.80)式から  $mt \rightarrow 0$  の時は時間  $t$  は初めのスペクトルの形には直接関係がないから、波のスペクトルの形は時間に関係なく、また、それから求められる mean square wave height  $\eta^2$  の値したがって significant wave height は  $F(t, m)$  に比例して増加することになる。

ここで導入された波の発達を示す係数  $m = \frac{1}{2} \zeta KC$  が実際にどのような値になるかを推定してみる。

$\zeta$  は (5.70) 式で示したように波の平均エネルギーの増加率を示すものであるから、 $\bar{E}$  および  $\partial\bar{E}/\partial t$  の値から計算される。

ここで  $\bar{E}$  は波のもつ全エネルギーで平均の kinetic energy の 2 倍であり

$$\bar{E} = \rho_w \cdot K^{-1} \bar{\eta}^2 = \rho_w K^{-2} C \cdot \bar{\eta}^2 \quad (5.85)$$

である。一方  $\partial\bar{E}/\partial t$  は圧力変動により波に供給されるエネルギーで、初めの風速  $U(y)$  から、波のために perturb されて生ずる圧力変動に移るエネルギーと等しい。それは次のように表わされる (Lin, 1955)。

$$\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} = -\rho_a \int_0^{y_0} (\bar{u}w) U'(y) dy = -\rho_a \cdot C \cdot \frac{\pi U_0''}{K U_0'} \bar{v}_e^2 \quad (5.86)$$

したがって (5.85) 式および (5.86) 式と (5.70) 式から  $\zeta$  は次のようになる。

$$\zeta = -S \cdot \frac{\pi U_0''}{K U_0'} \cdot \frac{\bar{v}_e^2}{\eta^2} \quad (5.87)$$

$$\text{ただし } S = \rho_a / \rho_w \quad (5.88)$$

これらの式で  $U_0''$  および  $U_0'$  は

$$U(y_0) = C \quad \text{または} \quad U(y_0) \cos \alpha = C \quad (5.89)$$

を満足するような点  $y_0$  における  $U''$  及び  $U'$  の値を示す。(5.89) の前式は風向と波の進行方向の一致する場合、後の式は  $\alpha$  なる角度をなす場合である。

$\bar{v}_e^2$  は  $y = y_0$  における空気の水直方向の mean square velocity であり、 $\bar{v}_e^2 / \eta^2$  は結局非粘性流体についての Orr-Sommerfeld の方程式を解くことが必要となる。

ここで (5.13) 式と同じ形で

$$\zeta = S \cdot (U_1 \cos \alpha / C)^2 \cdot \beta \quad (5.90)$$

とおいて  $\beta$  を導入すると、 $\beta$  は  $Ky_0 \leq Ky < 2$  の範囲内で近似的に  $Ky_0$  の関数となる。(5.42) 式と同様に (5.89) 式と (5.33) 式とから  $\xi_0 = Ky_0$  と  $C/U_1 \cos \alpha$  との関係はパラメーター  $\Omega = gz_0/U_1^2 \cos^2 \alpha$  によって次の式で関係づけられる。

$$\xi_0 = Ky_0 = \Omega \cdot \frac{1}{(C/U_1 \cos \alpha)^2} \cdot \exp(C/U_1 \cos \alpha) \quad (5.91)$$

図-1.5.2 はこの  $\xi_0$  と  $\beta$  との関係を示したもので、図-1.5.3 は  $C/U_1 \cos \alpha$  と  $\beta$  との関係を  $\Omega$  をパラメーターとして示したものである。

(5.90) 式の  $\zeta$  を用いると、重力波では  $K = g/C^2$  であるから

$$2mt = \zeta K C t = S \cdot \beta \cdot (U_1 \cos \alpha / C)^2 (gt/C) \quad (5.92)$$

となる。

この値の大体を見積るのに Sverdrup および Munk による有義波の関係 (第2章 図-2.2.3) を用いて計算する。この有義波の資料によると海面上約 10 m の高さでの風速  $U$  と吹送時間  $t$  および有義波の波速  $C$  について、無次元量として  $gt/U$  に対する  $C/U$  が与えられており、 $gt/U = 10^5$  および  $10^4$  に対して  $C/U$  はそれぞれ 1~0.5 および 0.5 となっている。したがって、いま  $U_1 = \frac{1}{9}U$  とし、 $\Omega = 10^{-2} \sec^2 \alpha$ ,  $S = \rho_a / \rho_w = 1.2 \times 10^{-3}$  として  $C/U_1$  に対する  $\beta$  の値を図-1.5.3 からよみとって計算すると次表のようになる。

| $gt/U$ | $C/U$ | $C/U_1$ | $\alpha$   | $\beta$ | $2mt = \zeta C t$ | $F(t.m)/t$ |
|--------|-------|---------|------------|---------|-------------------|------------|
| $10^5$ | 1     | 9       | $0^\circ$  | 0.19    | 0.28              | 1.14       |
| $10^5$ | 0.5   | 4.5     | $0^\circ$  | 2.8     | 33                | $10^{13}$  |
| $10^5$ | 0.5   | 4.5     | $45^\circ$ | 1.1     | 6.5               | $10^2$     |
| $10^4$ | 0.5   | 4.5     | $0^\circ$  | 2.8     | 3.3               | 8          |

これから角度  $\alpha$  が  $45^\circ$  の場合と  $0^\circ$  の場合についてのエネルギー増加の程度が著しく異なり、實際上  $45^\circ$  の方向についての増加は無視しうることがわかる。また吹送時間の 1 桁の相異はエネルギー増加については著しい影響のあること、また風速と波速の比についても同様な傾向が見られることがわかる。

Miles はこのようにして求められた結果を実測値で確かめるために (5.90) 式の  $\beta$  の比較を行なっている。実際の観測においては、多くの wave number の波の重合による平均的な結果が観測されているのであるから、

計算値から平均的な  $\beta$  を求めて実測によるものと比較することになる。

このためまず  $\beta$  によるエネルギーの増加への寄与の式から考えると, (5.90), (5.70)式および (5.85)式から

$$\begin{aligned}\partial E/\partial t &= \zeta K C \bar{E} = \rho_a U_1^2 [C \cdot \beta \cdot K^2 \bar{\eta}^2 \cdot \cos^2 \alpha] \\ &= \rho_a U_1^2 \int_0^\infty \int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2} C \cdot \beta \cdot K^2 S(K, \alpha) \cdot \cos^2 \alpha \cdot K \cdot dK \cdot d\alpha\end{aligned}\quad (5.93)$$

となる。ここで  $S(K, \alpha) K dK d\alpha$  は wave number が  $K - \frac{1}{2} dK$  と  $K + \frac{1}{2} dK$  および方向が  $\alpha - \frac{1}{2} d\alpha$ , と  $\alpha + \frac{1}{2} d\alpha$  の間の波による total mean square elevation  $\bar{\eta}^2$  への寄与を示すもので,  $S(K, \alpha)$  は mean square elevation の spectrum すなわち通常のエネルギースペクトルを意味する (この  $S(K, \alpha)$  を用いると mean square slope spectrum (すなわち  $(\partial \eta / \partial x)^2$  の分布を示すスペクトル) は  $K^2 S(K, \alpha)$  で与えられる)。また  $-\frac{1}{2}\theta_0$  および  $\frac{1}{2}\theta_0$  は角度  $\alpha$  の限界を示す。平均の  $\beta$  を  $\beta_E$  とすると (5.93) 式から

$$\partial E/\partial t = \rho_a U_1^2 \beta_E \int_0^\infty \int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2} C \cdot K^2 \cdot S(K, \alpha) \cos^2 \alpha \cdot K \cdot dK \cdot d\alpha \quad (5.94)$$

$$\text{したがって, } \beta_E = \int_0^\infty \int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2} C \cdot \beta \cdot K^2 \cdot S(K, \alpha) \cos^2 \alpha \cdot K \cdot dK d\alpha / \int_0^\infty \int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2} C \cdot K^2 \cdot S(K, \alpha) \cos^2 \alpha \cdot K dK d\alpha \quad (5.95)$$

ここで  $S(K, \alpha)$  として Neumann スペクトル

$$S(\omega, \alpha) d\alpha d\omega = N \cdot \omega^{-6} \exp(-2g^2/\omega^2 U_a^2) d\alpha d\omega \quad (5.96)$$

を用いる。  $N$  は常数である。すると

$$K^2 S(K, \alpha) K dK d\alpha = M \cdot \exp\{-2(C/U_a)^2\} dC d\alpha \quad (5.97)$$

となる。  $M$  は常数である。したがって (5.97)式を (5.9)式に代入して  $x = C/U_1 \cos \alpha$  とおくと

$$\beta_E = 4(U_1/U_a)^2 \int_0^\infty x \beta(x) f_E \left[ \left( \frac{U_1}{U_a} \right)^2 \cdot x^2, \theta_0 \right] dx \quad (5.98)$$

ここで  $f_E$  は次の形の関数である。

$$f_E(u, \theta_0) = \int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2} \exp(-2u \cos^2 \alpha) \cos^4 \alpha \cdot d\alpha / \int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2} \cos^2 \alpha d\alpha \quad (5.99)$$

$\theta_0$  が 0 および  $\pi$  の場合は  $f_E$  はそれぞれ

$$f_E(u, 0) = e^{-2u} \quad (5.100)$$

および

$$f_E(u, \pi) = e^{-u} \left[ I_0(u) - \left( 1 + \frac{1}{2u} \right) I_1(u) \right] \quad (5.101)$$

ここで  $I_0$  および  $I_1$  は変形された 0 次および 1 次の Bessel 関数である。かくして例えば  $\Omega = 10^{-2}$  とし, 又  $U_a/U_1 = 9$  として (5.98) 式を数値積分すると  $\theta_0 = 0$  および  $\pi$  に対して  $\beta_E$  の値はそれぞれ 1.24 および 1.05 となる。また  $(U_1/U_a)^2 \beta_E$  はそれぞれ  $1.5 \times 10^{-2}$  および  $1.3 \times 10^{-2}$  である。すなわち  $\beta_E$  および  $(U_1/U_a)^2 \beta_E$  の値はそれぞれこれらの間の値を取ると考えられ, これは Sverdrup および Munk による実測値に基づく  $S = 0.013$  に近い (第 2 章第 2 節参照)。

また Lin によると energy の増加  $\dot{E}$  は波速  $C$  と摩擦抵抗  $\tau$  との積  $\tau C$  であらわされる。したがって風の方  
向については  $\partial E/\partial t = \tau C / \cos \alpha$  となる。これから  $\tau = \frac{\cos \alpha}{C} \cdot \frac{\partial E}{\partial t}$

したがって (5.94)式から平均の摩擦抵抗に対応する  $\beta$  を  $\beta_T$  とすると,

$$\tau = \rho_a U_1^2 \beta_T \int_0^\infty \int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2} K^2 S(K, \alpha) \cos^3 \alpha \cdot K dK d\alpha \quad (5.102)$$

したがって

$$\beta_T = \int_0^\infty \int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2} K^2 \cdot \beta \cdot S(K, \alpha) \cos^3 \alpha \cdot K dK d\alpha / \int_0^\infty \int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2} K^2 S(K, \alpha) \cos^3 \alpha \cdot K dK d\alpha \quad (5.103)$$

ここで前と同様に Neumann スペクトルを  $S(K, \alpha)$  に用い, (5.97) 式を代入して計算すると (5.103) 式から

$$\beta_T = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{U_1}{U_a} \int_0^\infty \beta(x) f_T \left[ \left( \frac{U_1}{U_a} \right)^2 \cdot x^2, \theta_0 \right] dx \quad (5.104)$$

となる。ここで

$$f_T(u, \theta_0) = \frac{\theta_0 + \sin \theta_0}{4 \left\{ \sin \frac{\theta_0}{2} - \frac{1}{3} \sin^3 \left( \frac{\theta_0}{2} \right) \right\}} f_E(u, \theta_0) \quad (5.105)$$

前と同様に  $\Omega = 10^{-2}$ ,  $U_a/U_1 = 9$  とすると  $\theta_0 = 0$ , および  $\pi$  に対して  $\beta_T = 0.90$  および  $0.75$  であり,  $(U_1/U_a)^2 \beta_T$  は  $1.1 \times 10^{-2}$  および  $0.9 \times 10^{-2}$  である。この値は Van Dorn および Munk (1955) による実測値からの値  $0.6 \sim 1.8 \times 10^{-2}$  と近似している。このようにしてこの理論による値は現実の観測と極めて良い一致を示す。

このようにして Miles の与えたスペクトル (5.80) 式は重力波の初期の発生から十分に波高が成長し、非線型性が無視できなくなり、wave components の間の interaction が卓越してくるまでのすべての段階を包括する理論として、最も合理的な波の発生機構の説明を与えるものと考えられている。しかし実際にこれを適用するに当たっては、前述したような風速分布に関する  $z_0$  したがって  $\Omega$  の値の推定のための知識が乏しく、(5.80) 式における圧力変動のスペクトル  $T(K, 0)$  と integral time scale  $\theta(K)$  の正確な知識が得られないことから、実際の波の推定にまで発展することは現在の段階では困難である。

## 第2章 風波の発達に関する実際的研究

前章に述べた理論的な波の発生機構の研究においては、現象の記述はすべて方程式を線型化することによって数学的取り扱いを容易にし、風の波に対する作用についてできるだけわずかの仮定を設けることによって有効な結論に到達している。Miles の理論はその最も成功した成果であった。それは実際の風速の鉛直分布が neutral condition では対数分布であること、風の乱れはそれを維持するための間接的な作用をもつのみで、そのような parallel shear flow の下を進行する波とそれによる shear flow との間の相互作用によって風から波にエネルギーが移動することを仮定したものであった。この成果に到達するまでに一貫して取られた仮定は、水の運動は irrotational motion であり、風の波に対する作用は波面に対する垂直応力のみが支配的であるということ、せん断応力は2次のものかまたはほとんど省略できるものとしていることである。

Kelvin-Helmholtz および Jeffreys の初期的研究の段階においては水面波形は単一周期の正弦波として簡単化され、また現象を2次元的に限っている (Jeffreys は3次元的な運動を考えたが、これは本質的なものではない) が、以後の研究では、実際の現象に近い、波の randomness を考慮して、エネルギー・スペクトルの取り扱いに進んでいる。このように理論的研究においては運動方程式の線型化、irrotational motion、風の作用における垂直圧力と interaction および波の randomness という要素が、最も基本的な条件として入っている。

一方実際の研究においては、波の微小振幅の考え方には最初から拘束されることがなく、むしろ有限振幅波の考えを強く取り入れ、波の発達にはもっぱら風によるエネルギー供給と波によるその消失とのバランスにおいて考察される。風の波に対する作用はその鉛直圧力と同時に切線応力が考慮され、それによるエネルギー伝達的方式に考慮が払われている。波の不規則は計算に入れることがなく、Sverdrup および Munk においては significant wave, Neumann では3つの Hauptwellen,  $\beta_m$  wave,  $\beta(1)$  wave および  $\beta_m^*$  wave に対して正弦波形が仮定され、また、もちろん3次元的な考察はなされない (Darbyshire の研究においては、もっぱら観測に対する curve fitting の方法が取られ、波の発達に関する物理的考察はほとんどなされない)。

このように原理的研究とは本質的に異なった方法が取られており、その結論も現在の原理的研究の成功の上に立って見るとき、必ずしも満足できない点はあるが、多くの実際的資料の集積の上に築かれたものであることの結果として、実際現象と大きな背馳をきたすことがなく、理論的に多少の疑問ないしは非合理性を含みながら、実用上有効な手段を提供している。

わが国における実際の研究は明治の中、後期から始まった港湾修築上の必要から沿岸における波の大きさを実測した推定することから始まり、観測値に基づく経験的方法が取られ、波高は風速の2乗あるいは2.5乗などに比例するというような経験公式が簡単な形で提出された。あるいは諸外国で提案された公式の応用が試みられるなど普遍的な法則を得るにいたらなかった。これは波の観測の至難さと不規則な波形に対する処理の方法が明確でなかったことなどによるものと考えられる。その他昭和10年前後にドイツで開発された実体写真観測法による日高博士の研究も残されたが、遂に系統的あるいは理論的な結論を得るまでにいたらずして第2次世界大戦

に入った。

欧米においては Stevenson, Cornish, Schumacher など多くの研究者によって継続的な研究が続けられ、実用公式として多くの経験公式が提出されていたが、やはり普遍的に用いられるものがなかなか作られなかった。しかし第2次大戦を契機として主として戦略上の目的から米英協同の組織的な波の予知研究が開始され、1947年にその成果としての Sverdrup および Munk の研究が発表された。これはわが国の工学者、研究者にとってはまことに衝撃的な程、斬新なもので、従来理論的な取り扱いは不可能ではないかというほどその研究方法に行き詰まっていた研究者達に、その困難な問題に取りつくための光を投げたものであった。その後この方法は Bretschneider によって充実発展せしめられ、実用的にはほとんど完璧なものと考えられるまでにいたった。

引き続いてドイツの G. Neumann の研究が発表され、また、英国の Darbyshire の研究も発表された。こうした実際的な研究はその性質上具体的な要請に応じて作られたものであり、その研究方式は必ずしも理論的である必要はなく、できるだけ現実即したものであり、結果が実用上の要求を満足すればその大部分の目的を達したことになる。このような点からも理論的な完全さを求めることはできないものであるが、こうした実際的な研究が、理論的な研究への手がかりと重要な基礎となっていることは、本章に述べる Neumann の研究においても明らかであり、それは理論的研究への不可欠の段階ともいえよう。

原理的な方法においてもそうであるが、実際的な研究においてはとくに、波の成長の過程は常に風からのエネルギー供給と波におけるその消費との balance において考察されるもので、とくに前者は最も基礎的な役割を果たすものとなる。したがって本章ではまず風の海面に対する作用について簡単に述べ、以下順次 Sverdrup および Munk, Darbyshire, Neumann の順に研究の概略を述べることにする。

## 1. 水面に作用する風の力

第1章第1節に述べたように、波の potential motion に直接寄与する力は水面に作用する風の垂直応力であり、原理的方法においては常にこの立場が明らかにされ、また維持されていることはすでに理解されているとおりである。波が重力波として風の作用のみで成長する段階（波の砕けあるいは相互作用による成長を考慮する必要のない段階）では、少なくとも切線応力の効果は除外するのが適当と考えられるが、実際的方法においては風による垂直応力と切線応力の作用が同時に有効であるとして考慮され、あるいはかなりそれが強調されている。ここでは必ずしも波は線型とは限定しないで、風による発達段階からうねりに入るまでのすべての過程を説明しようとするものであり、さらに実際の海面の混乱した形を正弦波におきかえて取り扱おうとするものであるから、波の重合の影響や砕け、あるいは相互作用などの効果をすべて風からのエネルギー供給と粘性によるその消費との2つのエネルギー系の中に含んで説明することとなり、したがって切線応力の効果もまた取り扱い上考慮に入れることもやむを得ないと云うことができる。

風が波のある水面を吹送するとき、水面に対する摩擦力  $\tau$  は一般に摩擦係数  $C_D$  を用いると、次の形で表わされる。

$$\tau = \rho_a \cdot \frac{C_D}{2} \cdot U^2 \quad (1.1)$$

ここで  $\tau$  は水面の単位面積における平均の摩擦力を示し水平抗力またはせん断抵抗などともいう。 $C_D$  は無次元定数で、摩擦係数または抗力係数ともいい、 $C_D/2$  を  $C_D$  で示したり、また  $\gamma^2$  という係数で示したりする。 $\tau$  を摩擦力と呼ぶときは  $\gamma^2$  を用いることが多いようである。 $\rho_a$  は空気の密度、 $U$  は平均風速で、水面からある高さにおける値を用いる。

この摩擦力  $\tau$  とその係数  $C_D$  とは水面の粗度と風の乱れの程度で決まり、とくに風波を対象とするときは波の発達程度によって変わり、その明確な性質は未だ完全には知られていない。

$\tau$  は風の水面への垂直応力による効果と水面に平行な切線応力による効果との2つに分けられる。そのそれぞれを分けて示すと、(1.1)式は次のようになる。

$$\tau = \tau_N + \tau_T = \rho_a \cdot \frac{C_a}{2} U^2 + \rho_a \cdot \frac{C_r}{2} U^2 \quad (1.2)$$

ここで  $\tau_N$ ,  $C_a$  および  $\tau_T$ ,  $C_r$  はそれぞれ垂直応力および切線応力に対応するものである。完全な空気の poten-

tial flow においてはこの値をそれぞれ波長について積分し平均したものは0となるが、実際には空気の乱れによって平均値を取った場合にも0にはならない。そして波の potential motion に直接寄与するものは  $C_a$  によるものであることはすでに述べたとおりである。

実際に  $C_a$  と  $C_r$  とがどのような値を取るかを調べるには、(i) 固定した波の模型を風洞に設けて測る方法 (ii) 風の吹送による  $\tau$  のための水面の傾斜を測って、 $\tau$  の大きさを計算によって求める方法 (iii) 水面上の風速の鉛直分布を測って  $\tau$  を求める方法とが考えられる。

(i)の方法では  $\tau_N$  と  $\tau_T$  したがって  $C_a$  と  $C_r$  が別々に求められるが、前章第5節に述べたように、その値は固定した波面に対するもので、実際の波に対するものとは本質的に異なるので、測定値は必ずしも実際の値を示すものではないことに注意しなければならない。(ii)の方法では実際に近い値が求められるが、 $C_a$  と  $C_r$  とは明確に区別することは困難であり、(iii)の方法ではもちろん両者の方法は区別されないが、最も実際的な方法のように思われる。

(i)の方法は風洞内に種々の縮尺の波型の固定模型を作り、風速  $U$  と波面での圧力分布  $p$  を測定することにより、垂直応力による摩擦力  $\tau_N$  は1波長  $L$  につき

$$L \cdot \tau_N = \int_0^L p \sin \theta ds$$

で計算される。 $\sin \theta$  は波形のこう配  $d\eta/ds$  に等しく  $ds$  は波面に沿って測る。すると  $C_a$  は次式から求められる。

$$C_a = \tau_N / \left( \frac{1}{2} \rho_a \cdot U^2 \right) \tag{1.3}$$

このような方法で Stanton, Marshall, Houghton(1932), Motzfeld(1937) は風洞で Thijssse(1952) は固定波面の上に水を流して  $C_a, C_r$  を測った。これらの方法では模型は固定しており、風洞内の風速分布は実際と異なるという欠点があり、また本質的には前述したように Miles の理論からは重要なものではないということになるが、 $C_a$  と  $C_r$  の比較には有効であろう。Stanton などの実験でははじめ水面に発生する波形を測定し、その結果から波形こう配を 0.12~0.2 と推定し (測定方法の不備からか、この値は過大である) 固定模型の波形こう配を 0.2 として、これに対する空気の流れとその圧力分布を測定したが、その分布の形式のみについて主として考察し、 $C_D$  については論及していない。Motzfeld は 1. 波形こう配 0.05 の正弦波形 2. 波形こう配 0.1 の正弦波形 3. 波形こう配 0.1 のトロコイド波形 4. 波形こう配 1/7.5 で波頂角120°の砕波に近い波形の4種について模型を作り、これを風洞内に固定してその面上および風路内の各点で圧力分布を測定し流線をえがいている。図-2.1.1は波形の模型、図-2.1.2は波形面上での圧力分布、図-2.1.3 (a), (b), (c), (d)は各波形についての圧力分布と流線を示している。これから上述のように  $C_a, C_r$  を計算した結果は表-1.1のようである。この場合風速  $U$  は風路内の模型上の最大風速にとっている。

表-1.1

| 波形   | 波形こう配 | $C_a$   | $C_r$   | $C_a + C_r$ |
|------|-------|---------|---------|-------------|
| No.1 | 0.05  | 0.00085 | 0.00375 | 0.0046      |
| No.2 | 0.10  | 0.0024  | 0.0038  | 0.0062      |
| No.3 | 0.10  | 0.0028  | 0.0035  | 0.0063      |
| No.4 | 0.133 | 0.0195  | 0.0028  | 0.0222      |

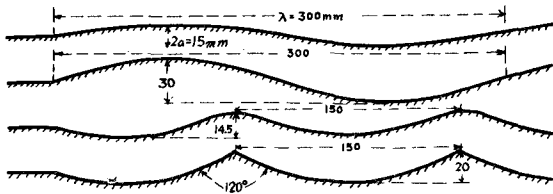


図-2.1.1 固定波形の断面 (Motzfeld, 1937)

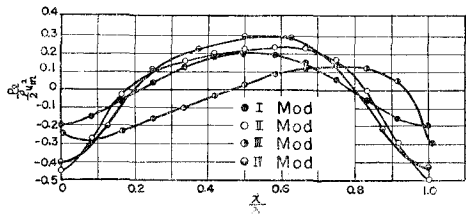
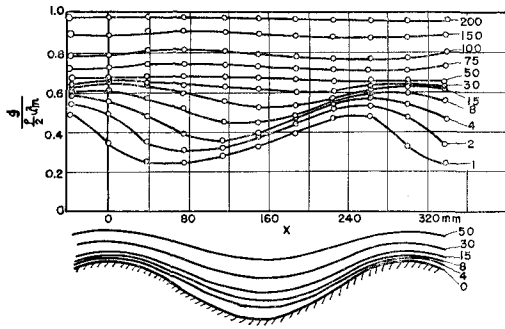
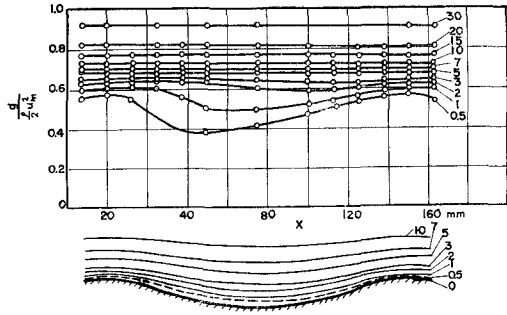


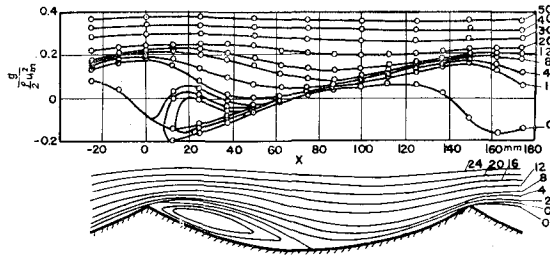
図-2.1.2 固定波形における圧力分布 (Motzfeld, 1937)



(a) Model No. 2



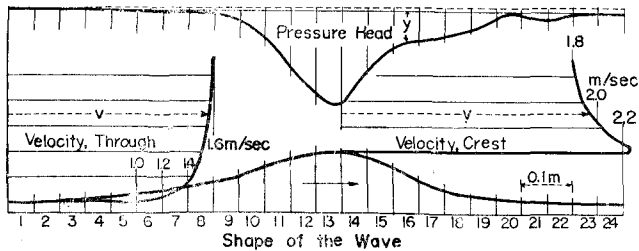
(b) Model No. 3



(c) Model No. 4

図—2.1.3 固定波形上の流線と圧力分布  
(Motzfeld, 1937)

この結果から  $Ca$  は波形こう配が大きくなると著しく増加し、 $Cr$  は大体一定かあるいは小さくなる。特に波頂が鋭くなる影響が  $Ca$  に大きくきいてくる傾向は注目すべきものとされる。Thijssse (1952) はやはり固定波形を設けたが、前者とは波形の上に水を流して流速分布と圧力分布を測った点が異なる。波形こう配は  $1/12$  で



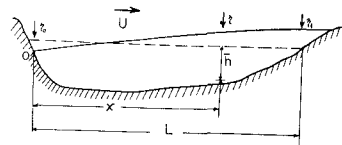
図—2.1.4 固定波形上の圧力分布と流速分布 (Thijssse, 1952)

点は前述したように風速分布が風路内と実際の場合とかなり異なるため、風速  $U$  としていかなる値をとるかが明確に定義されないことである。

(ii) 風の水平摩擦係数  $\tau$  による水面のこう配を測定する方法は実際の海面でもまた風洞水路内でも行なわれる。前者の方法には Van Dorn (1953) および Keulegan (1953) によるものがある。Keulegan は北米のエリー湖の水位変動 (wind tide) の観測記録と風の実測値とを用いて  $C_D$  と同時に海面の roughness 係数  $z_0$  を求めた。その原理は図—2.1.5 に示すように  $x$  軸を風向に沿ってとり、無風時の静水面からの水位の偏差を風上端および風下端でそれぞれ  $\eta_0$  および  $\eta_1$

あるが、同様の条件で水面に起こった波形に模して形は非対称である。図—2.1.4 は波形と波頂および波谷における流速分布と圧力分布を示している。

かくして  $\tau_N$  と  $\tau_T$  とによるエネルギー移動量を算出したが、このときの  $Ca$  は  $0.0052$  となり、表—1.1 の No.3 の約 2 倍になる。この差は波形の非対称によると考えられる。このような実験の欠



図—2.1.5 湖水断面形  
(Keulegan, 1953)



とする。点  $x$  における  $\eta$  に対応して  $x$  軸に垂直な水面の幅を  $B$ , 断面積を  $A$ , 平均水深を  $\bar{h}$  とする。風速  $U$  による水平摩擦力  $\tau$  が水面に作用し, 水底では wind tide による流れに起因する水平抵抗  $\tau_0$  がある。水と空気の密度を  $\rho_w$  および  $\rho_a$  とすると, 流れによる inertia term を無視して平衡状態では次の釣合方程式が得られる。

$$d\eta/dx = (\tau + \tau_0)/\rho g(\bar{h} + \eta) \quad (1.4)$$

また連続の条件から

$$\int_0^L B\eta dx = 0 \quad (1.5)$$

実際の湖では水深や幅は一定でないので全体の平均水深  $h_0$  を

$$h_0 = \frac{1}{B \cdot L} \int_0^L B \cdot \bar{H} dx \quad (1.6)$$

平均幅  $\bar{B}$  を

$$\bar{B} = \frac{1}{L} \int_0^L B dx \quad (1.7)$$

で定義すると, 次の無次元量が導入される。

$$\sigma = \frac{\tau + \tau_0}{\rho g h_0} \cdot \frac{L}{h_0} \quad (1.8), \quad \xi = \eta/h_0 \quad (1.9), \quad \zeta = x/L \quad (1.10)$$

これから (1.4), (1.5) 式は次のようになる。

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = \frac{h_0/\bar{h}}{1 + \xi h_0/\bar{h}} \cdot \sigma \quad (1.11), \quad \int_0^1 \frac{B}{\bar{B}} \cdot \xi d\zeta = 0 \quad (1.12)$$

一般に  $\xi$  は小さい量であるから (1.11) 式は次のように書かれる。

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = \sigma \cdot \frac{h_0}{\bar{h}} \left(1 - \frac{h_0}{\bar{h}} \cdot \xi\right) \quad (1.13)$$

この解は次の形で与えられる。

$$\xi = \sigma \cdot F_1(\zeta) - \sigma^2 \cdot F_2(\zeta) \quad (1.14)$$

$$\text{ここで } F_1(\zeta) = C_1 + \int_0^\zeta (h_0/\bar{h}) d\zeta \quad (1.15)$$

$$F_2(\zeta) = C_2 + \int_0^\zeta (h_0/\bar{h})^2 \cdot F_1(\zeta) d\zeta \quad (1.16)$$

$C_1$  および  $C_2$  は積分常数である。(1.12)式から

$$\int_0^1 (B/\bar{B}) F_1(\zeta) d\zeta = 0 \quad (1.17), \quad \int_0^1 (B/\bar{B}) F_2(\zeta) d\zeta = 0 \quad (1.18)$$

この両式で常数  $C_1$  および  $C_2$  は決まる。一般に  $\sigma$  は小さいから (1.14) 式の第 2 項が省略できる。すると  $x=0$  および  $L$  における  $\eta=\eta_0$  および  $\eta_1$ ,  $\zeta=0$  および 1 を用いて (1.14) 式から

$$\frac{2\eta}{\eta_1 - \eta_0} = \frac{2F_1(\zeta)}{F_1(1) - F_1(0)} \quad (1.19)$$

実際には考える湖について, 地形から  $\zeta$ ,  $F_1$  および  $F_2$  は計算されるから,  $\eta_1$  および  $\eta_0$  の実測値から任意点の  $\eta$  が分かることになる。エリ一湖については  $F_1(0)=-0.641$ ,  $F_1(1)=0.512$ ,  $F_2(0)=0.323$ ,  $F_2(1)=0.118$  であり, これから (1.14) 式により,  $\xi_0=\sigma F_1(0)-\sigma^2 F_2(0)$  および  $\xi_1=\sigma F_1(1)-\sigma^2 F_2(1)$  で  $(\xi_1-\xi_0)=\Delta\xi=\sigma(F_1(1)-F_1(0))-\sigma^2(F_2(1)-F_2(0))=1.153\sigma+0.205\sigma^2$  となる。これから  $\sigma=0.867\Delta\xi-0.134\Delta\xi^2$  となる。したがって  $\Delta\eta=\eta_1-\eta_0$  とすると,

$$\frac{\tau + \tau_0}{\rho g h_0} \cdot \frac{L}{h_0} = 0.867 \frac{\Delta\eta}{h_0} - 0.134 \left( \frac{\Delta\eta}{h_0} \right)^2 \quad (1.20)$$

$$\text{ここで } \tau_0 = n\tau \quad (1.21)$$

と置いて

$$\tau = \frac{1}{1+n} \left[ 0.867 \frac{\Delta\eta}{h_0} - 0.134 \left( \frac{\Delta\eta}{h_0} \right)^2 \right] \cdot \frac{h_0}{L} \cdot \rho g h_0 \quad (1.22)$$

また、
 
$$\tau = \frac{\rho_a}{2} \cdot C_D \cdot U^2 \tag{1.23}$$

において (1.22) 式と風速  $U$  とから  $C_D$  が計算される。この際風速  $U$  の値の取り方が問題であるが、Keulegan はこの点に十分の注意を払い、エリー湖の東、西および南岸の 2 カ所合計 4 カ所の市街地で測られた風速を、市街地の粗度係数  $z_0=1$  呎を推定した上で、これを standard height 1500 呎での高さの風速に直し、さらにこれを湖上の standard height 25 呎の高さの風に換算し、その風速を用いて 4 カ所の風向風速の変化をエリー湖の主軸方向の effective wind speed に直した上で、水面上 25 呎での平均風速として採用し  $U$  として用いている（この際水面上の粗度係数を  $z_0=0.3$  cm と仮定している）。かくしてエリー湖上を通過した 22 コの storm に対して計算された  $C_D$  とそれに対応する  $U$  (knot) を示すと表-1.2 のようになる。 $C_D$  の総平均は 0.00508 である。

表-1.2
 

| No. | $U$ (mph) | $C_D(\times 10^3)$ | No. | $U$ (mph) | $C_D(\times 10^3)$ | No. | $U$ (mph) | $C_D(\times 10^3)$ |
|-----|-----------|--------------------|-----|-----------|--------------------|-----|-----------|--------------------|
| 1   | 50.5      | 4.26               | 9   | 33.1      | 3.56               | 17  | 38.8      | 5.28               |
| 2   | 31.4      | 5.74               | 10  | 34.3      | 5.42               | 18  | 35.7      | 5.92               |
| 3   | 38.3      | 5.56               | 11  | 45.1      | 5.04               | 19  | 40.4      | 6.44               |
| 4   | 48.1      | 4.34               | 12  | 47.4      | 4.88               | 20  | 19.5      | 5.36               |
| 5   | 40.1      | 5.46               | 13  | 27.2      | 4.70               | 21  | 34.2      | 5.98               |
| 6   | 38.9      | 5.26               | 14  | 26.1      | 4.30               | 22  | 35.7      | 5.54               |
| 7   | 34.7      | 5.52               | 15  | 22.1      | 3.06               |     |           |                    |
| 8   | 43.2      | 4.46               | 16  | 31.3      | 5.76               |     |           |                    |

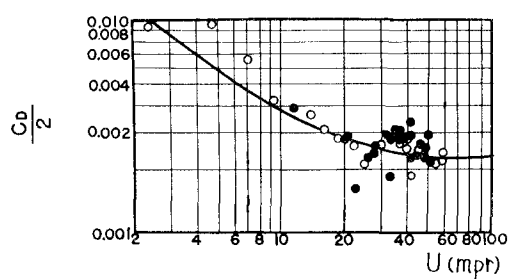


図-2.1.6 風速と摩擦係数の関係  
 (Keulegan, 1953)

$$1 / \sqrt{\frac{C_D}{2}} = 5.75 \log \frac{z}{z_0} \tag{1.25}$$

において  $z=25$  呎、 $C_D=0.00508$  において  $z_0$  を計算し  $z_0=0.27$  cm を得た。Keulegan は図-2.1.6 に示したような風速による  $C_D$  の減少にはなにも触れていないが、Neumann(1950) は波の発生に対する研究において  $C_D$  が風速について減少する傾向を  $C_D \propto 1/\sqrt{U}$  と表わして用いている。

Van Dorn(1953)は、長さ約230m、深さ 1～2.0 m（平均有効水深 1.85m）の池で風とそれによる吹きよせを測定した。風速は水面上 0.25 m、1.0 m および 10 m の高さで、また水位変動は220 m はなれた 2 点で測っている。この場合水面に起こる波の影響をみるために石鹼水を水面に撒いて波を除いた場合をも測定した。この結果は興味深いもので、図-2.1.7、

図-2.1.6 は  $C_D/2$  の値を風速  $U$  に対して図示したもので黒丸は 表-1.2 の値で、白丸はボスニヤ湾における Pelman の観測値から Neumann が求めたもので、いずれも水面上 25 呎の風速に換算してある。Keulegan はこのときの水面の波については何も述べていない。Keulegan はまた (1.23) 式を  $(U/U_*)^{1/2} = 2/C_D$  の形に書き直し、rough surface に対する風速分布の式

$$\frac{U}{U_*} = 5.75 \log \frac{z}{z_0} \tag{1.24}$$

を用いて

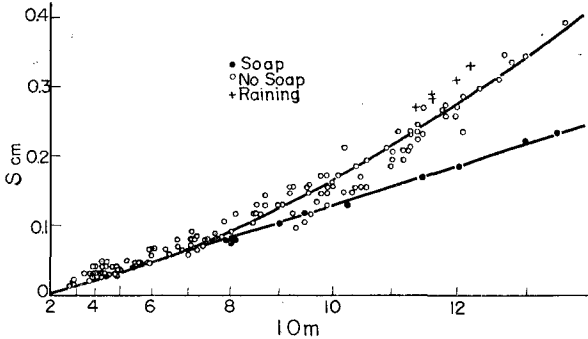


図-2.1.7

2.1.8および2.1.9にその結果を示している。図では水面上10 m における20 分間の平均風速と平均の吹き寄せ高の関係を示すもので、横軸に風速の平方、縦軸に2 点間の水位差を示している。実線は測定値に最も適合する線を目測で引いたもので、これから分かるように波の影響を除いた場合すなわち (1.2) 式における  $\tau_T$  の影響のみと考えられる場合、水位差  $S$  と風速  $U^2$  とは linear な関係にあり、波の存在による  $\tau_N$  の影響は風速が 2~4 m/s 以上になるとあらわれ始める。 $\tau_T$  による水位差を  $S_1$  とすると

$$S_1 = aU^2 \tag{1.26}$$

とおき  $U$  を水面上 1m の風速とし、 $U=10$  m/s に対する  $S_1$  は図から0.28 cm で  $a=0.282 \times 10^{-4} \text{ sec}^2/\text{m}$  となる。いま、かんたんに水深  $h$ 、長さ  $L$  の一様水路と考えると

$$\tau_T = \rho gh S_1 / L = \rho g h a U^2 / L \tag{1.27}$$

であるから係数  $C_r$  は概略

$$C_r = \tau_T / \left( \frac{1}{2} \rho a U^2 \right) = 2 \rho g h a / \rho a L = 0.0039 \tag{1.28}$$

となる。これは Motzfeld の実験値 (表-1.1) と近似している。これに波の影響による水位差を  $S_2$  とすると、全体の水位差は  $S=S_1+S_2$  である。 $S_2$  があらわれる風速を  $V_0$  とすると

$$S_2 = b(U-V_0)^2 \tag{1.29}$$

とおいて、図-2.1.8 で  $U=6$ , および 8 m/s における  $S_2=S-S_1$  を読み取り、それぞれ 0.040, および 0.210 cm を得るから  $b$  および  $V_0$  はそれぞれつぎのようになる。

$$b = 1.71 \times 10^{-4} \text{ sec}^2/\text{m}, \quad V_0 = 4.43 \text{ m/s}$$

こうして前と同様に  $U$  の代りに  $(U-V_0)$  を用いて  $C_a$  を計算すると  $C_a=0.0236$  を得る。すなわち波による  $\tau_N$  の効果は風速約 4 m/s からあらわれ始め、その摩擦係数は、 $\tau_T$  の約 10 倍位になっていることがわかる。

同様な吹き寄せの実験を室内水路で行なった例もある。Francis (1951), Johnson および Rice (1952) などその例である。Francis の実験では水面に風が吹送して波が発生している場合と、風上側で造波機によって波を発生させながら風を吹送させた場合の両方が示されている。それによる結果は表-1.3 のようになっている。

表-1.3

| 風速 (m/s) | 平均波形こう配 | $C_D=C_a+C_r$ |           |
|----------|---------|---------------|-----------|
| 5        | 0.1     | 0.0040        | 風のみの場合    |
| 10       | 0.1     | 0.0150        |           |
| 12       | 0.08    | 0.0200        |           |
| 5        | 0.06    | 0.0052        | 造波機を用いた場合 |
| 10       | 0.10    | 0.0182        |           |
| 12       | 0.09    | 0.0242        |           |

Johnson と Rice の実験も風洞水路で行なったもので造波装置は用いていない。その結果は表-1.4 のようである。

表-1.4

| 風速 (m/s) | 平均波形こう配 | $C_D=C_a+C_r$ | 風速 (m/s) | 平均波形こう配 | $C_D=C_a+C_r$ |
|----------|---------|---------------|----------|---------|---------------|
| 12.4     | 0.15    | 0.0282        | 12.2     | 0.14    | 0.0202        |
| 9.8      | 0.13    | 0.0330        | 12.8     | 0.14    | 0.0190        |
| 10.8     | 0.15    | 0.0372        |          |         |               |

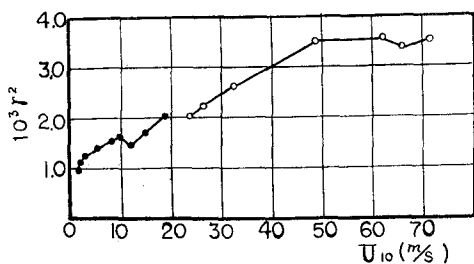


図-2.1.10 摩擦係数と風速の関係(国司, 1962)

うに、特に波形こう配とは関連があると見られない。現在のところでは  $C_D$  に関係するのは short steep wave で、とくに碎波に近い波頂角の大きな波によって  $C_D$  が著るしく増加すると考えられる。したがってたとえ波長が長い flat な波でも、その上に短かい波長の steep な波が重合しているときには大きな  $C_D$  になると思われる。

(iii) 風速の鉛直分布から摩擦力を見い出すのは、すでに本節および前章第5節に述べたように乱流における風速分布が対数法則に従うことを利用するもので、その方法は前章で述べている。いうまでもなくこの方法では  $C_D = C_a + C_r$  が見い出される。

## 2. Sverdrup, Munk (1947) 及び Bretschneider (1959) の研究

Sverdrup および Munk が 1947 年発表した論文は風と波を直接風速と波高によって関連づけようとして成功せず、行きつまりの形となっていた従来の考え方に、多くの点で新しい光を投げる画期的なものであり、その後の研究に貢献する所は極わめて大きいものであった。この研究における最も特徴的な点をあげると、

(i) 不規則な海面状態を表現するために有義波 (Significant wave) を定義した。これは既に普遍的な名称となっているから新たに説明の要はないが、当時としてはまったく斬新な思想で古典的な理論における波形の保存ということから離れて、波を stationary time series の 1 つの現われと見る考えが始めてこの形を取ったものと見られ、多くの成分波の random な重合で、必ずしも微小振幅の波とは限らないものをこのようにかんたんな 1 つの波高、1 つの周期をもつ有義波で代表させることによって、波の発達と減衰の過程を次に述べるようにかんたんな形で取り扱えるものとした。この思想が後に stationary Gaussian wave を見い出す始めになったように思われる。

(ii) この有義波で表わされる波によって始めて、有限または無限の広さをもつ海域における風の吹送によって、波の発達が定常状態 (有限海域) と過渡状態 (無限海域) に分けて考えることができることを示した。ある有限の広さをもった海域を、一定風速の風が吹送し始めたとき、その風上側の端から一定の距離に応じたある時間以後は定常の状態となり、波高と周期は風上端からの距離によってのみ決まり、また無限に広い海域 (風上端からの距離が無限に長い地点) では、一定風速の風の吹送による有義波の波高と周期は時間と共に増加し、その値は風の吹送時間によってのみ決まるとするものである。

(iii) 風速と波の性質は有義波の波形こう配  $\delta$  (wave steepness) とその波齢  $\beta$  (wave age) とによって一義的に決った関係をもつということを見い出した。この波形こう配という概念がこのように波の性質を決定するに重要な基本的な要素であるということの発見は、単に風波の発達の推定に重要であったということにとどまらず、波の性質のすべてが、深海波であれ浅海波であれ、この無次元量にいかにか密接に結びつけられていたかを改めて認識させるに役立ったものである。

有義波の波形を次のような波高  $2a$ 、周期  $T$  とする単一正弦波とする。

$$\eta = a \sin\left(\frac{2\pi}{L}x - \frac{2\pi}{T}t\right) = a \sin k(x - ct) \quad (2.1)$$

ここで  $k = \frac{2\pi}{L}$  ( $L$  は波長)、 $C$  は波速で深海波では  $C^2 = \frac{gL}{2\pi} = \frac{g}{k}$  で与えられる。風速  $U$  の風によってこの波にエネルギーが供給される仕方として、水面に対する垂直応力  $\tau_N$  によるものと、切斷応力  $\tau_T$  によるもの

の両方を考える。

垂直応力  $p$  (ここでは  $\tau_N$  の代りに  $p$  とする) によって、波になされる仕事は、それと水面における水粒子の垂直速度  $w$  の積であらわされるから

$$R_N = -\frac{1}{L} \int_0^L p w dx \quad (2.2)$$

となる。ここで  $w = \frac{\partial \eta}{\partial t}$  であり、 $p$  は第1章1節で述べたように Jeffreys の sheltering coefficient を  $S$  とすると

$$p = \pm S \rho a (U - C)^2 \partial \eta / \partial x \quad (2.3)$$

である。ここで  $S$  は前章 (1.3) 式の  $\beta$  と同じものである。正符号は  $C < U$  の場合であり、負号はその反対の場合である。これから (2.2) 式は

$$R_N = \pm \frac{1}{2} S \rho a (U - C)^2 k^2 a^2 \cdot C \quad (2.4)$$

となる。これが海面の単位面積につき、単位時間に風から波に垂直応力で供給されるエネルギーを表わすことになる。(2.4) 式では  $C < U$  の場合はエネルギーは風から波へ、 $C > U$  の場合は反対に波から風にエネルギーが移り、したがって風速より早い波速をもつ波は成長することがなく減衰してしまうことになる。実際には  $C > U$  の波も存在し発達するのである。それに対する説明として、水面における水粒子自身の水平速度はたとえ  $C > U$  の場合でも  $U$  に較べると小さいことに着目し、切線応力が波に対して仕事をすることができるということが考えられるわけである。

切線応力  $\tau_T$  は、摩擦係数を  $\gamma^2$  とすると (前節では  $C_T = 2\gamma^2$  となる),

$$\tau_T = \gamma^2 \cdot \rho a \cdot U^2 \quad (2.5)$$

で表わされる。この切線応力により水になされる仕事量は、水面の水粒子の水平速度  $u_0$  との積で表わされる。したがって、

$$R_T = \frac{1}{L} \int_0^L \tau_T \cdot u_0 dx \quad (2.6)$$

である。 $u_0$  は (2.6) 式で表わされる波形に対しては、微小振幅においては

$$u_0 = a K C \sin K(x - Ct) \quad (2.7)$$

で表わされる。ただしこれを (2.5) 式に代入して平均値を取ると 0 になり結局全体としては仕事量は 0 である。そこで有限振幅波の理論の第2近似値を考えると、Stokes の質量輸送速度  $v' = a^2 K^2 C^2 \cdot \exp(4\pi z/L)$  なるものが存在することに気付く。すなわち水面の水粒子は毎秒  $a^2 K^2 C^2$  の速度で波の進行方向に進むから、切線応力  $\tau_T$  はこれに対して仕事をすることができる。これと (2.5) 式を (2.6) 式に代入すると、

$$R_T = \gamma^2 \rho a^2 K^2 C \cdot U^2 \quad (2.8)$$

以上の  $R_N$  および  $R_T$  が風から供給されるエネルギーであるが、一方失われるものがあり、これは  $R_T$  と  $R_N$  に較べると極めて小さく波の発達や減衰に対しては negligible な効果しかもたないと考えられる。

波は風によるエネルギー供給が消費される量よりも大きい時にのみ発達する。海面の単位面積についての波のエネルギーを  $E$ 、風から供給される量を  $R_T + R_N$ 、とすると、

(i) 無限に長い水域に一定の風が吹送するときは、すべての場所で常に等量のエネルギーが供給されていると考えられ、波はいたる所同じ割合で波高と波長を増大すると考えてよい。海面上の単位面積についての波の平均エネルギーは  $E = \frac{1}{2} \rho g a^2$  であり、この中の potential energy  $\frac{E}{2}$  が、波速  $C$  をもって進行するものであると考えられる。

$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial x} = 0$  の条件を入れ、エネルギー平衡の条件から次の式が得られる。

$$\frac{dE}{dt} + \frac{E}{C} \frac{dC}{dt} = R_T \pm R_N \quad (2.9)$$

これが過渡状態の波の発達を示す式である。

(ii) 一定風速の風が有限の水域に長時間吹送して、風上側から順次波が発達の極限に到達して定常の状態に

入ったときは、いたる所で、 $\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} = 0$  と考えられるから、エネルギー平衡の条件から

$$\frac{C}{2} \frac{dE}{dx} + \frac{E}{2} \frac{dC}{dx} = R_T \pm R_N \quad (2.10)$$

の式が得られ、これが定常状態での波の発達を示すものとなる。

いま、 $H=2a$ 、として波形こう配  $S=H/L$ 、波齢  $C/U=\beta$  として無次元化して、上の2式を表わすと、それぞれ次のようになる。

$$\frac{d\beta}{dt} = A \cdot g \cdot U^{-1} \cdot \beta^{-2} \frac{1 \pm \alpha(1-\beta)^2}{5+2} \frac{\beta}{\delta} \frac{d\delta}{d\beta} \quad (\text{過渡状態}) \quad (2.11)$$

$$\frac{d\beta}{dx} = 2A \cdot g \cdot U^{-2} \cdot \beta^{-3} \frac{1 \pm \alpha(1-\beta)^2}{5+2} \frac{\beta}{\delta} \frac{d\delta}{d\beta} \quad (\text{定常状態}) \quad (2.12)$$

ここで±の符号は  $\beta \leq 1$  に対応する。また、

$$A = 2\gamma^2 \rho_a / \rho_w \quad \alpha = S/2\gamma^2 \quad (2.13)$$

で  $g$  は重力の加速度である。

(2.11)式および(2.12)式は  $\beta$  と  $\delta$  の関係が決まると解くことができる。

Sverdrup および Munk はここで steepness  $\delta$  と age  $\beta$  の関係について初めて考察を下し、いままで steepness と風速や他の変数との関係を見い出そうとした多くの失敗を wave age と関係づけることによって

初めて成功したものである。多くの観測資料から  $\delta$  と  $\beta$  との関係を plot したものが図-2.1であり、また風から波へ供給されるエネルギーが一部は波高を増加するに用いられ、一部は波速または波長を増加するのに用いられるという。energy sprilt-up の仮定を導入して、最も合理的と考える関係を決めたものが、実線で示したものである。これによると  $\beta_0 \div 0$  のときすなわち、発生初期の波の steepness は  $\delta_0 = 0.0537$  で、 $\beta = 0.407$  において最大の steepness  $\delta = 0.0990$  に達し、 $\beta_1 = 1.0$  すなわち風速と波速の等しい波では  $\delta_1 = 0.038$ 、その後一定の steepness を持つことになる。この考察において、Sverdrup および Munk は、摩擦

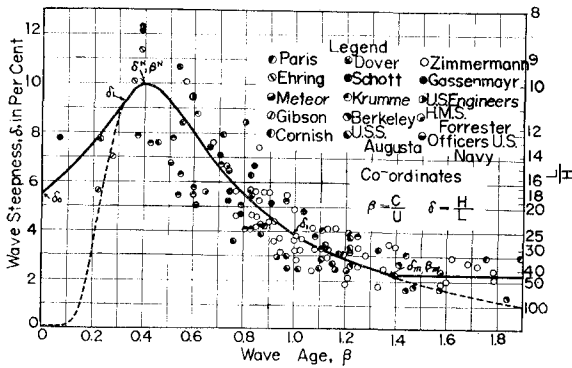


図-2.2.1 Wave steepness と Wave age との関係 (Sverdrup - Munk, 1947)

係数  $\gamma^2$  の値を 0.0026 と取り、 $\alpha = 2.50$ 、したがって、sheltering coefficient として  $S = 0.013$  を得ている。これは Jeffreys の 0.26~0.3 に較べると遙かに小さく、Miles の理論による  $\beta_E$  と近い値になっている。

このようにして  $\delta$  は  $\beta$  の一義的な関数として与えられ

$$\delta = f(\beta) \quad (2.14)$$

が決まる。

(2.11)式および(2.12)式からそれぞれ  $d\beta/d\left(\frac{gt}{U}\right)$  および  $d\beta/d\left(\frac{gx}{U^2}\right)$  が  $\beta$  の関数として与えられるといふことになり、したがって  $\beta = C/U$  は  $gx/U^2$  および  $gt/U$  の関数であり、また、 $\delta = H/L = \frac{1}{2\pi} \frac{gH}{U^2} \left(\frac{U}{C}\right)^2$  として、やはり  $gx/U^2$  および  $gt/U$  の無次元関数として表わされることになる。

$\beta$  と  $\delta$  の関係については、その後、Johnson (1948) その他の人々によってさらに観測値が補なわれ、また Neumann も類似な関係を提出している。これについては観測値のばらつきや解釈によって必ずしも意見は一定していないが、有義波についての無次元波高  $gH/U^2$  と、無次元周期  $gT/2\pi U = C/U$  はともに無次元吹

送距離  $gF/U^2$  および無次元吹送時間  $gt/U$  によって表わされるという事実は、その後 Johnson あるいは Bretschneider によって確かめられ、多くの実測値によって信頼度の高い関係が得られている。

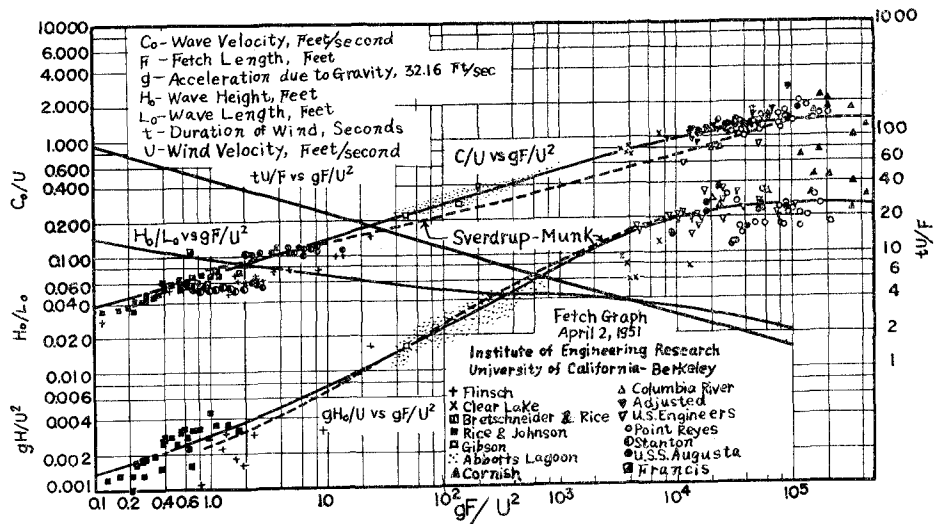


図-2.2.2  $gH/U^2$  etc. と  $gF/U^2$  の関係 (Bretschneider, 1959)

図-2.2.2 は  $gH/U^2$ ,  $gT/2\pi U$  と  $gF/U^2$  との関係を表わしたもので破線は Sverdrup および Munk が初めに与えたもの、実線は Bretschneider がその後の観測値で補正したものである。 $gF/U^2 > 10^3$  の附近の実測値は海洋における観測によるもの、 $gF/U^2 = 10 \sim 10^3$  附近の値は Abbotts Lagoon (米国) での観測値、 $gF/U^2 < 10$  の値は水路実験におけるものである。このように見ると、有義波として見た波は非常に広範囲にわたって、 $gF/U^2$

と関係づけられることがわかる。同様に  $gH/U^2$  および  $gT/2\pi U$  が  $gt/U$  と関係づけられたものが図-2.2.3である。実際には前述したような定常状態における波と過渡状態における波とは別々のものではなく、それは次のように関係づけられる。

風上端 ( $x=0$ ) からの距離  $F$  においては、風速  $U$  の風が  $t=0$  から吹送し始めるときは、先ず過渡状態として波が成長し、ある一定時間  $t=t$  において定常状態に移り以後波は変らない。この  $t$  は、 $t=0$  で  $x=0$  において発生し始めた波が群速度  $C/2$  をもって  $x=F$  に到達するまでの時間と考えられるから

$$t = \int_0^F \frac{dx}{C(x)/2}$$

これを無次元表示すると、

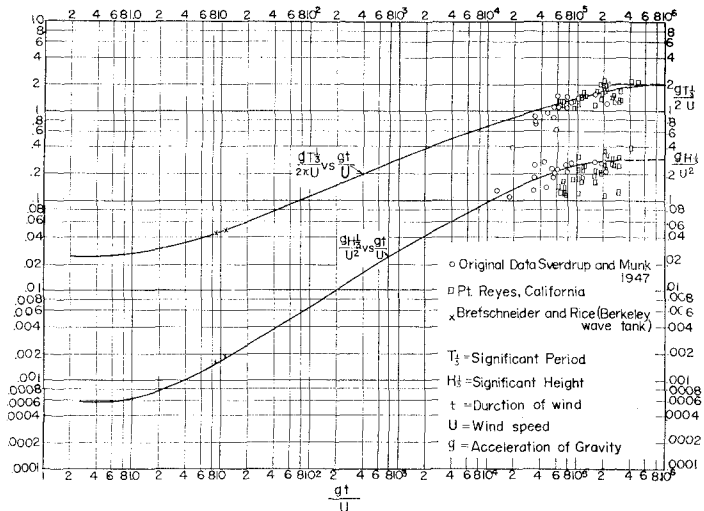


図-2.2.3  $gH/U^2$ ,  $gT/2U$  と  $gt/U$  の関係 (1959)

$$\frac{gt}{U} = \int_0^{gF/U^2} 2 \cdot \left( \frac{U}{C} \right) \cdot d\left( \frac{gx}{U^2} \right) \quad (2.15)$$

したがって、 $gt/U$  は  $U/C$  によって  $gF/U^2$  と関係づけられる。

$gH/U^2$  も  $gT/2\pi U$  もともに対数紙上では、 $10 < gF/U^2 < 10^4$  の範囲内で  $gF/U^2$  と直線的な関係にある。したがって、この範囲内では

$$gH/U^2 = 0.0040(gF/U^2)^{0.40} \quad (2.16)$$

$$gT/2\pi U = 0.085(gF/U^2)^{0.26} \quad (2.17)$$

という関係で近似的に表わされる。日本沿岸での波の推定には一般に  $gF/U^2 = 10^2 \sim 10^4$  の範囲で十分である。 $gF/U^2$  が大きく、約  $10^5$  になると  $gH/U^2$  は 0.282,  $gT/2\pi U$  は 1.95 という値を取ることが Bretschneider によって推定されている。また  $gF/U^2 = 0.1$  の lower limit ではそれぞれ 0.000574, および 0.0247 が与えられている。その間の詳細値はやはり Bretschneider により表示されたものがある（水理公式集 1963）。この関係を計算に便利のように近似式として表わしたものに Wilson (1955) の式がある。

$$\frac{gH}{U^2} = 0.26 \tanh\left(\frac{1}{100} \left(\frac{gF}{U^2}\right)^{1/2}\right) \quad (2.18)$$

$$\frac{gT}{2\pi U} = 1.40 \tanh\left(\frac{4.36}{100} \left(\frac{gF}{U^2}\right)^{1/3}\right) \quad (2.19)$$

これは  $0.1 < gF/U^2 < 10^6$  の全区間において Bretschneider の curve とかなり良く一致している。

このほかに Sverdrup および Munk は同じ論文において、風域から出て減衰域を進行する場合の、うねりの波高減衰と波長増大を波形の進行にともなう風の抵抗によるものとして、 $U=0$  とおき、 $R_T=0$ ,  $R_N = \frac{1}{2} S \rho a K^2 a^2 C^3$  として計算している。この結果、風域の風下端の風波の波高と波長を  $H_F(m)$ ,  $L_F(m)$ , うねりとして進行する距離を  $D(km)$ , そのときの波高と波長を  $H_D(m)$ , および  $L_D(m)$ , 進行するに要する時間を  $t_D(hr)$  とすると次のように表わされる。

$$H_D = H_F \left( \frac{L_F}{L_D} \right)^{1.33} \quad (2.20)$$

$$L_D = L_F + 0.0926D \quad (2.21)$$

$$t_D = 9.62 \sqrt{t_F + 0.0926D} - \sqrt{L_F} \quad (2.22)$$

これらの関係はうねりの推定の実用的な式として用いられる。

前述したようにこの理論においては、切線応力による風から波へのエネルギーの輸送を強調しており、 $R_T$  と  $R_N$  の波の発達に対する寄与は、Sverdrup および Munk の計算では  $\beta=0$  から 0.4 程度まではほぼ同等であるが、 $\beta > 0.4$  の領域に入ると、 $R_T$  の寄与の方が  $R_N$  を凌駕するようになり、 $\beta=1$  では  $R_N \div 0$  となり、その後の波の発達はすべて  $R_T$  によることになる。このような点はすでに述べたように理論的に大きな疑問がある訳で、切線応力によるエネルギーがすべて、波のエネルギーに直接変って行くとは考え難い。このような問題があるにもかかわらず、実測資料の集積から推定された図-2.2.2 の関係は実用上極めて有効な波の予知法となっている。

Bretschneider は Sverdrup および Munk の結果を実際に応用するために、前述のように図-2.2.2 の  $gF/U^2$  に対する  $gH/U^2$  および  $gt/2\pi U$  の空白部分を補足し、実線に示す関係を提案して実用に便ならしめた。有義波は実際海面の不規則な波形分布を単一の波高と周期の正弦波としたものであるから、これを正しく表現するにはエネルギー Spektral を用いるのが最も好都合である。このため Bretschneider (1959) は波高と波長（または周期）の marginal distribution に着目し、波長と波高の間の相関を仮定してエネルギー Spektral を導いた。これをかんたんに述べよう。

海面の一点で測定した連続波形においては波高（波の山から波の谷までの高さ）の頻度分布は一般に Rayleigh 分布をなすことは Longuet-Higgins (1952) その他によって示されている。Bretschneider は米国の太平洋岸メキシコ湾岸における外海の波や内陸の湖沼における波および実験室内の水路における波などについて、またうねりと風浪について、水圧式波高計や階段附抵抗波高計などによる波形記録を用いて、一つ一つの波高と周期を



読み取り、波高および波長について、その頻度を調べた。

ある観測時間内の連続波形における波高周期および波長の平均値をそれぞれ、 $\bar{H}$ ,  $\bar{T}$  および  $\bar{L}$  とする（実際には波形記録からは周期  $T$  のみが読み取られるので、深海波に対する  $L = \frac{gT^2}{2\pi}$  の関係を用い、すべての周期に対する深海波長に直す）。この平均値に対するおのおのの波の比を取り、

$$\eta = H/\bar{H}, \tau = T/\bar{T}, \lambda = L/\bar{L} = T^2/\bar{T}^2 \quad (2.23)$$

とおく。すると次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\eta} = \bar{\tau} = \bar{T} = 1.0, \quad \bar{\eta}^2 = \bar{H}^2/(\bar{H})^2 \geq 1, \quad \bar{\tau}^2 = \bar{T}^2/(\bar{T})^2 \geq 1 \\ \bar{\lambda}^2 = \bar{L}^2/(\bar{L})^2 = \bar{T}^4/(\bar{T}^2)^2 > 1, \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

および  $d\eta = dH/\bar{H}$ ,  $d\tau = dT/\bar{T}$ ,  $d\lambda = dL/\bar{L}$

ここで  $\eta$  および  $\lambda$  の頻度分布を調べると、 $\eta$  も  $\lambda$  もともに近似的に Rayleigh 分布をすることが見出された。

図-2.2.4, 2.2.5 はその一例である。

したがって  $\eta$  に対する確率密度関数は次式のようになる。

$$p(\eta) = \frac{\pi\eta}{2} \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{4}\eta^2\right) \quad (2.25)$$

同様に  $\lambda$  に対しても次の形となる。

$$p(\lambda) = \frac{\pi\lambda}{2} \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{4}\lambda^2\right) \quad (2.26)$$

これから次の関係が得られる。

$$\bar{\eta}^2 = \bar{\lambda}^2 = \frac{4}{\pi}, \quad \bar{\eta}^3 = \bar{\lambda}^3 = \frac{6}{\pi}, \quad \bar{\eta}^4 = \bar{\lambda}^4 = 2 \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \quad (2.27)$$

また平均値に関する standard deviation は、

$$S_\eta = \sqrt{\bar{\eta}^2 - 1}, \quad S_\lambda = \sqrt{\bar{\lambda}^2 - 1} \quad (2.28)$$

波長  $\lambda$  に対する分布から周期  $\tau$  に関する分布は次のように求められる。 $p(\tau)d\tau = p(\lambda)d\lambda$  であり、

また、 $\lambda = a\tau^2$  とすると、

$$p(\tau) = \pi a^2 \tau^3 \cdot \exp\left(-\frac{\pi a^2}{4}\tau^4\right) \quad (2.29)$$

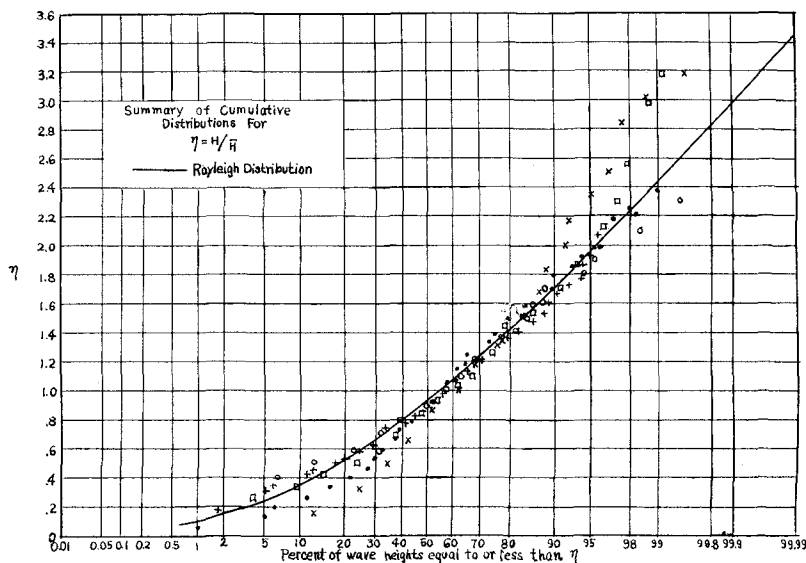


図-2.2.4  $\eta$  の累加分布曲線 (Bretschneider, 1959)

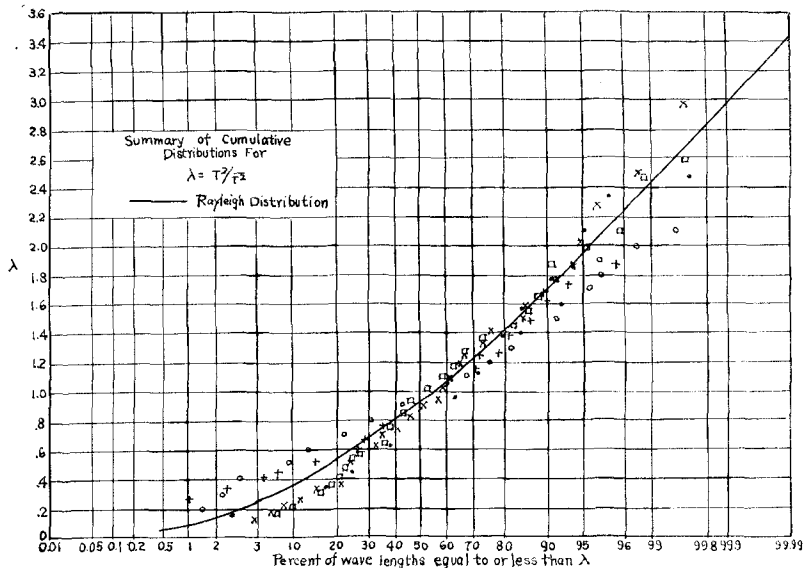


図-2.2.5  $\lambda$  の累加分布曲線 (Bretschneider, 1959)

である。ここで  $\int_0^\infty p(\tau) d\tau = 1$  および  $\int_0^\infty \tau p(\tau) d\tau = 1$  の条件から、

$$a = \frac{1}{\tau^2} = 0.927 \quad (2.30)$$

となる。

これらの関係は  $\eta$  および  $\lambda$  を別々に考えた場合のことであるが、実際に必要なのは、 $\eta$  と  $\lambda$  との関係である。これについても実測値を検討して、Bretschneider は  $\eta$  と  $\lambda$  との間に相関を仮定することにより、joint distribution function を求めた。

いま  $\eta$  と  $\lambda$  との間に linear な関係を仮定し、その相関係数を  $r$  とする。それは次式で表わされる。

$$r(\eta, \lambda) = \frac{\eta\lambda - 1}{[(\eta^2 - 1)(\lambda^2 - 1)]^{1/2}} = 0.86(\eta\lambda - 1) \quad (2.31)$$

いま、 $\eta$  が現われると仮定した場合の  $\lambda$  の現われる確率を  $p_\eta(\lambda)$  とすると、これと  $\eta$  の現われる確率  $p(\eta)$  の積、 $p(\eta)p_\eta(\lambda)$  は、 $\eta$  と  $\lambda$  のある特定の値が同時に起こる確率を示す。これを  $p(\eta, \lambda)$  とすると

$$p(\eta, \lambda) = p(\eta)p_\eta(\lambda) \quad (2.32)$$

である。 $p(\eta)$  は (2.25) 式に示された marginal distribution function である。同じことは次式でも表わされる。

$$p(\lambda, \eta) = p(\lambda) \cdot p_\lambda(\eta) \quad (2.33)$$

図-2.2.6 に示すようなおのおの  $\eta$  と  $\lambda$  との関係を plot した scatter diagram において、ある  $\eta$  について、 $\eta - \frac{\Delta\eta}{2}$  と  $\eta + \frac{\Delta\eta}{2}$  の間にある  $\lambda$  の値を合計し、 $\Delta\eta \rightarrow 0$  の場合の総和を  $S_i(\eta)$  とする。 $S_i(\eta)$  を summation function といい、これは  $\eta$  に対する  $\lambda$  のスペクトルを表わすものとする。この定義を式で表現すると次のようになる。

$$S_i(\eta) = \int_0^\infty \lambda p_\eta(\lambda) d\lambda \quad (2.34)$$

これは (2.31) 式から

$$S_i(\eta) = p(\eta) \int_0^\infty \lambda p_\eta(\lambda) d\lambda \quad (2.35)$$

ここで右辺の積分はある  $\eta$  に対する  $\lambda$  の平均値を表わすもので、結局  $\eta$  についての  $\lambda$  の回帰直線を示すもので

ある。したがって

$$\bar{\lambda}_\eta = \frac{S_2(\eta)}{p(\eta)} = \int_0^\infty \lambda p_\eta(\lambda) d\lambda$$

$$S_2(\eta) = \bar{\lambda}_\eta \cdot p(\eta) \quad (2.36)$$

同様のことが  $\eta$  と  $\lambda$  を入れかえてもいえるので、

$$S_2(\lambda) = \bar{\eta}_\lambda \cdot p(\lambda) \quad (2.37)$$

$\eta$  と  $\lambda$  との回帰直線は  $\eta = \lambda = 1$  を通り、かつ  $\bar{\eta}^2 = \bar{\lambda}^2$  で standard deviation は等しいから

$$\bar{\lambda}_\eta = 1 + r(\eta - 1) \quad (2.38)$$

$$\bar{\eta}_\lambda = 1 + r(\lambda - 1) \quad (2.39)$$

である。したがって (2.34), (2.35) 式から  $\lambda$  の  $\eta$  スペクトルは

$$S_2(\eta) = \frac{\pi}{2} [1 + r(\eta - 1)] \cdot$$

$$\eta \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{4}\eta^2\right) \quad (2.40)$$

また、 $\eta$  の  $\lambda$  スペクトルは

$$S_2(\lambda) = \frac{\pi}{2} [1 + r(\lambda - 1)] \cdot$$

$$\lambda \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{4}\lambda^2\right) \quad (2.41)$$

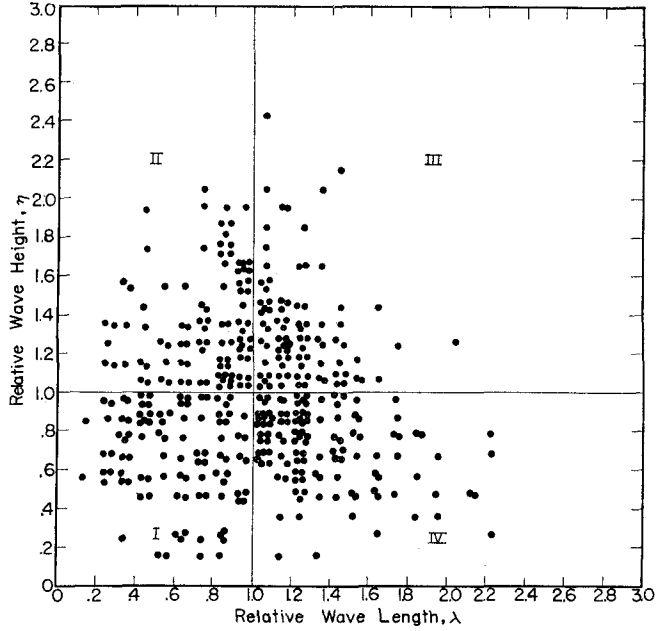


図-2.26  $\eta$  と  $\lambda$  の scatter diagram (Bretschneider, 1959)

$\eta$  の  $\tau$  スペクトルは  $S_\eta(\lambda)d\lambda = S_\eta(\tau)d\tau$ ,  $p(\lambda)d\lambda = p(\tau)d\tau$  および  $\lambda = a\tau^2 = 0.927\tau^2$  の関係から

$$S_\eta(\tau) = 2.7[(1 - r) + 0.927r\tau^2]\tau^3 \cdot \exp(-0.675\tau^4) \quad (2.42)$$

として表わされる。

(2.40)~(2.42)の関係式は mean wave steepness

$$\left[\frac{\eta}{\lambda}\right] = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} S_\eta(\lambda) d\lambda$$

を求める場合や、ある波高  $x$  よりも大きい波高に対する波長の平均値

$$\lambda(\eta_p) = \int_x^\infty S_2(\eta) d\eta / \int_x^\infty p(\eta) d\eta$$

などを求めるのに用いられる。例えば highest 50%の波の周期を  $\tau(\eta_{50})$ , 33%, 10%および maximum wave の周期をそれぞれ  $\tau(\eta_{33})$ ,  $\tau(\eta_{10})$ ,  $\tau(\eta_1)$  とすると、それぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \tau(\eta_{50}) &= \sqrt{1 + 0.42r}, & \tau(\eta_{33}) &= \sqrt{1 + 0.60r} \\ \tau(\eta_{10}) &= \sqrt{1 + 1.03r}, & \tau(\eta_1) &= \sqrt{1 + 1.66r} \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

つぎにエネルギー・スペクトルを考える。

海面上の単位面積における波の全エネルギーはポテンシャルエネルギーの2倍であり、 $\eta^2$  の  $\lambda$  スペクトルは、すべての  $\eta$  を2乗して、 $\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}$  と  $\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}$  の間にあるものの総和を取り、これを  $\Delta\lambda \rightarrow 0$  ならしめたときの極限として定義される。すなわち

$$S_{\eta^2}(\lambda) = \int_0^\infty \eta^2 p(\eta, \lambda) d\lambda \quad (2.44)$$

である。これは(2.34)式と同様に  $\eta^2$  の summation function である。 $p(\eta, \lambda)$  は(2.32)式と同じである。したがって、

$$S_{\eta^2}(\lambda) = p(\lambda) \int_0^\infty \eta^2 p_2(\eta) d\eta \quad (2.45)$$

前と同様に

$$\overline{\eta^2} = \int_0^\infty \eta^2 p(\eta) d\eta \quad (2.46)$$

として

$$S_{\eta^2}(\lambda) = \overline{\eta^2} \cdot p(\lambda) \quad (2.47)$$

ここで  $\overline{\eta^2}$  を求めるために前と同様に,  $\overline{\eta^2} = \overline{\lambda^2}$  で linear な回帰直線を仮定し,  $\overline{\eta^2} = k(\overline{\eta^2})^2$  とおく。 $k$  は常数で  $\eta^2$  の  $\lambda$  スペクトルの下の面積は  $\overline{\eta^2}$  に等しいという条件を用いて決める。すなわち

$$\overline{\eta^2} = \int_0^\infty S_{\eta^2}(\lambda) d\lambda \quad (2.48)$$

これは(2.39)式から

$$\overline{\eta^2} = k \int_0^\infty [1 + r(\lambda - 1)]^2 \cdot p(\lambda) \cdot d\lambda \quad (2.49)$$

これを展開して  $\int_0^\infty p(\lambda) d\lambda = 1.0$ ,  $\int_0^\infty \lambda p(\lambda) d\lambda = \overline{\lambda} = 1.0$ ,  $\int_0^\infty \lambda^2 p(\lambda) d\lambda = \overline{\lambda^2}$ ,  $\overline{\lambda^2} = \overline{\eta^2}$  を考えると,

$$k_1 = \frac{\overline{\eta^2}}{1 + r^2(\overline{\eta^2} - 1)} \quad (2.50)$$

したがって,

$$S_{\eta^2}(\lambda) = \frac{\overline{\eta^2} [1 - r + r\lambda]^2}{1 + r^2(\overline{\eta^2} - 1)} \cdot p(\lambda) \quad (2.51)$$

となる。これが  $\eta^2$  の  $\lambda$  スペクトルで, これから,  $S_{\eta^2}(\lambda) d\lambda = S_{\eta^2}(\tau) d\tau$ ,  $p(\lambda) d\lambda = p(\tau) d\tau$ ,  $\lambda = a\tau^2$  の条件から  $\eta^2$  の  $\tau$  スペクトルは

$$S_{\eta^2}(\tau) = \frac{\overline{\eta^2} [1 - r + ar\tau^2]^2}{1 + r^2(\overline{\eta^2} - 1)} \cdot p(\tau) \quad (2.52)$$

となり, 結局,  $S_{\eta^2}(\lambda)$ ,  $S_{\eta^2}(\tau)$  は次の形で求められる。

$$S_{\eta^2}(\lambda) = \frac{2[1 - r + r\lambda]^2}{1 + 0.273r^2} \cdot \lambda \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{4}\lambda^2\right) \quad (2.53)$$

$$S_{\eta^2}(\tau) = \frac{4a^2 [1 - r + ar\tau^2]^2}{1 + 0.273r^2} \cdot \tau^3 \cdot \exp(-0.675\tau^4) \quad (2.54)$$

これをもとの周期  $T$  および frequency  $\omega$  を用いて示すと, 周期スペクトルは

$$S_H^2(T) = \frac{3.434 (\overline{H})^2 [1 - r + 0.927r \left(\frac{T}{\overline{T}}\right)^2]^2}{1 + 0.273r^2} \cdot \frac{T^3}{(\overline{T})^4} \cdot \exp\left[-0.675 \left(\frac{T}{\overline{T}}\right)^4\right] \quad (2.55)$$

frequency スペクトルは

$$S_H^2(\omega) = \frac{3.434 (\overline{H})^2 [1 - r + 0.927r \left(\frac{2\pi}{\omega \overline{T}}\right)^2]^2}{1 + 0.273r^2} \cdot \left(\frac{2\pi}{T\omega}\right)^4 \frac{1}{\omega} \exp\left[-0.675 \left(\frac{2\pi}{T\omega}\right)^4\right] \quad (2.56)$$

ここで

$$\int_0^\infty S_H^2(T) dT = - \int_0^\infty S_H^2(\omega) d\omega = \overline{H}^2 \quad (2.57)$$

(2.42)式の  $S_\eta(\tau)$  および(2.54)式の  $S_{\eta^2}(\tau)$  を種々の  $r$  について示すと, 図-2.2.7 のごとくになる。

これらの式を用いると, ある観測時刻における平均の波長  $\overline{H}$ , 周期  $T$  がわかれば, スペクトルの形が決まることになる。 $\overline{H}$  は有義波高  $H_{1/3}$  の1.37倍としてすでによく知られており, また  $\overline{T}$  は(2.43)式から  $T_{1/3} = T\sqrt{1+0.60r}$  として示されるから,  $r$  が知られればスペクトルは完全に決まる。

相関係数  $r$  については, Bretschneider は, (i)  $gF/U^2$  が小さい時は  $r \rightarrow +1$ , (ii)  $gF/U^2$  が大きくなるとともに  $r$  は0に近づく, (iii) 深海風波においては  $r$  は常に正である, という仮定と実測値とから  $r$  を  $gF/U^2$  の単調減少関数として次表のように示している。

表-2.1

| $gF/U^2$ | $r$   | $gF/U^2$ | $r$   |
|----------|-------|----------|-------|
| 0.01     | 0.998 | 100      | 0.486 |

|      |       |         |       |
|------|-------|---------|-------|
| 0.10 | 0.979 | 1,000   | 0.220 |
| 1.0  | 0.916 | 10,000  | 0.052 |
| 10   | 0.740 | 100,000 | 0.001 |

こうして  $\bar{H}$ ,  $\bar{T}$  および  $r$  はすべて  $gF/U^2$  の関数として与えられるから、図-2.2.2 あるいは図-2.2.3 から、すべての波の条件についてスペクトルが求められることになる。

(2.54) 式において  $dS_{\eta^2}(\tau)/d\tau=0$  を満足する  $\tau$  の値を  $\tau_{op}$  とすると、 $\tau_{op}$  はスペクトルの peak の存在する optimum period を示すことになる。 $\tau_{op}$  と  $\tau(\eta_{33})$ 、すなわち highest 33% waves の周期（有義波の周期）との比、 $\tau_{op}/\tau(\eta_{33})=\tau_{op}/T_{1/3}$  であり、これは  $r$  の値により変るが、 $r$  が 0~1 の内では  $\tau_{op}/T_{1/3}$  の比は 1.02~1.04 の内にあり、結局有義波の周期はスペクトルの peak を示す周期すなわち最もエネルギー密度の大きい波の周期帯を示すことがわかる。

吹送距離  $F \rightarrow \infty$  の時には  $gH/U^2=0.282$ ,  $gT/2\pi U=1.95$  となるから(2.56)式で  $r=0$  とおくと十分発達した波に対するスペクトルが得られる。これは  $S_H^2(\omega)=\alpha \cdot g^2 \cdot \omega^{-5} \cdot \exp[-0.675(g/1.95\omega U)^4]$  となり、 $\alpha=0.0074$  である。これは  $\omega$  の大きい値に対する前章第4節で述べた(4.40), (4.43)式と完全に一致する。

この方法における見掛けの波高と周期からスペクトルを導びくことは、後に述べる Neumann の方法においても同じであり、これは結局実際の不規則波形が狭い周期帯  $T - \frac{4T}{2}$  と  $T + \frac{4T}{2}$  の間に入る波高を平均しその平均波高を振幅とする正弦波の集合であると仮定することであり、実際の波を random Gaussian waves と解釈する限り妥当と考えられる。Bretschneider の方法では見掛けの波高と波長の間の linear な相関を仮定し、またその相関係数を  $gF/U^2$  の単調減少関数と仮定しているが、実際の data からこれらの関係を確かめることはなかなか困難のようである。図-2.2.8 は風速 20 knot の場合の Bretschneider のスペクトルの時間による発達の状態を示したものである。

### 3. Darbyshire (1952, 1955, 1956, 1959) の研究

Darbyshire は英国の Cornwall 海岸, Irish Sea, Lough Neagh 湖および大西洋での水圧式波高計, air-borne wave recorder, および ship-borne wave recorder などによる観測記録から波のスペクトルを導き、これから波と風の関係について考察している。この方法はまず波形記録を Fourier analyze して図-2.3.1 に示すようなフーリエスペクトルを求め、海面の波はこのスペクトルの peak を振幅とし、対応する周期をもつ単一正弦波の集合と考える。すると  $n$  番目の peak を  $h_n$  とするとその波の単位面積についての全エネルギーは

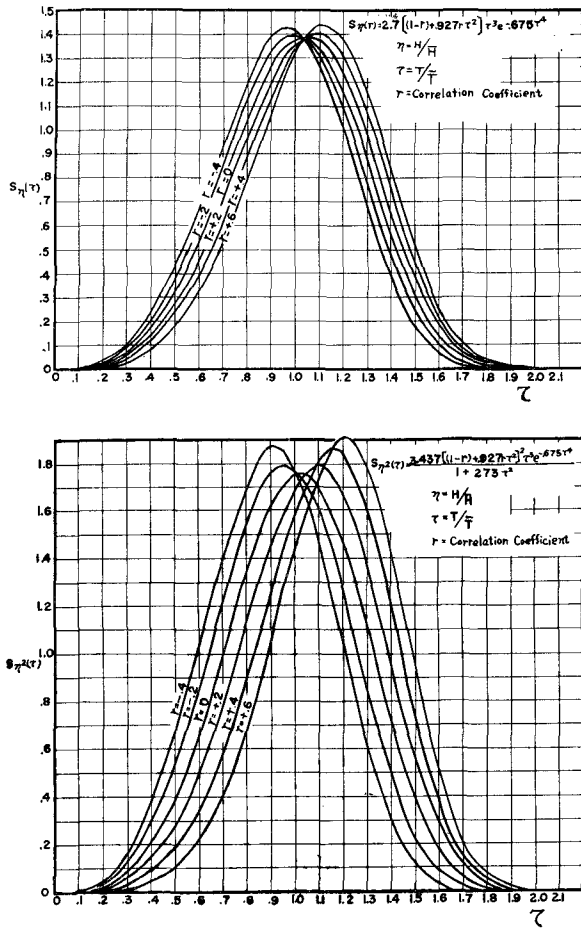


図-2.2.7  $\eta$  及び  $\eta^2$  の  $\tau$  スペクトル (Bretschneider, 1959)

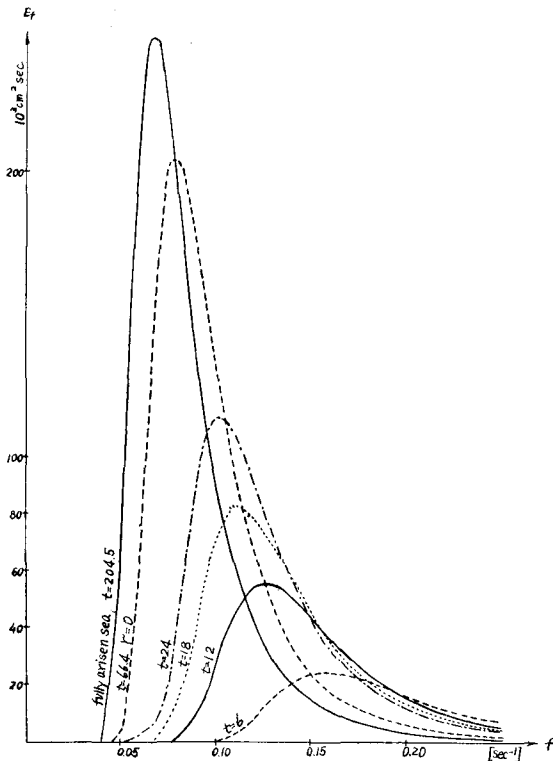


図-2.2.8 風速20ノットにおける Bretschneider スペクトルの時間的発達 (Walden, 1961)

$\frac{1}{8} \rho g \Sigma h_n^2$  であり、それと等しいエネルギーをもった仮定の単一正弦波の波高を  $H$  とすると、 $\frac{1}{8} \rho g H^2 = \frac{1}{8} \rho g \Sigma h_n^2$  として  $H$  が決まり、これがその時の海面の equivalent height となる。このようにして求めた equivalent height と記録に表われた最大の波高  $H_{\max}$  との関係を plot すると 図-2.3.2 のようになり、

$$H_{\max} = 2H \quad (3.1)$$

となっている。同じ考え方でスペクトルの  $(T-1/2)$  秒から  $(T+1/2)$  秒までの間に含まれる全エネルギー  $E_T$  を考え

$$E_T = \frac{1}{8} \rho g \sum_{T-1/2}^{T+1/2} h_n^2 = \frac{1}{8} \rho g H_T^2$$

となるような equivalent height  $H_T$  をおのおのの周期  $T$  に対して求めることができる。 $T$  を 1 秒間隔に切って、component wave height  $H_T$  が算出される (このような考え方は前述の Bretschneider のと類似である)。

このようにして求められた spectrum wave height を取り扱う際に次のような仮定を設ける。

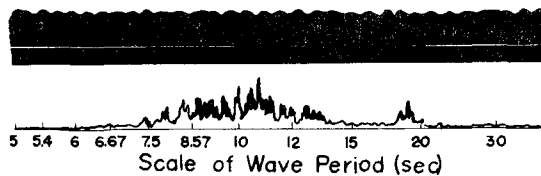


図-2.3.1 波形記録とフーリエスペクトル (Darbyshire, 1952)

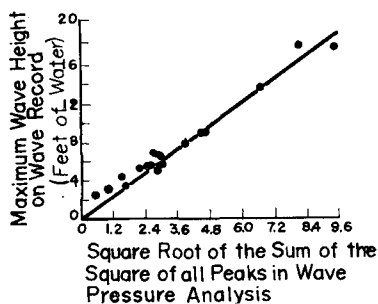


図-2.3.2 最大波高と equivalent wave height の関係 (Darbyshire, 1952)

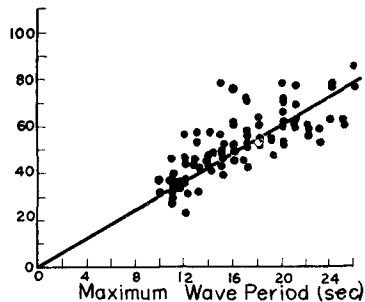


図-2.3.3 最大周期と最大風速の関係 (Darbyshire, 1952)

(i) スペクトルを構成するおのおの component wave の間に interaction がなく、相互にエネルギーの交換はないものとする。

(ii) 風はおのおの wave component に独立に作用するものとする。

第1の仮定は実際上のスペクトルの取り扱いにおいて必要とされる前提で、結局波を linear wave としての範囲で考えることになる。第2の仮定は第1章の第3節および第4節に示したような、風速自体のスペクトルを考へて、特定の wave number についての風と波との関係を調べてこれを重合する方法を取らない限り風速を一様分布と考える場合には、波の発達を論ずる場合やむをえない仮定である。厳密には支持されない仮定であるが、この仮定と類似の方法で計算した前章第5節の(5.95)あるいは(5.98)式が実測と比較して肯定される値を示すことは、必ずしもこの仮定が現実とかけ離れたものではないことを示唆している。

一方風については次のように仮定している。すなわち各 component wave が発達途中で経験すべき風は6時間毎の天気図によって推定する必要があるため、海面上の平均風速は傾度風速の0.6~0.8倍の間にあり、平均して0.66倍であることが観測で示されているので、波と風との関係を求める時は、天気図から求めた傾度風速  $W$  をそのまま用いることにした。

このような仮定を設けると、観測地点を中心として種々の方向に線風域が設けられ、風域図上において周期に対応した波の進行曲線が描かれ、おのおの component wave の成長が論ぜられる。まずスペクトルにおける最大周期の波とそれに対応する最大風速との関係を plot すると図-2.3.3 のようになり、平均的に

$$T_{max}(\text{sec}) = \frac{1}{3} W_{max}(\text{knot}) \quad (3.2)$$

の関係にあることがわかる。同様にして最大の波の周期  $T_{Hmax}$  とその波の経験した平均の風速  $W$  との関係を plot すると図-2.3.4 (a), (b) のようになり、概略

$$T_{Hmax}(\text{sec}) = 0.25W(\text{knot}) \quad (3.3)$$

の関係が見られる。このように最大の周期と最大の風速および最大の波の周期と風速との関係が fetch の長さにあまり関係なく (3.2), (3.3) 式の linear な形で表わされるということは、スペクトルの envelope を与えるために、 $H_T$  を  $T/W$  に対して plot すると、その envelope は常に同じ形をもっており、風速の増加はその curve の vertical scale を変えるだけであろうということが考えられる。すなわち envelope は

$$H_T = f(T/W) \quad (3.4)$$

の形で表わされ、 $U$  は平均風速で  $f(T/W)$  は  $T/W=0.25$  で最大となり、 $T/W=0.33$  ではほとんど0になるような形をもっているものと考えられる。そこで  $H_T = W^n f(T/W)$  と仮定すると  $H_T/T^n = (W/T)^n f(T/W)$  で、 $H_T/T^n$  は  $T/W$  の関数として表わされるはずである。そこで  $n$  の種々の値について実測値を plot して見て、 $n=1$  が最も適当であることを認め、 $H_T/T$  が  $f(T/W)$  と結びつけられるとし、関数  $f$  の形を  $y = ke^{-x^2}$  なる Gauss の分布形とし、

$$H_T/T = 0.44 \exp \left\{ - \frac{(T/W - 0.24)^2}{0.0027} \right\} \quad (3.5)$$

の形を得た。各周期についてこれを示すと図-2.3.5 のようになる。 $H_T/T$  の max. value は 0.44 で、それは  $T/W=0.24$  で起こることになる。

前に定義した equivalent wave height  $H$  は、 $H_T^2 dT$  を 0 から  $\infty$  まで積分して、その平方根を取り、

$$H = 0.027 W^{3/2} \quad (3.6)$$

となる。 $H$  は呎、 $W$  は knot である。

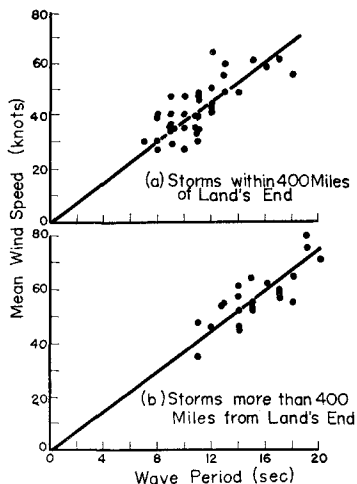
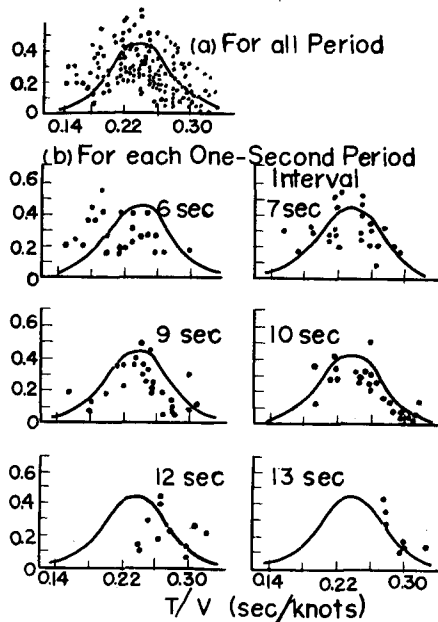


図-2.3.4 最大波の周期と平均風速の関係 (Darbyshire, 1952)



図—2.3.5  $H_T/T$ と $T/W$ の関係  
(Darbyshire, 1952)

(3.5) 式のスเปクトルは fetch の長さが 100 mile 以上の data によるもので、その場合はスเปクトルはほとんど fetch に関係である。しかしそれ以下の fetch の場合には当然その影響が入ってくる。それを (3.5) 式の指数の項に含ませて考えることにし、

$$H_T/T = 0.44 \exp\{-(T/W - \varepsilon)^2/0.0027\} \quad (3.7)$$

とおき、Lough Neagh における実測値から

$$\varepsilon = 0.24 \{1 - \exp(-0.23x^{1/2})\} \quad (3.8)$$

を求めた。 $x$  は fetch の長さ (nautical mile) である。この  $\varepsilon$  は  $x \rightarrow \infty$  で 0.24 となるから、結局有限の fetch に対しては

$$H = 0.027W^{3/2} \{1 - \exp(-0.23\sqrt{x})\} \quad (3.10)$$

が得られる。

ここで用いた equivalent wave height と有義波との関係をつけるために、Barber (1950) の研究結果 (波高の確率分布が Rayleigh 分布をすること) を用いて Darbyshire は次表のように示している。

表 - 3.1

|            |                                                      |                              |
|------------|------------------------------------------------------|------------------------------|
| $H_{mean}$ | 平均波高 (すべての波の平均値)                                     | 1.0                          |
| $H$        | equivalent wave height (実際の海面の不規則波と同じエネルギーをもつ正弦波の波高) | $1.2H_{mean}$                |
| $H_s$      | 有義波高 (1/3最大波高)                                       | $1.6H_{mean}$                |
| $H_{max}$  | 最大波高 (100コの波の中の最高波)                                  | $2.4H_{mean}$<br>or $1.5H_s$ |

また有義波の周期と最大波高を示す波の周期とは近似しているという結果を得ている。

このようにして求められたスเปクトルにおいては、fetch の影響は 100mile 以上になるとほとんど支配的でなくなるという興味ある結論に到達したが、主として水圧式波高計による記録にもとづくものであるため (水深 50呎)、短周期の波は圧力減衰のために消失していると考えられるので、スเปクトルの形においてもまたその面積で示されるエネルギーにおいても過小である恐れがある。そこで Darbyshire (1955) は、ship-borne wave meter を用いて、水面近くで波を測定することによってこのスเปクトルを検討した。

記録は大西洋上で観測船 Weather Explorer によって 1 日 8 回約 1 年間にわたって取られたものを用い、解析の方法は前述と同様の方法によっている。こうして海洋の海について調べてみると (風速は傾度風速を用いている)

(i) Perranporth の場合には最大周期  $T_{max}$  は (3.2) 式に示すように風速に比例しているが、大西洋上では風速の平方根に比例する。

$$T_{max} = 2.3W_{max}^{1/2} \quad (3.11)$$

(ii) Perranporth では最大の波の周期  $T_{Hmax}$  はやはり (3.3) 式のように風速に比例するが、大西洋上では風速の平方根に比例し、

$$T_{Hmax} = 1.64W^{1/2} \quad (3.12)$$

となる。

(iii) 前者では equivalent wave height  $H$  は (3.6) 式のように  $W^{3/2}$  に比例するが、大西洋では風速の平方に比例し、

$$H = 0.0038W^2 \quad (3.13)$$

となることが分った。したがって  $H_T$  は  $T=2.3W^{1/2}$  で 0、 $T=1.64W^{1/2}$  で最大になることが考えられ、また  $\int_0^\infty H_T^2 dT = 0.0038W^2$  となるべきであることから、 $H_T$  は次の形をもつべきことが推論された。



$$H_T = 0.0036 (W^{1/2} - 0.43T) T^{5/2} \quad (3.14)$$

$$H_T = 0 \quad \text{for } W^{1/2} < 0.43T$$

ここで  $T$  は秒,  $W$  は knot,  $H$  は呎の単位である。

(3.14) 式と(3.5) 式とを, 種々の風速に対して計算した結果は図-2.3.6 のようになる。図で os と示したものは(3.14) 式, cr と示したものは(3.5) 式によるもので, 海洋の波が偏平であり, また周期帯も非常に広い。この差を Darbyshire は Perranporth における観測方法, すなわち水圧式波高計を用いたためよりも, むしろ大陸棚における turbulence と潮流の影響のためであると考えた。また Perranporth では fetch が 100 mile 以上の場合は, fetch はあまり波に影響しないということを知ったが, 大西洋での観測でもやはり同じ結論に到達した。(3.11)~(3.14) 式は fetch が 100 mile 以上の場合に対するものである。

そこで fetch が 100 mile 以下の場合, この fetch の影響を見るために, Lough Neagh と Irish Sea での fetch の短い波について調べると(この場合風速は海面上 12m の高さで測り, これを  $3/2$  倍して傾度風速  $W$  に換算する), fetch の長さが平均 11mile のとき記録に現われる最大波高は(波高は呎, 風速は knot, 周期は秒で示す)

$$H_m = 0.0032W^2 \quad (3.15)$$

の関係にあり, またその周期  $T_s$  は

$$T_s = 0.67W^{1/2} \quad (3.16)$$

の関係にあることが分った。open sea における関係(3.13)と(3.12)式とから,

$$H_m = 0.0076W^2 \quad (3.17), \quad T_s = 1.64W^{1/2} \quad (3.18)$$

である。これらを比較すると波高, 周期ともに fetch が短いときは open sea のものの 0.41 倍になっている。したがって, いま fetch の長さを  $x$  mile とし, その場合の波高および周期の比を  $y$  とすると, 一般に最大波高とその周期は次のように表わされる。

$$H_m = 0.0076 y \cdot W^2 \quad (3.19), \quad T_s = 1.64y \cdot W^{1/2} \quad (3.20)$$

このようにして  $y$  を  $x$  の関数と考え, 観測値により同じ風速に対してその関係を示すと図-2.3.7 のようである。このような fetch の影響は(3.10)式では,

$$y = 1 - \exp(-0.23\sqrt{x})$$

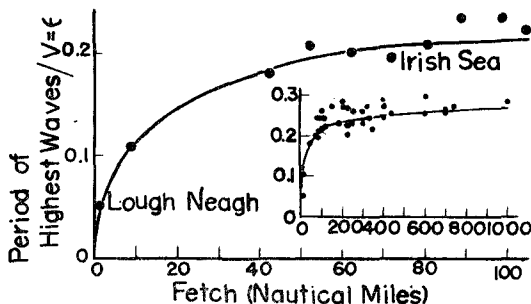


図-2.3.7  $y$  と  $x$  との関係 (Darbyshire, 1955)

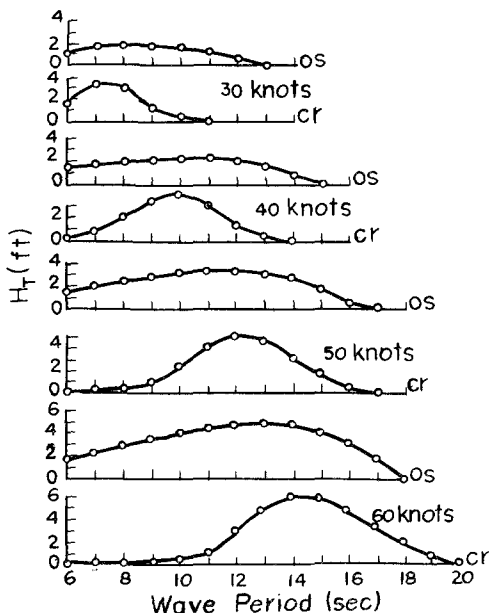


図 | 2.3.6 各風速に対する  $H_T$  の  $T$  スペクトル (Darbyshire, 1955)

で表わしたわけであるが, 図-2.3.7 にさらによく合致させるために,

$$y = \frac{x^3 + 3x^2 + 65x}{x^3 + 12x^2 + 260x + 80} \quad (x \text{ は mile}) \quad (3.21)$$

とおく。図-2.3.7 の実線はこの関係を示しているもので, fetch が  $1/4$  mile から 100 mile までを cover している。

open sea における fetch の長い場合のスペクトルは, (3.14) 式で与えられるので, これに上述の fetch の影響を示す  $y$  の項を入れると, スペクトル

の形はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} H_T &= 0.0036 y^{1/2} (W^{1/2} - 0.43 T/y) (T/y)^{5/2} \\ H_T &= 0 \quad \text{for} \quad W^{1/2} < 0.43 T/y \end{aligned} \quad (3.22)$$

また frequency  $f=1/T$  で表わすと、

$$\begin{aligned} H_f &= 0.0036 y^{1/2} (W^{1/2} - 0.43/f \cdot y) y^{-5/2} \cdot f^{-7/2} \\ H_f &= 0 \quad \text{for} \quad W^{1/2} < 0.43/f \cdot y \end{aligned} \quad (3.23)$$

このようにして fetch の影響を含んだスペクトルが与えられるが、Darbyshire はさらにこのスペクトルを観測値と比較した結果、1959年にこれと別の形のスペクトルを提案した。それはスペクトルにおけるエネルギー密度の大きい frequency  $f_0$  (これを optimum frequency という) を用い、これと一般の frequency  $f$  の差  $(f-f_0)$  の関数としてスペクトルを表現するのが最も data に合致することを見出したことによる。いま一つの理由は (3.14) 式による optimum period は、fetch が大きいとき  $T_0=1.64W^{1/2}$  で与えられるが、(3.23) 式によるスペクトルを  $f$  について微分したもののから計算される optimum period は  $T_0=1.79W^{1/2}$  となり、この差が大きすぎるとしたものである (この様子は後述する Neumann スペクトルでも同様である)。

この解析に用いた波の記録は Weather Explorer 号による ship-borne wave meter を用いた大西洋での波を対象としている。前回のスペクトルを導くのに用いた記録が観測時間が 7~10 分という短いものであったので、1954年から1957年にわたる 64 コの記録 (観測時間は 1000 秒) を選びこれを Fourier 分析し、前と同様に equivalent wave height を測った (この時は  $0.007\text{sec}^{-1}$  の間隔でスペクトルを区切って読んでいる)。こうして得られた equivalent wave height を ship-borne wave recorder の frequency response curve で校正して用いている。そしてこれを

$$H_{f_2}^2 = \frac{1}{4} (H_{f_1}^2 + 2H_{f_2}^3 + H_{f'}^2)$$

によって平滑して各周波数の equivalent square height  $H_{f'}^2$  とし、全体の equivalent height  $H$  を  $H^2 = \Sigma H_{f'}^2$  から求めた。また、もとの記録から最大波高  $H_{max}$ ,  $H_{1/10}$ ,  $H_{1/3}$  (有義波高) およびスペクトルにおける最大の  $H_{f'}$  を示す frequency  $f_0$  と有義波の周期  $T_{1/3}$  とを求めて次の関係を得た。

$$H_{max} = 1.20H_{1/10} \quad (3.24) \quad H_{max} = 1.45H_{1/3} \quad (3.25)$$

$$H_{max} = 2.40H \quad (3.26) \quad T_{f_0} = 1/f_0 = 1.14T_{1/3} \quad (3.27)$$

一方スペクトルを 1 秒間隔で区切って、equivalent height を測ったときに最大の値  $H_T^2$  を与える周期  $T_T$  に対して  $T_{f_0}$  を plot して

$$T_T = 1.06T_{f_0} \quad (3.28)$$

の関係を得た。

(3.24), (3.25) 式の関係は Longuet-Higgins(1952) の理論値よりも大きい、これは理論値が狭い band のスペクトルをもつ波に対するものであるに反し、この測定が海洋の上で得られたもので広いスペクトル band をもつためであろうとしている。同様のことが (3.26) 式についても考えられる。(前回までの結果では (3.1) 式に示したように  $H_{max}=2.0H$  になっている。)

つぎに前回までの研究では風速として傾度風速を取っていたが、今度は海面風速  $U$  に取り、これに対して  $H_{max}$ ,  $H_{1/3}$ ,  $H$  および  $T_{f_0}$  を plot すると 図-2.3.8 のようになり、次の関係を得る。

$$H_{max} = 0.0193 U^2 \quad (3.29) \quad H_{1/3} = 0.0133 U^2 \quad (3.30)$$

$$H = 0.0081 U^2 \quad (3.31) \quad T_{f_0} = 1.94 U^{1/2} \quad (3.32)$$

ここで波高はすべて ft, 風速は knot, 周期は sec である。(3.32) 式はさらに正確には次のようになる。

$$T_{f_0} = 1.94U^{1/2} + 2.5 \times 10^{-7}U^4 \quad (3.33)$$

図-2.3.8 (d) の点線がこの式に対応する。傾度風速  $W$  が海面風速の  $3/2$  倍であるとする、(3.31) 式から  $H=0.0036 W^2$  となり、(3.13) 式による  $H=0.0038W^2$  と近似しており、また (3.28), (3.32) 式から  $T_T=1.83U^2=1.50^{1/2}$  となり、(3.18) 式による  $T_s=1.64W^{1/2}$  と比較的近い。前回に得られた spectral height (3.14) 式によると spectral square height は次のようになる。

$$H_T^2 dT = 0.0036^2 (W^{1/2} - 0.43 T) T^5 dT \quad (3.34)$$

$$= 0 \quad \text{for} \quad 0.43 T > W^{1/2}$$

frequency  $f$  では

$$\begin{aligned} H_f^2 df &= 0.0036^2 (W^{1/2} - 0.43/f)^2 f^{-7} df \\ &= 0 \quad \text{for} \quad 0.43/f > W^{1/2} \end{aligned} \quad (3.35)$$

このスペクトルを導く際には  $H_f$  と風速  $W$  の関係を直接求めたため、data の分散が大きかったので、ここでは  $H_f^2/H^2$  を取り、これと  $(f-f_0)$  の関係を見ることにし、これに対して最も良く適合する curve を引くことによりスペクトルを求めることとした。図-2.3.9 (a), (b), (c) はそれぞれ風力 3, 4, 5; 6, 7; および 8, 9, 10 の場合のこの関係を示しており、これに最も近い curve として次式を得た。

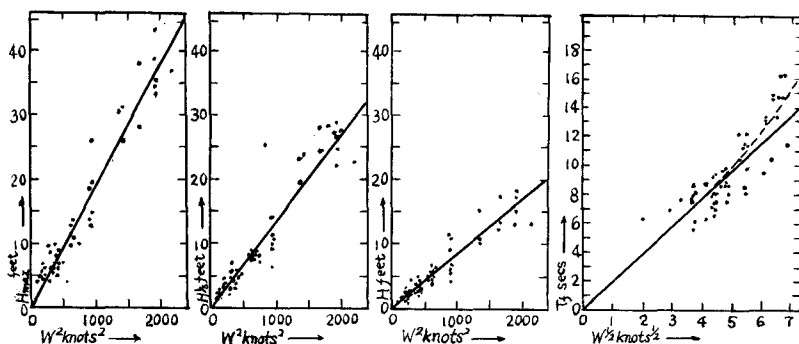
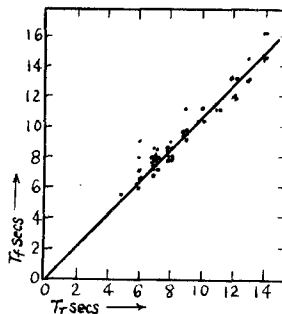


図-2.3.8 風速と  $H_{\max}$ ,  $H_{1/3}$ ,  $H$ ,  $T_f$  の関係及び  $T_f$  と  $T_{f0}$  の関係 (Darbyshire, 1959)

$$\begin{aligned} \frac{H_f^2}{H^2} \cdot df &= 23.9 \exp \left[ - \left\{ \frac{(f-f_0)^2}{0.0847 \{ (f-f_0) + 0.042 \}} \right\}^{1/2} \right] df \\ &= 0 \quad \text{for} \quad (f-f_0) < -0.042 \end{aligned} \quad (3.36)$$

ここで  $f=1/T$ ,  $f_0=1/T_0$  で ( $\text{sec}^{-1}$ ) の単位である。

これは fetch が 100 mile 以上の場合に相当するが、短い fetch の影響を考えると、前回の結果は (3.21) 式で示される  $\gamma$  を用いて (3.19), (3.20) 式が求められている。そこでこれと同様の考え方で (3.21), (3.32) および (3.33) 式から次のようにおく。

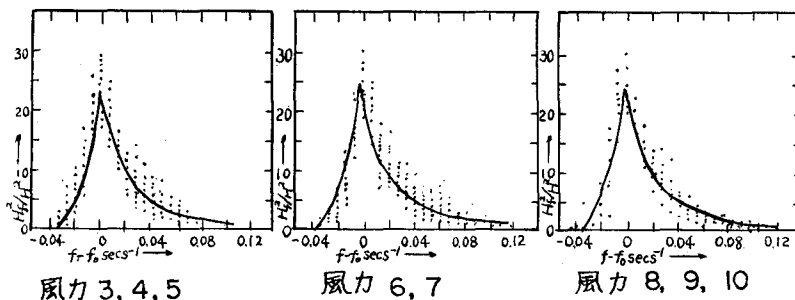


図-2.3.9  $H_f^2/H^2$  と  $(f-f_0)$  の関係 (Darbyshire, 1959)

$$H = 0.0081 y U^2 \quad H: \text{ft}, U: \text{knot} \quad (3.37)$$

$$T_{f_0} = 1/f_0 = 1.94 y U^2 \quad T: \text{sec}, U: \text{knot} \quad (3.38)$$

$$\text{または } T_{f_0} = y(1.94U^{1/2} + 2.5 \times 10^{-7}U^4) \quad T: \text{sec}, U: \text{knot} \quad (3.39)$$

スペクトルは

$$(H_f^2/H^2)df = 23.9y \exp \left[ - \left\{ \frac{y^2(f-f_0)^2}{0.00847 \{y(f-f_0) + 0.042\}} \right\}^{1/2} \right] df \quad (3.40)$$

$$= 0 \quad \text{for } y(f-f_0) < -0.042$$

また(3.37)式を用いて,

$$H_f^2 dt = 1.57 \cdot 10^{-3} \cdot y^3 U^4 \exp \left[ - \left\{ \frac{y^2(f-f_0)}{0.00847 \{y(f-f_0) + 0.042\}} \right\}^{1/2} \right] df \quad (3.41)$$

$$= 0 \quad \text{for } y(f-f_0) < -0.042$$

$$\int_0^\infty H_f^2 df = H^2 = 6.6 \times 10^{-5} \cdot y^2 U^4 \quad (3.42)$$

となる。

この結果を fetch の短い場合の Lough Neagh での実測値と比較すると図-2.3.10のように95%信頼限界内で一致することとなる。

なお Darbyshire (1959) は海岸の波に対しては(3.37)および(3.38)式のかわりに,

$$H = 0.054 y^{3/2} U^{3/2} \quad (3.43)$$

$$1/f_0 = 1.55 y^{3/4} U^{1/2} \quad (3.44)$$

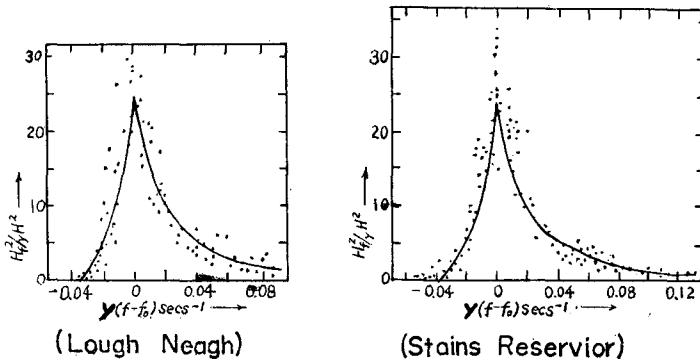


図-2.3.10  $H_f^2/yH^2$  と  $y(f-f_0)$  の関係

を用いるのが適当であるとしている。

#### 4. Neumann (1949, 1950, 1952) の研究

米国での Sverdrup および Munk の波の発達の研究に続いて、英国での Darbyshire の研究が進められる一方、ドイツでは Neumann や Roll による研究が並行して行なわれ、古典力学的な方法による実際的な研究がこの時期に最も盛んに行なわれ、ほぼその究極に達した観がある。これらの人々の研究の中で、特に Neumann による成果は彼自身のストップウォッチと目測による最も原始的な方法によって行なわれたにもかかわらず、大西洋における数多くの体験と注意深い観測によって積みあげられた貴重なもので、彼の鋭い観察によって与えられた示唆はその後の波の研究に数多くの貢献をしたものである。彼の研究は後期においていわゆる Neumann spectrum として実を結び Pierson らによって実用化され Pierson-Neumann-James の方法として波の予知に欠くことのできない方法を提供している。Neumann スペクトル自身は何等の物理的考察あるいは必然性をもって作られたものではないが、その spectrum に到達するまでの Neumann の研究の集積と方法は、多く波浪記録あるいは数学的手段を通じてしか波を考察する機会のない人々にとって、いかに実際現象の直接観測が価値あるものであるかを教えるものである。

ここでは Neumann によって見い出され、研究された Hauptwellen (Characteristic waves, 風の直接作用の下で発達する波をさし、これを3つに分けて述べている) について述べ、これに対する Neumann の考察を示すことにする。

Neumann は 1949, 1950年の論文において、海の波の実際の状況を詳細に記述し、混乱した海面を特性づける波として次の3つの波の存在を指摘した。

(i) 短い *steep* な砕けつつある  $C = \frac{1}{3}U$  の波、(実際にはほとんど重要ではないが、理論的にはエネルギー移動の問題および粗度の問題に一つの役割を果たしている)。

(ii) 比較的 *steep* な重なり合った波 (*Seen* すなわち一般の風波)、(海に関する最も興味あるもので、その大きさは風速に関係する)。

(iii) 長い緩やかな斜面をもった波打って進行する長い波 (*lange Wellen*)、( $C \sim 1.37 U$  位で風域内では *steep* な波で *cover* されるので観測者にとって直接注意を引かない)。

これらの3種類の波と他の原因による2次的な波とが共存して実際の海面の波を構成するものであると述べ、1949年の論文において (i) と (iii) の波について研究し、風速と波高及び周期の関係を求めた。このような考え方がさらに観測に基づいて整理され1952年の論文に発表されているので、ここでは主としてそれに基づいて説明をすることにする。

Neumann によると、海面においては種々の高さや波長をもった波が互いに重なり合っているために、海面は著しく粗な様相を示し、特に波の発達段階において然りである。風が長く続くほど、また波が発達するほどすなわち波高が大きくなるほど、この混合した波から、風の強さに対応した *Characteristic waves* が際立って来る。同時に単独の山の如き波峰がだんだん大きくなって長く続いた峯となる、このようにして *Characteristic waves* の中の “*Seen*” (風波) が生成する。

成長しつつある波または波長し終った波のさらに明瞭な印は混乱した波の中で群の形をなした現象ともいうべき “*Seen*” の連続した形の波動である。一つの波の山を追跡して見ると、それは長い時間存在し続けるものではなく、ある高さになると漸次消えて混乱した波の中にかくれてしまい、また他の波が現われて同様に消えていくことが分る。“*Seen*” の発達や消失は波の進行速度とほぼ同じ速度で進行する船から8個宛の波を注意するとよく見ることができる。船の進行方向に並んだ2つの波の山は次のようにしてその高さを変えていく。すなわち第8番目の波がその高さを増大していき、その前の波が消えていく。この状態は第8番目の波が遂に消えてしまうまで続き、船の進行方向の他の場所に新しい波が発生し始めるまで続く。このような群波に似た現象と波動とは海の波の性質に対して特に著しいものである。これは海面状態に応じて種々の形で観測者に現われるのであって、全く決定的な干渉の現象である。

十分にまたは殆んど完全に発達した状態における海面の波の状態は、唯一つの特性的な “*Seen*” であらわすことはできないのであって、たとえ、それがすべての風速において最も著しくあらわれるものであってもそうである。発達段階が進むにつれて、海面の波には次第に長いかつ本質的に平たい一種の波が現われるようになる。この *Hauptwellen* が2次的な大きさをもった波と重合して現われる結果、*rough* な海面において外見上不規則な様相を呈することになるのであって、これによって “*Seen*” において見られる変動と特性的な群波の出現が理解される。これらの局地的な風の影響の下で現われる海面の波の領域から *Dünung* (うねり) が出ていってしまわない限りは海面の形は複雑であり、荒天域における三角波や交叉する波が現われる。

Neumann はこのような予備的考察をさらに実際の海で確かめる目的で M. S. *Heidelberg* 号に乗って大西洋およびメキシコ湾を往復し、その途上主としてストップウォッチを用いて波の周期を測り、波高を目測した。特に周期の測定はほとんど毎日終日行ない、100~200コの波を一連として観測し、風速に対応させて約27000コの周期測定値を得た。この体験から Neumann は次のことを見い出した。

まず眼を一見不規則な波の上下にならす必要がある。そして2, 3の練習の後に相次ぐ波の不規則な形の中に一定の波形を見出すことができるようになる。これは海面を観察する人が不注意に見ている時には見逃してしまうようなものである。

周期測定の主観的な方法は長所と共に短所もあり、もちろん一定の判断が必要である。観測者にとっては複雑な波の中の本質的な部分と判断される波の周期のみを測定することになる。風の影響の下での海面波浪が存在する限りは、これらの特性的な波の中で “*Seen*” が特に目立って見える。一方それに重合した2次的な波は非常に弱く見られて来るから、それが海面の波浪状態の大体の形に影響を与えることはない。これに対して *Characteristic waves* の波高と周期には注目すべき変動が現われ、交互に早い変動や遅い変動あるいは高い波や低い波があらわれる。そして定常的に振動し波打つ海面状態の中には明らかに *lange Wellen* (波長の長い波) が現わ

れる。それは緩やかな斜面をもっているので特に目立っている。したがって先ず種々の風速において、混乱した海面の中でいかなる周期が卓越するかを確定することが問題となる。

ここで測定されたすべての周期は、その進行方向が風向および局地的な海面波浪と一致した波だけのものであることを注意しておく必要がある。進行方向の異なる“Dünung”(うねり)は区別して測っている。そのような局地的でない波は観測者が十分慣れた時でも必ずしも完全に同一のものではないと認めるとは限らず、特にそれが“Seen”と同じ方向に進行するときには識別が困難である。したがってこれらの海面波の中に存在する別の波を分離するために十分の注意を払う必要がある。しかしながら Wind Seen と Dünung を分離する場合には肉眼による観測は機械的な記録に対して十分すぐれた点をもっていることは明白である。波浪測定器の記録においては局地的な風波を局地的ならざる波から分離することはできない。

このようにして混乱した海面の波の中に Characteristic waves を見出す努力を重ね、27000個の周期の観測値について整理した結果、周期の出現回数を調べ、その代表的な例として 図-2.4.1 を Neumann は示している。

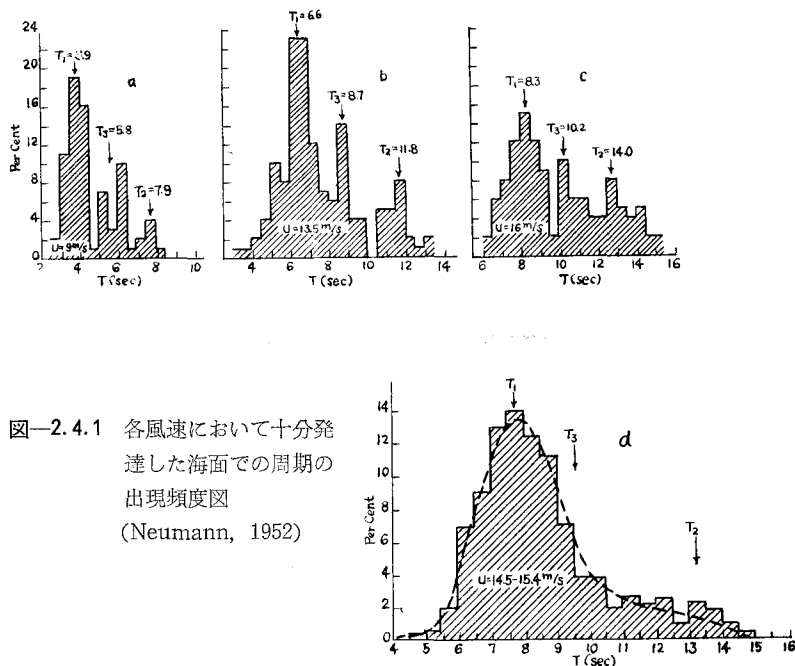


図-2.4.1 各風速において十分発達した海面での周期の出現頻度図 (Neumann, 1952)

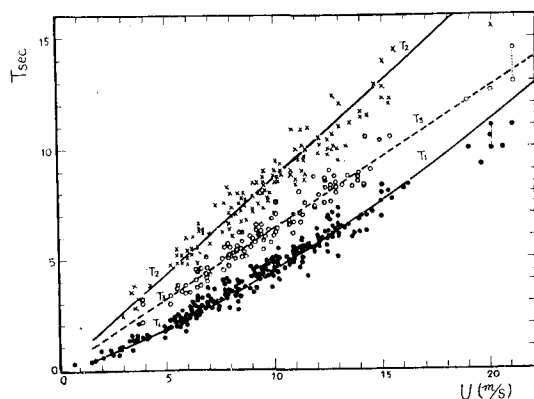


図-2.4.2  $T_1, T_2, T_3$  と風速の関係 (Neumann, 1952)

これはほぼ定常的な風の吹送状態の時のもので、(a)は風速 9m/s, (b)は 13.5m/s, (d)は風速 14.5~15.4m/sの間のすべての観測値を一つの図に示したものである。(a)~(c)のいずれにおいても、 $T_1$ で示される“Seen”と、 $T_2$ で示される“Lange Wellen”, およびその中間にある  $T_3$ で示される Zwischen Wellen (中間波)が明らかに識別される。 $T_1$ および  $T_3$ の波については前に Neumann (1950)が計算しており、矢印はその計算値を示している。 $T_3$ の波は最初 Neumann は別の原因例えば他の海域から進行して来たもので、局地的な風による波でないと考えていたが、これもやはり局地的な波として考慮すべきであると判定した。この Zwischen Wellen

(中間波) は外見上風速と同じ速度をもっている。

このような頻度分布図からの  $T_1$ ,  $T_2$  および  $T_3$  を風速  $U$ (m/s) に対して plot すると図-2.4.2の結果が得られ、風速に対する関係が明らかとなる。このような事実から十分に発達した海面の波では次の3つの波が存在することが分る。

(i)  $T_1$  は “Seen” (風波) の周期で、次式のように与えられる。これを  $\beta_m$  wave と名づける。

$$T_1 = \frac{2\pi}{g} \cdot \frac{2r(\beta_m^* - 1) \cdot U}{\log_e 182.5 - \log_e \sqrt{U}}, \quad \beta_m^* = C_2/U = 1.37 \quad (4.1)$$

ここで  $r$  は常数で 1.667,  $\beta_m^*$  は次に示す lange Wellen の wave age, したがって  $C_2$  はその速度,  $U$  は風速 (cm/sec),  $g$  は重力の加速度である。この関係は後に示す計算で求められる。

(ii)  $T_2$  は “lange Wellen”(波長の長い低い波)の周期で 図-2.4.2 から風速に比例する。これを  $\beta_m^*$  wave と名づける。

$$T_2 = \frac{2\pi}{g} \cdot \beta_m^* U = 0.877U \quad (U \text{ は m/sec}) \quad (4.2)$$

(iii)  $T_3$  は “Zwischen Wellen” (中間波) の周期で風速と同じ位相速度をもつと考えられ、図-2.4.2から大体確かめられる。これを  $\beta(1)$  wave と名づける。

$$T_3 = \frac{2\pi}{g} U = 0.64U \quad (U \text{ は m/sec}) \quad (4.3)$$

これらの波の中で 図-2.4.2 から分るように  $T_3$  の値が最も分散が大きい、これはこの波の発生のためには Seen や Zwischen-wellen よりも長時間の風の吹送を必要とするし、また十分発達した状態の海面波浪の中には存在しなくなるからである。

Neumann は波高の観測を周期測定と並行して行ったが、その結果得られた Characteristic waves の波高と風速との関係の一例を図-2.4.3 に示している。風速が大きくなると波高の分散が大きい。これは発達した波では波峰が長くなり、干渉し合うために波高の変動が大きくなるものと考えられる。波高と風速との関係は1950年の論文で計算した結果、次式で表わされるとしている。

$$H = 0.215L \cdot e^{-r\beta}, \quad \beta = C/U \quad (4.4)$$

ここで  $r$  は(4.1)式におけると同じ値である。 $L$  は波長である。

このような3つの Characteristic waves の共存が複雑な形をもつ海面状態を形成し、周期分布のスペクトルに見られる  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  の周期の周囲に、見掛けの周期が分布してあらわれと考えられ、同時に波高についても同じ事がいえる。この例として Neumann は風速 16m/s において十分発達した波として、波高、周期、波長をそれぞれ  $2a_1=H_1=6.0$  m,  $T_1=8.3$  sec,  $L_1=107$  m;  $2a_2=H_2=6.4$  m,  $T_2=14.0$  sec,  $L_2=307$  m;  $2a_3=H_3=6.8$  m,  $T_3=10.2$  sec,  $L_3=163$  m の3つの波を正弦波として

$$y = a_1 \sin 2\pi \left( \frac{C_1 t - x}{L_1} \right) + a_2 \sin 2\pi \left( \frac{C_2 t - x}{L_2} \right) + a_3 \sin 2\pi \left( \frac{C_3 t - x}{L_3} \right) \quad (4.5)$$

とおき、 $x=0$  と  $x=550$ m の地点における  $t=0 \sim 260$  秒の間の波形を計算して示した。図-2.4.4 はこれを示している。(a)は  $x=0$  における波形、(b)は  $x=550$ m におけるものである。この図から3つの Characteristic waves の共存による干渉で、見掛けの周期と波高とが分散している様子が分る。

以上のような考察の結果、Neumann は海面の波が十分発達するまでに3つの主要な段階を通過せねばならないと考えて、そのおのおのの段階における波の波高と周期を風速と fetch 及び duration に関係づける研究

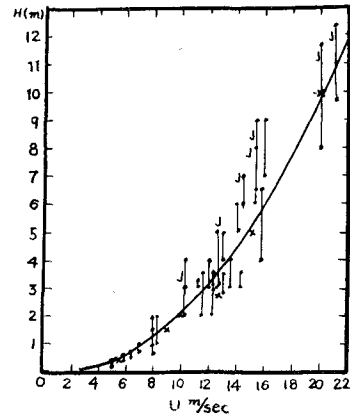


図-2.4.3 風速と波高の関係 (Neumann, 1952)

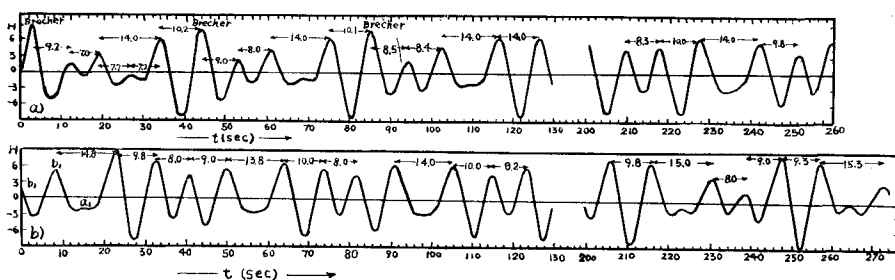


図-2.4.4 3つの波が干渉して生じた海面波形 (Neumann, 1952)

を行なった。

まず風から波にエネルギーが伝えられる過程は 図-2.4.5 に示すように水面への切線応力  $\tau_t$  によるものと垂直応力  $\tau_n$  によるものと考えることができるとした。

水面波形を次のように考える。

$$\eta = a \sin K(x - ct) \quad (4.6)$$

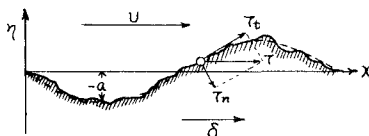


図-2.4.5 海面波形

ここで  $K=2\pi/L$ ,  $C$  は波速で深海波では  $C^2=g/K$  である。すると水面の水粒子の水平変位は次のようになる。

$$\xi = a \cos K(x - Ct) \quad (4.7)$$

水粒子の水平方向および鉛直方向の速度  $u_0$  および  $w_0$  は

$$\begin{aligned} u_0 &= \partial \eta / \partial t = -aKC \cos K(x - Ct) \\ w_0 &= \partial \xi / \partial t = aKC \sin K(x - Ct) \end{aligned} \quad (4.8)$$

したがって  $\tau_n$  および  $\tau_t$  による仕事量を単位時間、単位面積について  $A_n$  および  $A_t$  とすると

$$A_n = -\frac{1}{L} \int_0^L \tau_n \cdot w_0 dx, \quad A_t = \frac{1}{L} \int_0^L \tau_t \cdot u_0 dx \quad (4.9)$$

ここで  $A_n$  および  $A_t$  を決めるために Neumann は正弦波形に対する風速分布を次のように仮定した。

$$U_0 = \bar{U}_0 \{1 + \pi \delta \sin K(x - Ct)\} \quad (4.10)$$

これはかんたんな potential flow の形である。 $\delta$  は波の steepness ( $\delta=2a/L=H/L$ ) で、 $\bar{U}_0$  は風速の平均値である。

$\tau_n$  を Jeffreys は風速の2乗  $(U-C)^2$  と波形こう配  $\partial \eta / \partial x$  の積に比例するとしたが、 $(U-C)$  の正確な定義と比例常数の大きさ (つまり sheltering coefficient) に疑問があり、別の形を仮定することにした。それは波の風上側の方の  $\tau_n$  が風下側の  $\tau_n$  よりも当然大きいという無理のない仮定から出発し、 $\tau_n \propto \partial \eta / \partial x$  と考え、 $\tau_n$  を次の形においた。

$$\tau_n = \bar{\tau}_n + \tau_n' \cos K(x - Ct) \quad (4.11)$$

$\bar{\tau}_n$  は波形上の平均値をあらわすもので、 $\tau_n$  の分布は 図-2.4.6 のようになる (図の上は流線を示す)。結局この  $\tau_n$  の分布は Jeffreys と同じように  $\partial \eta / \partial x$  と同じ位相の圧力を考えたことになる。ここで  $\bar{\tau}_n$  は (4.9) 式において1波長につき積分すれば0となるから考える必要がなく、 $\tau_n'$  については次のように仮定する。

$$\tau_n' = \pm \rho \alpha \cdot f_n (\bar{U}_0 - C)^2 \quad (4.12)$$

$C < \bar{U}_0$  に対しては  $\tau_n' > 0$ ,  $C > \bar{U}_0$  に対しては  $\tau_n' < 0$  である。(4.9)式に(4.8), (4.11)式を代入して

$$A_n = \frac{1}{2} \pi \cdot \delta \cdot \tau_n' \cdot C = \pm \frac{1}{2} \pi \cdot \delta \cdot \rho \alpha \cdot f_n \cdot (\bar{U}_0 - C)^2 \cdot C \quad (4.13)$$

(この式を(2.4)式と比較すれば分るように、Jeffreys および Munk では圧力係数を  $a^2 K^2$  に比例するとしたことになるが、Neumann はこれを  $aK$  に比例するとしている。これは1949年の論文に述べているが、係数  $C\alpha \propto sa^n K^n$  において実験値から  $n$  および  $s$  の値を推定して  $n=1$ ,  $s=0.095$  を得たことによる。)



切線応力  $\tau_t$  の効果について Neumann は仮定した波形上の水面が常に平滑な面であるならば、すなわち単に粘性抵抗のみが作用するのであれば、風の摩擦力としての切線応力の仕事は小さく垂直応力の作用に較べると当然無視される。多分 Jeffreys もこの観点から  $\tau_t$  を無視したものであろうし、それは initial wave の発生については正しいと考えられるが、ここでは ripple までを含んだ多くの波の重合としての海面の波を考えるわけであるから、いま仮定した波形は粗な面をもつと考えなければならない。したがって位相速度  $C$  をもつ波における  $\tau_t$  の可能な仕事を無視することはできないとした。 $\tau_t$  を Sverdrup および Munk と同様に全波形にわたって一定であるとおくと、(4.9) 式の積分における周期的な部分は消えて粒子速度  $u_0$  に対しては何等有効な仕事をしない。波形上の  $\tau_t$  の分布について何等正しいと指示がないならば、 $\tau_t$  は波形の上で種々の大きさを取ることを確定することは不合理ではないと考えられる。

切線方向のせん断力  $\tau_t$  を風速の 2 乗に比例するとして次のよう  
におく。

$$\tau_t = \rho a \cdot f_t \cdot U_0^2 \quad (4.14)$$

ここで  $f_t$  は当分未知の無次元摩擦係数とする。 $U_0$  は波の crest のすぐ上の風速と考え、(4.10) 式を (4.14) 式に代入すると

$$\tau_t = \rho a \cdot f_t \cdot \bar{U}_0^2 [1 + 2\pi\delta \sin K(x - Ct)] \quad (4.15)$$

となり、 $\tau_t$  の分布は 図-2.4.6 のように与えられ、切線応力が波の山で大きく谷で小さいという仮定を取ることになる。(4.15) 式を (4.9) 式に代入して

$$A_t = 2\pi^2 \cdot \rho a \cdot \delta^2 \cdot f_t \cdot \bar{U}_0^2 \cdot C \quad (4.16)$$

を得る。(4.13)、(4.16) 式における係数  $f_n$  と  $f_t$  は境界面の条件すなわち波形、その steepness あるいは粗度などに関係するものであるから常数ではない。(4.13)、(4.16) 式で  $\beta_0 = C/\bar{U}_0$  とおき

$$\begin{aligned} A_n &= \pm \rho a \cdot \gamma_{on}(\beta_0) \cdot (1 - \beta_0)^2 \cdot \beta_0 \cdot \bar{U}_0^3, & \gamma_{on}(\beta_0) &= \frac{1}{2} \pi \delta \cdot f_n \\ A_t &= \rho a \cdot \gamma_{ot}(\beta_0) \cdot \beta_0 \cdot \bar{U}_0^3, & \gamma_{ot}(\beta_0) &= 2\pi^2 \cdot \delta^2 \cdot f_t \end{aligned} \quad (4.17)$$

後で述べるように  $\delta$  は  $\beta$  の関数であるから  $\gamma_{on}$ 、 $\gamma_{ot}$  も共に  $\beta$  の関数となる。 $\bar{U}_0$  については一般に用いる海面上 10m 附近の高さの風速との関係が明確につけられないし  $f_n$ 、 $f_t$  も不明である。そこで

$$A = A_n + A_t = \rho a \cdot \beta \cdot C(\beta) \cdot U^3; \quad C(\beta) = \gamma_t(\beta) + (1 - \beta)^2 \cdot \gamma_n(\beta) \quad (4.18)$$

とおき、係数  $C(\beta)$  を  $\beta$  の関数として決めることにする。いま、 $U$  は海面上約 10m の平均風速で、 $\beta$  は  $\beta_0$  と異なる。

まず wave age  $\beta$  と wave steepness  $\delta$  との関係は Sverdrup および Munk の用いた関係 (図-2.2.1) に類似であるが、Curve fitting を多少異なったものとしている。図-2.4.7 に示すように  $\beta$  の 0 から 1/3、

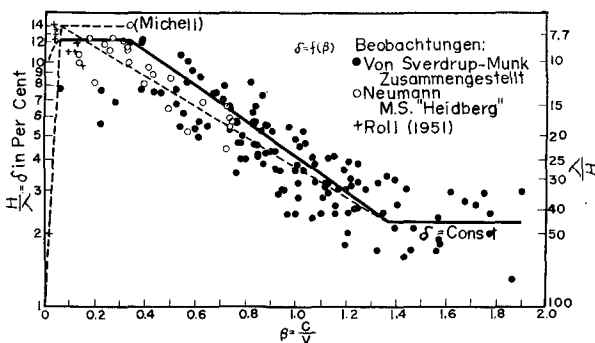


図-2.4.7 Wave steepness と Wave age の関係 (Neumann, 1952)

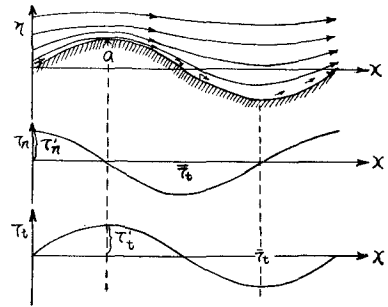


図-2.4.6 波形と応力分布 (Neumann, 1952)

1/3 から  $\beta_m^* = 1.37$ 、および  $\beta_m^* > 1.37$  の 3 つの過程に分け、 $\beta = 0 \sim 1/3$  の間を観測値で補充することにより次のように決定した。

(i)  $0 < \beta < 1/3$  の領域では

$$\delta = 2\beta = 0.124 \quad (4.19)$$

(ii)  $1/3 < \beta < \beta_m^* (=1.37)$  の領域では

$$\delta = 2ne^{-\gamma\beta} \quad (4.20)$$

ただし  $n = 0.1075$ ,  $\gamma = 1.667$ ,

(iii)  $\beta > \beta_m^* (=1.37)$  の領域では

$$\delta = 0.022 \quad (4.21)$$

Neumann(1950) は海面の摩擦抵抗について次のように考察している。

十分に発達した海面においては Seen ( $\beta_m$  wave) と lange Wellen ( $\beta_m^*$  wave) とそれに重合した短い波とが共存している。海面の風に対する摩擦抵抗は垂直応力とせん断応力によるものがあるが、垂直応力の効果は海面に存在する Seen と lange Wellen に対して主として作用し、せん断応力はそれに重合する波長の短い海面の粗度に関係する波によって効果的となる。そして海面の有効な摩擦抵抗はこの3つの和として表わされるとした。前の2つに対しては摩擦係数を steepness に比例するとして、 $s\pi\delta$  および  $s^*\pi\delta^*$  ( $\delta^*$  は  $\beta_m^*=1.37$  に対する  $\delta$  の値で0.022) とおくと、 $s, s^*$  を常数と考えて摩擦抵抗は単位面積につきそれぞれ  $\frac{\rho_a}{2}s\pi\delta(U-C)^2$ ,  $\frac{\rho_a}{2}s^*\pi\delta^*(U-C^*)^2$  となる。最後のせん断抵抗は0からCまでのすべての波速の波の連続スペクトルを仮定して  $C = \frac{1}{3}U$  を境界として抵抗係数を  $s'\pi\delta$  とおき

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_a}{U/3} \int_0^{U/3} s'\pi\delta(U-C')dC' + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_a}{(C-U/3)} \int_0^C s'\pi\delta(U-C)dC$$

となる。この項を一般の表わし方  $\rho_a\gamma^2(\beta_m)U^2$  に等しいとおいて、結局十分に発達した海面では3つの有効摩擦抵抗力の和として次の式が得られる。

$$W_{eff} = \rho_a \cdot \gamma^2(\beta_m) \cdot U^2 + \frac{1}{2} \rho_a \cdot s' \pi \delta_m (1 - \beta_m)^2 U^2 - \frac{1}{2} \rho_a s^* \pi \delta_m^* (1 - \beta_m^*)^2 U^2 \quad (4.22)$$

ここで第1項は切線応力による抵抗、第2項は Seen ( $\beta_m$  wave) による垂直応力の抵抗、第3項は lange Wellen ( $\beta_m^*$  wave) の垂直応力による抵抗である。 $\gamma^2(\beta_m)$  は (4.19), (4.20) 式の  $\delta$  と  $\beta$  の関係を用いて次のようになる。

$$\gamma^2(\beta_m) = \left[ 1.75 + \frac{16.2}{(\beta_m - 1/3)} [e^{-r\beta_m} \{0.48(\beta_m + 0.6) - 0.6(1 + \beta_m)^2\} + 0.126] \right] \times 10^{-3} \quad (4.23)$$

上式で指数冪の  $\gamma$  は常数で(4.20)式の  $\gamma$  と同じ1.667である。このように表わされた  $\gamma^2(\beta)$  は結局  $\beta=C/U$  の関数として摩擦係数が変わることを示すもので、 $\beta$  に対する  $\gamma^2$  の値は次表のようになる。

表-4.1

| $\beta$                | 0.37 | 0.4  | 0.5  | 0.6  | 0.7  | 0.8  | 0.9  | 1.0  | 1.1  | 1.2  | 1.4  |
|------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\gamma^2 \times 10^3$ | 5.75 | 5.62 | 4.55 | 4.05 | 3.64 | 3.27 | 3.01 | 2.78 | 2.68 | 2.57 | 2.52 |

すなわち  $\gamma^2$  は  $\beta$  の減少関数として表わされているわけである。

さて(4.18)式の第1式と(4.14)式を比較して分るように、仕事量  $A = \rho_a \cdot \beta \cdot C(\beta) \cdot U^3$  は有効摩擦力  $\tau_{eff}$  が  $\rho_a C(\beta) U^2$  で表わされることを意味しており

$$\tau_{eff} = \rho_a \cdot C(\beta) \cdot U^2 \quad (4.24)$$

であり、一方、これは(4.22)式で与えられる  $W_{eff}$  と等しい。したがって  $C(\beta)$  は次のようになる。

$$C(\beta) = \gamma^2(\beta_m) + \frac{1}{2} s' \pi \delta_m (1 - \beta_m)^2 - \frac{1}{2} s^* \pi \delta_m^* (1 - \beta_m^*)^2 \quad (4.25)$$

ここで  $s'$  および  $s^*$  はそれぞれ  $s/2=0.0475$  および  $2s=0.190$  に等しい。 $\beta$  が前述のように0~1/3, 1/3~1.37でそれぞれ異なった形を与えられているから、(4.18)式の  $A$  もまたそれに応じて与えねばならない。

(i)  $\beta \leq 1/3$  の領域では  $\delta = \text{constant}(=0.124)$  であり、波は初期の最も steep な波形こう配を示す時であり、切線応力による仕事量は垂直応力によるものに比して無視されたと考えられるから、(4.25)式の第2項のみ残り ( $s' \rightarrow s$ )

$$A = \frac{\rho_a}{2} \cdot s \cdot \pi \cdot \delta (1 - \beta)^2 \cdot \beta \cdot U^3 \quad (4.26)$$

ただし  $s=0.095, \delta=0.124$

(ii)  $1/3 < \beta < 1$  の領域では Seen の上に短い波が重合されると考えられ、また一方  $\beta_m^*$  からの抵抗はないから(4.25)式の第3項を除外して

$$A = \rho_a \cdot \beta \cdot C_2(\beta) \cdot U^3 \quad (4.27)$$

ただし  $C_2(\beta) = \gamma^2(\beta) + \frac{1}{2}s'\pi\delta(1-\beta)^2$ , また  $s' = 0.0475$ ,  $\delta = 0.215e^{-1.667\beta}$

(iii)  $\beta^* > 1$  なる lange Wellen のその後の発達に対しては

$$A = \rho\alpha\beta^* \cdot C_3(\beta)U^3 \quad (4.28)$$

ただし  $C_3(\beta) = \gamma^2(\beta_m) + \frac{1}{2}s'\pi\delta_m(1-\beta_m)^2 - \frac{1}{2}s^*\pi\delta^*(1-\beta^*)^2$

$s^* = 2s = 0.190$ ,  $\delta_m = 0.215e^{-1.667\beta_m}$ ,  $\delta^* = 0.215e^{-0.167\beta^*}$ ,  $\beta_m$  は  $1/3 \sim 1$  の間の値,  $\beta^*$  は  $1 \sim$

$1.37$  の間の値を示す。

波が完全に発達した状態では  $\beta^* \rightarrow \beta_m^* (= 1.37)$  となり  $C(\beta)$  は (4.25) 式となる。

このようにして  $\beta$  の種々の領域に対して風から波に与えられるエネルギーが見積られる。

波において消費されるエネルギーを Neumann は粘性および波の砕けによる粘性の増加として考えた。粘性係数  $\mu$  の流体中で失なわれるエネルギーは Lamb(1930) により,

$$D_\mu = 2\mu(2\pi/L)^3 \cdot C^2 \cdot a^2$$

として与えられる。今の場合  $C^2 = gL/2\pi$  で、風波における粘性係数は分子粘性と異なり、海面状況と風速に関係するものとし、 $\mu$  の代りに  $M(\beta)$  を仮定する。したがって、

$$D = 2M(\beta) \cdot \pi^2 \cdot g \cdot \delta^2 \quad (4.29)$$

となる。ここで  $M(\beta)$  がいかなる値を取るかを見るために、十分発達した Seen ( $\beta_m$  wave) と十分に発達した lange Wellen ( $\beta_m^*$  wave) をもつ十分に発達した海面においては  $A = D$  の条件が成り立つから (4.29), (4.28) 式において  $\beta^* = \beta_m^*$  とおいたものを等置して次式を得る。

$$\frac{8M\pi^2 \cdot g \cdot n^2 \cdot e^{-2\tau\beta_m^*}}{\rho\alpha U^3 \beta_m^*} = \gamma^2(\beta_m) + s'\pi n e^{-\tau\beta_m}(1-\beta_m)^2 - s^*\pi n \cdot e^{-\tau\beta_m^*}(1-\beta_m^*)^2 \quad (4.30)$$

$\beta_m$  は十分発達した波においては風速  $U$  のみの関数となるから (Neumann, 1950), 十分発達した波では  $M$  は  $M(\beta)$  でなく風速のみの関数である。(Neumann(1950) は  $\beta_m$  波の十分に発達したときの  $\beta_m$  の値を風速のみの関数として与えられることを (4.31) および (4.32) 式の有効摩擦力と (4.22) 式の有効摩擦力の関係から示した。この  $\beta_m$  の値は (4.51) 式で示されている。)

そこで  $M$  を風速  $U$  の関数形として表わすために、図-2.1.6 に示したような風速による摩擦係数の減少を考え、有効摩擦力  $\tau_{eff}$  を

$$\tau_{eff} = \rho\alpha \cdot k(U) \cdot U^2 \quad (4.31)$$

と表わし、

$$k(U) = \frac{1}{10}(1/U)^{1/2} \quad (U \text{ は cm/sec}) \quad (4.32)$$

とした。すなわち摩擦係数は風速の平方根に逆比例し風速と共に減少するということである。この  $\tau_{eff}$  による仕事量は (4.28) 式と同じ形で、 $\beta = \beta_m^*$  に対しては  $\rho\alpha \cdot k(U) \cdot \beta_m^* \cdot U^3$  となり、(4.29) 式において  $\beta_m^*$  に対する  $\delta_m^* = 2n \cdot e^{-\tau\beta_m^*}$  を取り、エネルギー損失  $D = 2M \cdot \pi^2 \cdot g \cdot (2n)^2 e^{-2\tau\beta_m^*}$  と等置して、結局十分に発達した海面においては

$$M = \frac{1}{8} \frac{\rho\alpha k(U) \cdot U^3 \cdot \beta_m^3}{\pi^2 g n^2} \cdot e^{2\tau\beta_m^*} = 0.1825 U^{5/2} \times 10^{-4} (\text{cm}^{-1} \cdot g \cdot \text{sec}^{-1}) \quad (4.33)$$

として表わされることになる。

$\beta_m^*$  の状態に発達するまでの途中における  $M(\beta)$  を Neumann は次のように仮定した。

$1 \leq \beta^* \leq \beta_m^*$  の領域では

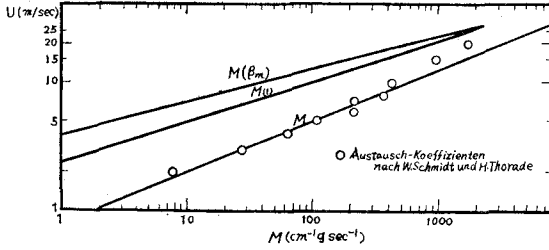
$$M(\beta^*) = M \cdot \exp[-2\gamma(\beta_m^* - \beta^*)/\beta_m] \quad (4.34)$$

ここで  $M$  は (4.33) 式で示されたもの、 $\beta_m$  は十分に発達した  $\beta_m$  wave に対するもので風速の関数として決まり、 $\beta_m^* = 1.37$  である。

$0 < \beta < 1$  の領域では

$$M(\beta) = M(1)e^{-2\gamma(1-\beta)} \quad (4.35)$$

ここで  $M(1)$  は (4.34) 式で  $\beta^* = 1$  に対する値を示すもので、これらの  $M$  と  $M(1)$  および十分に発達した  $\beta_m$



図—2.4.8  $M$ ,  $M(1)$ 及び  $M(\beta_m)$  と風速の関係  
(Neumann, 1952)

wave の  $\beta_m$  値に対する  $M(\beta_m)$  はすべて風速のみの関数として表わされ、図-2.4.8 に示すようになる。

以上のようにして波に関するエネルギーがすべて決ったので、ここで波の発達に対するエネルギー式を考える。

海面の単位面積における波の平均エネルギーを  $E$ 、風から供給される量を  $A$ 、波が消費するものを  $D$  とすると次の関係式が成立する。

$$d(EL)/dt = (A-D) \cdot L \quad (4.36)$$

ここで  $E = \frac{1}{2} \rho g a^2$  である検査面を通して単位時間にエネルギーの移動する量は

$$CaE = \frac{1}{4} \rho g a^2 \cdot C \quad (4.37)$$

で、波の全エネルギーが位相速度の半分の群速度  $Ca$  で進行すると考えて良い ( $Ca = \frac{1}{2} C$  である)。(4.36)式から

$$L (\partial E / \partial t + Ca \partial E / \partial x) + E (\partial L / \partial t + Ca \partial L / \partial x) = (A - D) L \quad (4.37)$$

ここで Sverdrup および Munk と同様に2つの場合に分けて考える。

(A) 一定風速  $U$  が無限大の海域を吹送するときは、すべての場所で波は同じ割合で成長するから  $\partial E / \partial x = 0$ ,  $\partial L / \partial x = 0$  とおくことができ、(4.37)式は次のようになる。

$$\partial E / \partial t + (E/L) \partial L / \partial t = A - D \quad (4.38)$$

(4.37)式と  $C^2 = gL/2\pi$  の関係から

$$\rho g a \partial a / \partial t + (\rho g a^2 / C) \partial C / \partial t = A - D \quad (4.39)$$

(B) 有限の fetch を一定風速  $U$  の風が無限時間吹送するときは、 $\partial E / \partial t = 0$ ,  $\partial L / \partial t = 0$  とおいて

$$Ca \left( \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{E}{L} \frac{\partial L}{\partial x} \right) = A - D \quad (4.40)$$

$$Ca = \frac{1}{2} C, \quad \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{2}{C} \frac{\partial C}{\partial x} \text{ から}$$

$$\frac{1}{2} \rho g a^2 \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{C}{2} \rho g a \frac{\partial a}{\partial x} = A - D \quad (4.41)$$

$\beta = C/U$  は (4.19), (4.20), (4.21)式から  $\delta = 2a/L$  の関数として与えられるから

(A)の場合,

$\beta \leq 1/3$  に対しては

$$\frac{12\rho \cdot b^2 \cdot \pi^2}{g} \cdot U^4 \beta^3 \frac{\partial \beta}{\partial t} = A - D \quad (4.42)$$

$1/3 \leq \beta \leq \beta_m^*$  に対しては

$$\rho \frac{4\pi^2}{g} \cdot n^2 U^4 \beta^3 e^{-2\gamma\beta} (3 - \gamma\beta) \frac{\partial \beta}{\partial t} = A - D \quad (4.43)$$

(B)の場合,

$\beta \leq 1/3$  に対しては

$$\frac{6\rho b^2 \pi^2}{g} \cdot U^5 \beta^4 \frac{\partial \beta}{\partial x} = A - D \quad (4.44)$$

$1/3 \leq \beta \leq \beta_m^*$  に対しては

$$\rho \frac{2\pi^2}{g} \cdot n^2 U^5 \beta^4 e^{-2\gamma\beta} (3 - \gamma\beta) \frac{\partial \beta}{\partial x} = A - D \quad (4.45)$$

$A-D$  は上述のようにすべて  $\beta$  の関数である。(4.42)~(4.45) 式は波のすべての発達段階に対して適用される。

先ず “Seen” すなわち  $\beta_m$  wave の発達について考える。したがって  $A$  と  $D$  は共に  $0 < \beta < \beta_m$  ( $\neq \beta_m^*$ ) の範囲である。

(A) の場合,

$\beta \leq 1/3$  に対しては

$$dt = \frac{\rho}{\rho_a} \cdot \frac{12\pi^2 p^2}{g} U \frac{\beta^2}{C_1(\beta) - B_1(\beta)} d\beta \quad (4.46)$$

ここで無次元量  $B_1(\beta)$  は次のようである。

$$B_1(\beta) = \frac{8\pi^2 \rho p^2}{\rho_a} \frac{M(\beta)}{U^3 \beta} \quad (4.47)$$

$1/3 \leq \beta \leq \beta_m$  に対しては

$$dt = \frac{\rho}{\rho_a} \cdot \frac{4\pi^2}{g} n^2 \cdot U \cdot \frac{\beta^2 e^{-2\gamma\beta} (3 - \gamma\beta)}{C_2(\beta) - B_2(\beta)} d\beta \quad (4.48)$$

$$\text{ただし } B_2(\beta) = \frac{8\pi^2 g n^2}{\rho_a} \cdot \frac{M(\beta) e^{-2\gamma\beta}}{U^3 \cdot \beta}$$

(B) の場合,

$\beta \leq 1/3$  に対しては

$$dx = \frac{\rho}{\rho_a} \cdot \frac{6\pi^2 p^2}{g} \cdot U^2 \cdot \frac{\beta^2}{C_1(\beta) - B_1(\beta)} d\beta \quad (4.49)$$

$1/3 \leq \beta \leq \beta_m$  に対しては

$$dx = \frac{\rho}{\rho_a} \cdot \frac{2\pi^2}{g} n^2 U^2 \frac{\beta^2 e^{-2\gamma\beta} (3 - \gamma\beta)}{C_2(\beta) - B_2(\beta)} d\beta \quad (4.50)$$

$B_1(\beta)$  および  $B_2(\beta)$  に対しては (4.34), (4.35) 式で  $M(\beta)$  が与えられているが,  $\beta_m$  は決められていない。これは 図-2.4.2 で示した実測値と1950年の研究結果から, 十分に発達した “Seen” の  $\beta_m$  は

$$\beta_m = \frac{2\gamma(\beta_m^* - 1)}{\log_e 182.5 - \log_e \sqrt{U}} \quad (4.51)$$

として風速  $U$  の関数で与えられるから, (4.33), (4.34) 式から

$$M(1) = 10^{-7} \cdot U^3 \text{ (cm}^{-1} \cdot \text{g} \cdot \text{sec}^{-1}) \quad (4.52)$$

として与えられ, (4.35) 式を考慮して結局

$$B_2(\beta) = 2.6\beta^{-1} \times 10^{-3}, \quad 1/3 \leq \beta \leq \beta_m \quad (4.53)$$

となる。

さて今までは  $\beta_m$  wave として “Seen” の発達を計算したが,  $\beta_m$  wave がその最大の値にまで ((4.51) 式) 到達した後はいかなる発達を続けるかを考えて見る必要がある。これについて Neumann は次のように考えた。

今これらの波が一定の最大の steepness  $\delta_m$  または一定の wave age  $\beta_m$  に到達したならば, それらは比較的 steep な時々刻々に砕ける波として存在するであろう。すなわちその波は砕けによってエネルギーを失った後にまた新しく風からのエネルギー供給により発生し,  $\beta_m$  および  $\delta_m$  で与えられる最大の状態を決して超えない高さに成長する。

しかし海面の波はこの状態で成長しつづいた訳ではなく, 海岸からの種々の距離における観測によるとさらに複雑な海面波の発達が見られ, 風の作用が続くと海面の現象形態が  $\beta \leq \beta_m$  の状態に対して本質的に変わったものになっていく。それは平均波高の増大よりも波長の増大およびスペクトルにおける characteristic period の増大および波の峯幅の増加である。これらは海面の発達の最後の様相を示すものである。波高および周期に見られる著しい変動と時々現われる波の頂が砕けている高いかつ長い波は成長し終ったまたはほとんど成長しつづいた波の印である。

図-2.4.1 に示したような周期分布図において,  $\beta_m$  wave の characteristic period  $T$  の周囲にある十分発達した短い波の外に, 風の作用が継続するときには, 位相速度が風速よりも大きくなり得る著しく長い波が粗な海面に発達するのが見られる。恐らくわれわれは海面の波のそれ以上の発達には  $C < U$  をもつ steep な砕けつつある  $\beta_m$  wave が前もって存在するものと仮定せねばならないと思われる。それによってより大きなエネルギー

量をもった長い波ができることが可能である。短い steep な  $\beta_m$  wave はその存在によって海面に一定の粗度を与え、ripple に到るまでの小さな重合した波と共に粗な海面に作用する有効なせん断応力に寄与するものである。このせん断力はおのおのの新しく発生する長い波長の波にエネルギーを加え、空気と水との境界面の決った波形を、(その波の位相速度が風速よりも大きい時でも) エネルギー損失と空気抵抗に対抗して保持するものである。

風よりも早い波に対して風からエネルギーが与えられる機構はまだほとんど明らかでない。切線応力のみがこの場合に正の仕事量を与えることができる。複雑な海面の波における過程は数学的解析は困難である。砕けつつある波をもつ海面をかんたんな正弦波形と乱されない水分子運動をもつ数学的模型として仮定することは確実に間違っている。海面の lange Wellen に対するエネルギー伝達は例えば水の作用を通して考えられる。この場合風は単にエネルギーの reservoir としての間接的な役割しか果たさない。これは風よりもおそい波状の "Seen" はそれが砕けるときにそのエネルギーの一部を長い波長の wave system の形成に使うという考え方である。

最もかんたんな場合として風の方向に進む十分発達した  $\beta_m$  wave の一連を考えると、その波は最大の steepness に達している。そしてまさに不安定と砕けの状況に近い状態にある。この wave system が小さな振幅をもった平らな乱れとしてどこかで発生した速度  $C \gg U$  をもつ他の波に追い越されるものと考えよう。この低い波の山が不安定な  $\beta_m$  wave の system を追い越す毎に水分子の軌道速度は加速され、長い波の山で  $\beta_m$  wave の砕けが起こり、砕けは長い波の山の上を走る。そしておのおのの新しい砕波は追い越す波の風下側におちる。steep な  $\beta_m$  wave の山が砕ける時には混乱した海面の運動に対してエネルギーの一部はたしかに消える。しかし  $\beta_m$  wave から与えられたエネルギーの他の部分はその下にある長い平たい波に移るということを仮定することは確かにできる。長い波の山に砕波が明らかに現われる時は、前方に投げ出された砕波の水塊は lange Wellen の峯における本来の軌道運動を加速し、また砕波の時の水の質量輸送により lange Wellen の山の上におけるポテンシャルエネルギーは増大する。この砕けて退化した  $\beta_m$  wave は砕けた後には風からのエネルギーの供給により再び最大の steepness にまで成長する。かくして上述の過程が繰り返される。このようにしてエネルギー平衡において  $A-D > 0$  が成立する限り風からの、短い砕けつつある波の system に対するエネルギー供給が長い波に伝えられることが可能となる。

位相速度  $C$  が風速  $U$  よりも大きな波が存在する海面の、これ以後の発達に対しては、まず  $C=U$  の波速と小さな振幅をもって始まる  $\beta(1)$  wave を仮定する。この波は (4.20) 式によって  $\delta(1)_{max}=0.0406$  をもち、その最大波高

$$H(1)_{max} = 0.0406 L(1) \quad (4.54)$$

に達するまで成長する。この波の発達に関しては海面での風の有効せん断力はそれ以上は変わらない。この波に対して (4.54) 式で示される最大の状態が出現した後もエネルギー差  $A-D$  が残っている。それがいまは  $C > U$  の速度をもつ波の発達に対して必要な量であり、 $\beta(1)$  wave は (4.54) 式の最大の steepness をこえることができないから  $\beta(1)$   $\delta(1)$  をこえての波の発達は波長の増大においてのみ認められることになり、この時波の高さはほとんど変わらないことになろう。そして lange Wellen が発達するような状態ではエネルギー差  $A-D$  は 0 に接近すると共に、海面に新しく発生する波においては、 $C < U$  のために風の垂直応力の成分は水粒子の運動と  $\pi$  だけの位相差を生ずる。そして lange Wellen の system が位相速度  $C=1.37 U$  の関係に到達すると  $A=D$  の状態が現われる。すなわちこの状態では風のせん断力によって、混乱した波動に対してなされる仕事量は  $C > U$  をもつ波における垂直応力の負の仕事とエネルギー消費のためにバランスすることになる。

このような  $\beta(1)$  wave の主要な特性である砕波の効果は、 $\beta(1)$  wave の発達に関しては、エネルギー消費の点で最も問題となる。そこで Neumann はこの特性を表わすために (4.35) 式の  $M(\beta_m)$  の値から (4.34) 式で  $\beta=1$  とおいた  $M(1)$  の値までの乱れのための粘性係数の増加を考慮することとし  $\beta(1)$  wave の波高  $H(1)=2a(1)$  と共に乱れの強さが増加すると仮定して次のようにおいた。

$$M(\beta_m) = M(1) \cdot \exp\{2\gamma(1-\beta_m)a/a(1)_m\} \quad (4.55)$$

ここで  $a(1)_m$  は風速に depend する最大振幅で、 $a$  は成長しつつある  $\beta(1)$  wave の振幅である。したがって

$$a(1)_m = L(1) \cdot n \cdot e^{-r} = L(1) \cdot \bar{n}, \quad L(1) = \frac{2\pi}{g} U^2 \quad (4.56)$$

まず (B) の場合を考えると,  $\partial E / \partial t = 0$ ,  $L(1) = \text{const.}$  から

$$-\frac{C}{2} g \rho a \frac{da}{dx} = A - D \quad (4.57)$$

$\beta(1)=1$  であるから, (4.27)式より

$$A = [\gamma^2(\beta_m) + s' \pi n \cdot \exp(-\gamma \beta_m) \cdot (1 - \beta_m)^2] \cdot \rho a \cdot U^3 \quad (4.58)$$

(4.29), (4.55)式から

$$\begin{aligned} D &= 2M(1) \pi^2 g \delta^2 = 2M(\beta_m) \pi^2 \cdot g \frac{4a^2}{L(1)^2} \cdot \exp[2\gamma(1 - \beta_m)a/a(1)_m] \\ &= 2g^2 \cdot \frac{a^2}{U^4} \cdot M(\beta_m) \exp[\gamma(1 - \beta_m)ga/\pi U^2] \end{aligned} \quad (4.59)$$

したがって,  $C=U$ ,  $\beta(1)=1$  を考慮して

$$dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{\rho_a} \cdot \frac{g}{U^2} \cdot \frac{ada}{C_2(\beta_m) - \frac{2g^2 M(\beta_m)}{\rho_a U^4} a^2 \exp\left[\frac{\gamma g}{\pi U^2 \bar{n}} (1 - \beta_m) a\right]} \quad (4.60)$$

さらに,  $\delta(1) = 2a/L(1)$ , および  $g^2/U^4 = 4\pi^2/L^2(1)$  を考えて

$$dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{\rho_a} \cdot \frac{U^2}{g} \cdot \pi^2 \cdot \frac{\delta(1)d\delta(1)}{C_2(\beta_m) - \frac{2\pi^2 g}{\rho_a U^3} \cdot \delta^2(1) M(\beta_m) \exp\left[\frac{\gamma}{\bar{n}} (1 - \beta_m) \delta(1)\right]} \quad (4.61)$$

となる。

(A)の場合には,  $\partial L(1)/\partial x = 0$  であるから

$$dt = \frac{\rho}{\rho_a} \cdot \frac{U}{g} \cdot \pi^2 \cdot \frac{\delta(1)d\delta(1)}{C_2(\beta_m) - \frac{2\pi^2}{\rho_a} \cdot \frac{g}{U^3} \cdot \delta^2(1) M(\beta_m) \exp\left[\frac{\gamma}{\bar{n}} (1 - \beta_m) \delta(1)\right]} \quad (4.62)$$

かくして  $\beta(1)$  wave の発達に対する式が導かれた。

最後に波の発達の最終段階に対しては,  $C > U$  の  $\beta_m^*$  波に対するもの (4.28), (4.34) 式を考えて

(A)の場合は

$$dt = \frac{\rho}{\rho_a} \cdot \frac{4\pi^2 n^2 U}{g} \cdot \frac{\beta^{*2} e^{-2\gamma \beta^*} (3 - \gamma \beta^*)}{C_3(\beta) - B_3(\beta)} d\beta^*, \quad \beta^* > 1 \quad (4.63)$$

(B)の場合は

$$dx = \frac{\rho}{\rho_a} \cdot \frac{2\pi^2 n^2 U^2}{g} \cdot \frac{\beta^{*3} e^{-2\gamma \beta^*} (3 - \gamma \beta^*)}{C_3(\beta) - B_3(\beta)} d\beta^*, \quad \beta^* > 1 \quad (4.64)$$

ここで  $C_3(\beta) = C_2(\beta_m) - s' \pi n e^{-\gamma \beta^*} (1 - \beta^*)^2$

$$B_3(\beta) = \frac{8\pi^2 n^2 g}{\rho_a} \cdot \frac{M(\beta^*) e^{-2\gamma \beta^*}}{U^3 \beta^*}$$

このようにして  $\beta_m$  wave,  $\beta(1)$  wave および  $\beta_m^*$  wave のおのおのにおいて,  $\beta$  は  $gt/U$ , または  $gx/U^2$  の関数として表われ, 同様に  $\delta$  も  $\beta$  を通してこれらの無次元量との関数関係で示されることになる。

図-2.4.9 は3種の  $\beta$  と  $x(\text{km})$  との関係, 図-2.4.10 は  $\beta$  と  $t(\text{hr})$  との関係を示すもので, これらは風速が与えられたときに  $\beta_m$  wave が十分発達するに要する最小距離および時間を与え, また  $\beta(1)$  wave および  $\beta_m^*$  wave が出現するための必要値を示す。図-2.4.11~2.4.14 は  $gx/U^2$  に対する  $\beta$  および  $gH/U^2$  および  $gt/U$  に対する  $\beta$  と  $gH/U^2$  を与えるものである。これらの図における水平直線部分は混乱した海面における3つの characteristic waves の十分に発達した状態を示している。例えば, 風速 16m/sec の風による波を見るとまず  $\beta_m = 0.81$ ,  $C = 13 \text{ m/sec}$  の  $\beta_m$  wave が fetch  $gx/U^2 = 11500$  および duration  $gt/U = 37200$  で十分に発達する。これは  $x \div 300 \text{ km}$ ,  $t = 16.8$  時間である。この大きさは  $L_1 = 107 \text{ m}$ ,  $T_1 = 8.3 \text{ sec}$ ,  $H_1 = 5.9 \text{ m}$  であり, 8.3秒を中心とした周期が多く海面に見られることになる。次に  $\beta(1)$  wave は  $\beta = 1$  に対する  $gx/U^2 = 13210$ ,  $gt/U = 40560$  すなわち  $x = 345 \text{ km}$ ,  $t = 18.4$  時間で現われ, その大きさは  $L_3 = 163 \text{ m}$ ,  $T_3 = 10.2 \text{ sec}$ ,  $H_3 = 6.6 \text{ m}$  である。この  $\beta(1)$  wave はさらに発達を続け  $gx/U^2 = 18060$ ,  $gt/U = 48610$  において wave age  $\beta^* = 1.35$  に達

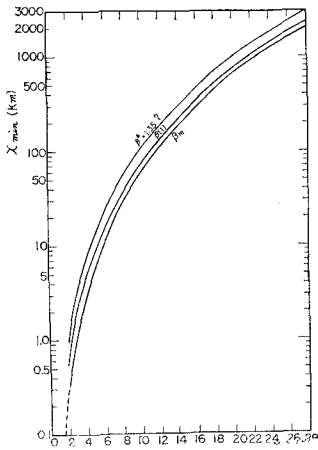


図-2.4.9  $\beta$  に対する最小吹送距離 (Neumann, 1952)

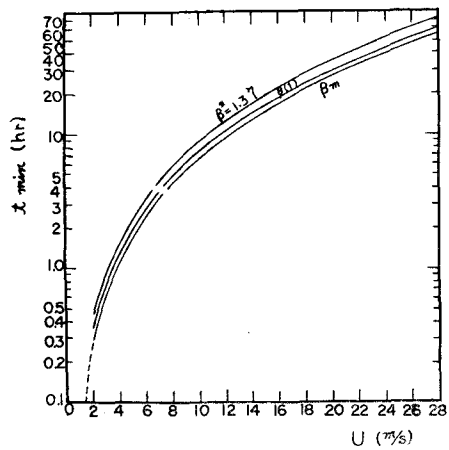


図-2.4.10  $\beta$  に対する最小吹送時間 (Neumann, 1952)

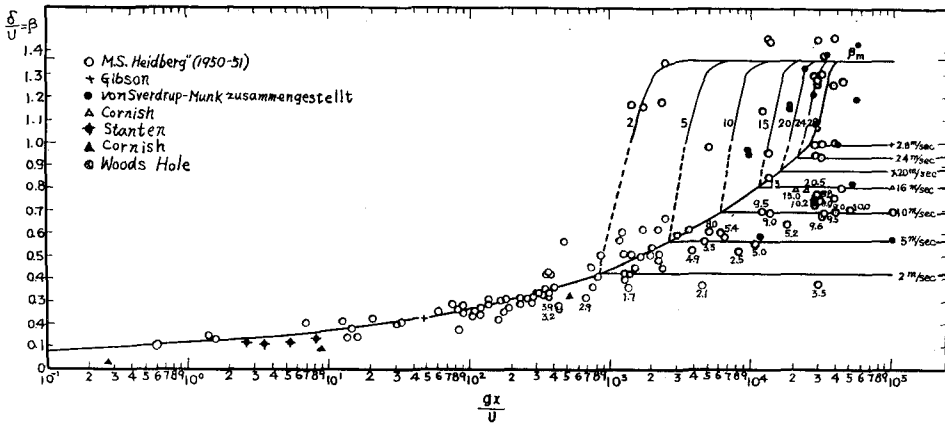


図-2.4.11  $\beta$  と  $gx/U^2$  の関係 (Neumann, 1952)

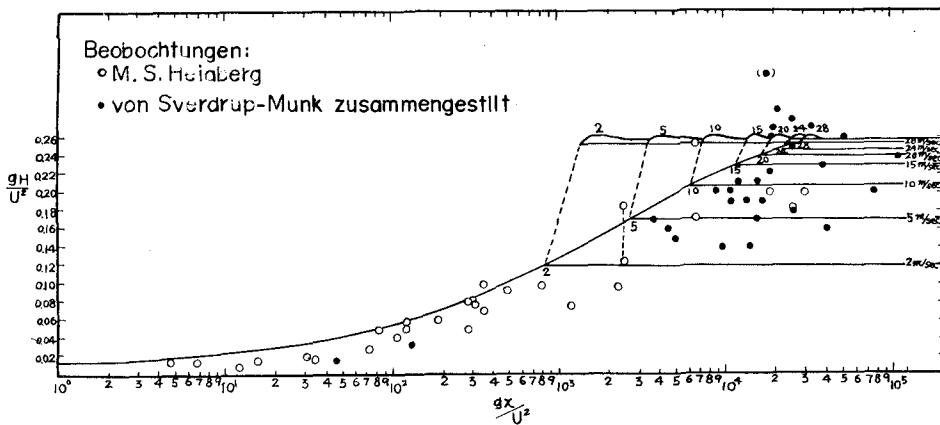


図-2.4.12  $gH/U^2$  と  $gx/U^2$  の関係 (Neumann, 1952)



し発達を終る。この時は  $L_2 = 298\text{m}$ ,  $T_2 = 13.8\text{秒}$ ,  $H_2 = 6.75\text{m}$  であり,  $\beta_m^*$  wave になって  $C = 1.37U$  となり,  $L_2 = 307\text{m}$ ,  $H_2 = 6.8\text{m}$  となる。これらの3つの波が  $U = 16\text{ m/s}$  における海面の波を形成し, その characteristic period は  $8 \sim 15$  秒の間にある。図-2.4.4 のようにして海面の一定点における相次ぐ波の間の時間間隔の頻度分布を観測すると  $6\text{m}$  の平均波高の附近で  $6 \sim 16$  秒の間の周期の分散が見られ, その時の最大頻度は  $8.3$  秒で起っていることが分る。

以上のような Neumann の研究方法は, その過程にかなり多くの仮定が入っていて, それらが現在の立場からみると, かなり矛盾を含んでいる点もある (例えば摩擦係数が風速と共に減少するという仮定は現在の考えとは反対である)。しかしそれらの仮定の1つ1つは Neumann の実測または慎重な考察によって裏付けされたもので, 入り組んだ取り扱いであるが, 多くの示唆を含んでいる。Neumann のこの研究の最も中心となる考え方は混乱した実際の海面状況を唯一つの有義波で処理する考え方に強く反対する立場をとり, Hauptwellen の干渉によって現象を説明しようと試みたことであり, そこに彼の苦心が存すると同時にこの理論のすぐれた点(例えば発達しつつある波に対する風の摩擦係数  $\gamma^2$  を一定でなく, 少なくとも  $\beta$  に関連する形をとるものとし, しかも長い flat な波に重合する短い steep な波の摩擦に対する影響を考慮した点は, 後に Munk の研究によってさらに明らかにされたように Neumann の考察の深さを示すものと思われる)があると考えられる。このような詳細を極めた考察においても, Neumann は風速の垂直分布については全く触れることがなく, 摩擦抵抗において初め波の頂附近の風速  $U_0$  を考えながら, 一転して一般の風速  $U$  に変わった点などは彼の方法における飛躍であったと考えられる。しかしながら, 風速と同程度で進行する波が砕けによって風速よりも早い位相速度の波にエネルギーを伝達していく過程に対する考え方は, Sverdrup および Munk の考え方と対比すると甚だ興味深いものがある。次に示す Neumann のスペクトルはその取り扱いに何らこのような考察を必要としないものであるが, 結局不規則な海面波に対する考え方が上記のような考え方の延長として到達されたものであろうと推察される。

上述した Hauptwellen の考察に引続いて, Neumann は Heidberg 号による周期の目視観測と波高の観測値およびその後米国の New Jersey の Long Branch における Step-resistance type の波高計による表面波形の記録から局地風による波以外のものを注意深く取り除いた資料を用いて, 風によって生じている波のスペクトルを導くことを試みた。そのスペクトルは Neumann spectrum の名で呼ばれる最も信頼度の高いものの1つとして広く用いられているものである。

Neumann はまず大西洋における彼自身が行なった 27000 コの周期測定値を用いて種々の風速に対して十分発達した波の周期の頻度分布を示した。図-2.4.15 はこれを示したもので, 縦軸には出現回数 $\%$ を示している。これによって風に対応して, 十分に発達した波における周期分布が明らかであり, 風速の小さい時の波の周期は狭いスペクトル帯に集中しているが, 風速が大きくなると次第に広い帯に分散していくことが分る。

Neumann の用いた資料の主体は彼の目視観測による見掛けの周期または波高にあるため, スペクトルもまたそれを基として導かれる。このため特に Neumann は見かけの波長や波の steepness について注意を与えている。

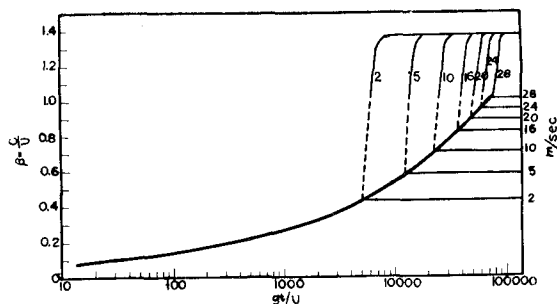


図-2.4.13  $\beta$  と  $gt/U$  の関係 (Neumann, 1952)

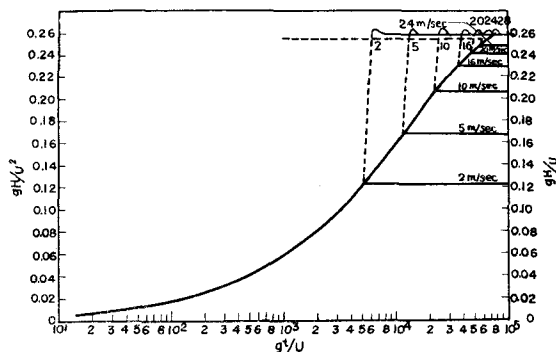
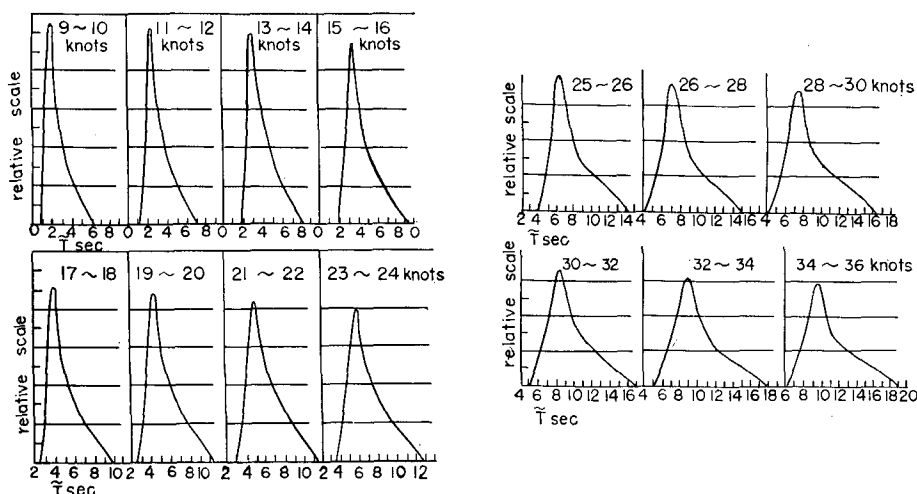


図-2.4.14  $gH/U^2$  と  $gt/U$  の関係 (Neumann, 1952)



図—2.4.15 種々の風速に対する周期の相対頻度 (Neumann, 1953)

波長については従来の古典的理論によって導かれた

$$L = gT^2/2\pi \quad (4.65)$$

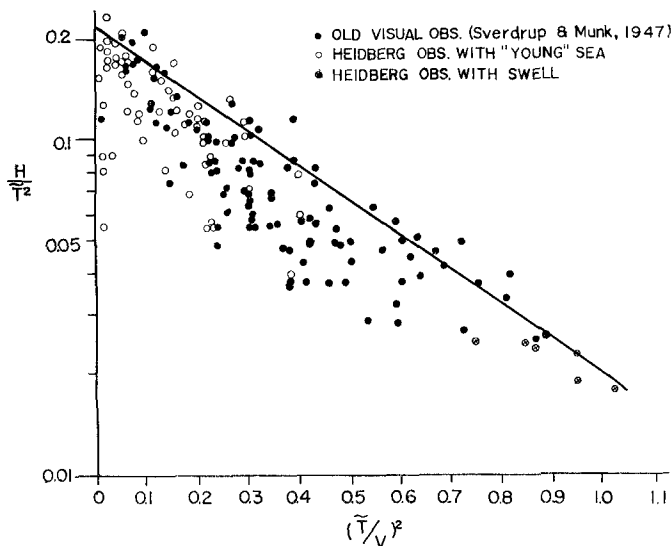
の関係は見かけの周期に対しては適用されず、見かけの波長  $\tilde{L}$  は見かけの周期  $\tilde{T}$  と次の関係にあることを注意した。

$$\tilde{L} = -\frac{2}{3} - \frac{g}{2\pi} \tilde{T}^2 \quad (4.66)$$

このようなことから、Neumann は目視観測の記録からスペクトルを導くに際しては、 $L$  または  $C$  の代りに  $T$  を用いるという方法を取った。実際の混乱した海面においては、発生しつつある極めて小さい波から発達し終って砕けている波までのすべてが存在しているため、一般の目視観測による見かけの波高と見掛けの波長の比として求められる wave steepness と風速との間に良好な関係が求められていない。Sverdrup および Munk

は wave steepness と wave age について波の発達の段階に応じて注目すべき重要な関係のあることを見出し、Neumann 自身もまたそれを修正して用いた。しかしこの wave age についても steepness の場合と同様のことがいえる訳である。

そこで Neumann は wave steepness  $H/L$  に代わるものとして  $H/\tilde{T}^2$ , wave age に代わるものとして  $\tilde{T}/U$  を用いて、Sverdrup および Munk の data で発生域の風速の明らかなうねりと、M. S. Heidberg 号での fetch の短い wave age の小さい波およびうねりの data とを  $\log(H/\tilde{T}^3)$  と  $(\tilde{T}/U)^2$  の座標に



図—2.4.16  $H/\tilde{T}^2$  と  $(\tilde{T}/U)^2$  関係 (Neumann, 1953)

plot して見た。するとその envelope は 図-2.4.16 に示すようにほぼ直線になることが分った。同じことを Long Branch の波形記録について試みたものが 図-2.4.17 である。この場合には連続した波形記録があるので、図-2.4.18 に示すように波形の山から山までの時間を  $\tilde{T}$  とし、その中間の谷から測った前後の山までの高さの平均値をもってその  $\tilde{T}$  に対する見掛けの波高としている。図-2.4.17 では envelope の下の空間をほとんど埋めつくすように点が示されている。これは波形記録では、目視観測には入らないような波まですべてを含んでいるからである。この両者に対する envelope は次式で表わされる。

$$H/\tilde{T}^2 = 0.219 \exp[-2.438(\tilde{T}/U)^2] \quad (4.67)$$

$H$  は m,  $T$  は sec,  $U$  は m/sec である。ここで  $\tilde{T}^2$  が見かけの波長  $\tilde{L}$  に比例するとすれば、上式で 2.483 は丁度  $(g/2\pi)^2$  に等しく、次の形になる。

$$H/\tilde{L} = \text{const.} \exp[-(g\tilde{T}/2\pi U)^2] \quad (4.68)$$

または

$$H = \text{const.} \cdot \frac{g\tilde{T}^2}{2\pi} \cdot \exp[-(g\tilde{T}/2\pi U)^2] \quad (4.69)$$

Neumann によれば envelope がこの法則で表わされるということは、水面に現われる 1 つ 1 つの見かけの波は、見かけの周期  $\tilde{T}$  の周囲に集中する周期  $T$  をもつ多数の成分波の重合の結果であると考えることができる。例えば 図-2.4.18 において見かけの周期  $\tilde{T}$  をもつ 1 つの際立った波が主として  $T_1 + \frac{1}{2}\Delta T$  と  $T_1 - \frac{1}{2}\Delta T$  の間のすべての成分波の重合の結果と仮定すると、これらの波の干渉の結果、波高  $H_1$  をもつ 1 つの際立った波が現われることになる。このスペクトル帯にある多くの波が相次ぐ山の間の点  $A$  で位相が合うとするとそこで 1 つの maximum wave height があらわれる。phase の差があると見かけの波高は小さくなる。

したがって見かけの周期  $\tilde{T}$  における最大の波高は周期  $\tilde{T}$  の周囲の幅  $\Delta T$  のスペクトル帯に対して近似的に spectral wave height を示しているものと考えられる。同様に  $\tilde{T}_2$  をもつ見掛けの波が説明される。 $\tilde{T}_3$  をもつような見かけの波が現われるならば、これはある高さ  $H_3$  をもつ見かけの周期  $\tilde{T}_3$  の附近に集中した短い波の重合の結果と考えて良い。このような  $H_3$  はかなり変動する可能性があるが、碎けのために一点の最大値をこえることができない。このようにして、おのおのの成分波が全く乱雑な位相をもって重合していると考えられるならば  $\Delta T$  の幅を十分に小さく取っていけば、(4.68) 式の関係は spectral wave height に正確に比例していき、またその平方は spectral energy に比例したものに近づくであろうと考えられる。

周期  $T$  をもつ component wave の単位面積についてのエネルギーは波高の 2 乗  $hT^2$  に比例するから spectral energy の分布は  $H_T^2 \cdot \Delta T = \Delta h T^2$  とすると  $H_T^2$  で表わされる。平均周期  $T$  に対して区間  $\Delta T$  における spectral wave energy を  $\Delta V_T$  とすると、これは spectral wave height の平方に比例し、spectral wave height  $H_T$  は次のように定義される。

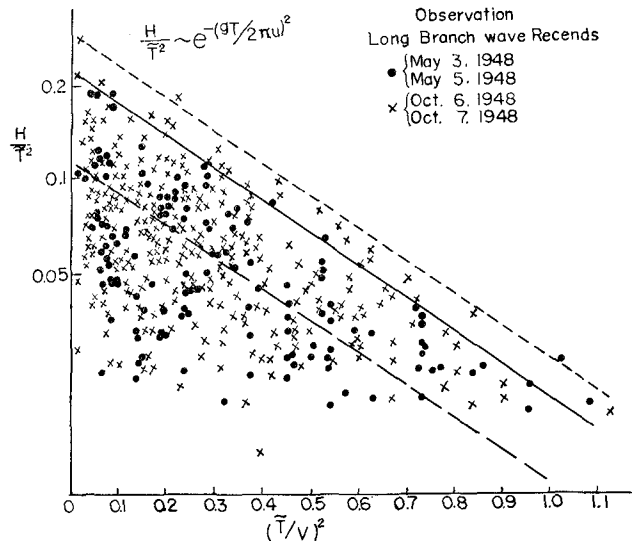


図-2.4.17  $H/\tilde{T}^2$  と  $(\tilde{T}/U)^2$  の関係 (Neumann, 1953)

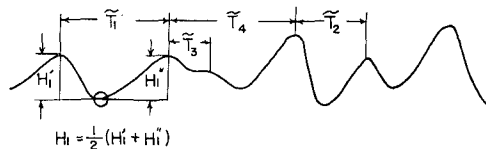


図-2.4.18 波形記録の読み取り (Neumann, 1953)

$$H\tau^2 = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta h\tau^2}{\Delta T} \right) = \frac{\delta h\tau^2}{\delta T} \quad (\text{cm}^2/\text{sec}) \quad (4.70)$$

ここで  $h\tau^2$  はスペクトルにおける1つ1つの波の高さの平方である。また spectral energy density は次式で定義される。

$$W_T = \delta V_T / \delta T \quad (\text{erg}/\text{cm}^2 \text{sec}) \quad (4.71)$$

こうすれば、實際上

$$\delta V_T = W\delta T = \frac{1}{8} \rho g \frac{\delta h\tau^2}{\delta T} dT \quad (\text{erg}/\text{cm}^2) \quad (4.72)$$

は周期が  $T - \frac{1}{2}\delta T$  と  $T + \frac{1}{2}\delta T$  の間にある波の単位面積についての平均のエネルギーと考えられる。海面に存在する波の単位面積についての全エネルギーは

$$V = \frac{1}{8} \rho g \int_0^\infty \frac{\delta h\tau^2}{\delta T} dT \quad (4.73)$$

で表わされる。

さて、ここで (4.70) 式の  $H\tau^2$  が (4.69) 式の  $H$  の平方に比例すると仮定すると

$$\frac{\delta h\tau^2}{\delta T} = H\tau^2 = C \cdot \frac{g^2 T^4}{4\pi^2} \cdot \exp[-2(gT/2\pi U)^2] \quad (\text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}) \quad (4.74)$$

(4.72) 式から

$$\delta V_T = C \cdot \frac{1}{32} \cdot \rho \cdot \frac{g^3}{\pi^2} \cdot T^4 \cdot \exp[-2(gT/2\pi U)^2] dT \quad (4.75)$$

ここで  $C$  は常数であるが、 $\text{sec}^{-1}$  の次元をもっている。

frequency  $\omega = 2\pi/T$  を用い、 $d\omega = -2\pi dT/T^2$ 、 $V\omega d\omega = W_T dT$  とすると、(4.74) 式は

$$dV_\omega = -C \cdot \rho g^3 \cdot \pi^3 \cdot \omega^{-6} \exp[-2g^2/\omega^2 U^2] d\omega \quad (4.76)$$

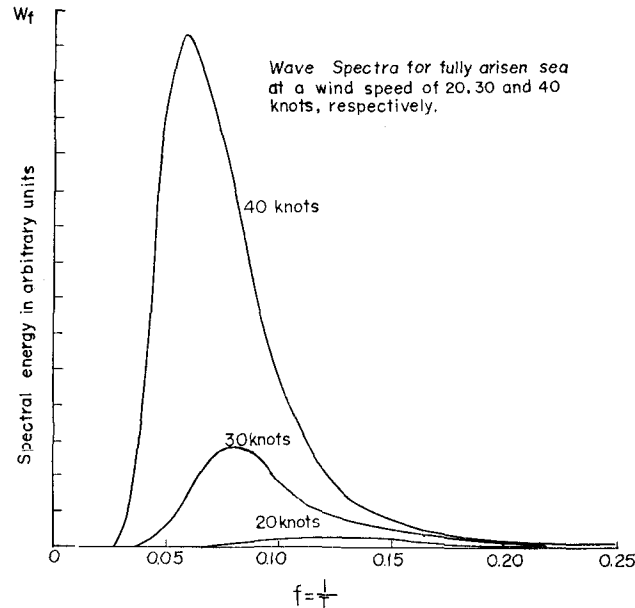


図-2.4.19 十分発達した波に対する Neumann のスペクトル (Neumann, 1953)

これが風速  $U$  において十分発達した海面の波の  $d\omega$  の幅の中の spectral energy をあらわすことになる。図-2.4.19 は  $U=20, 30, 40$  knot に対する (4.76) 式を示したもので、 $C$  が未定であるから縦軸は比例的に示してある。

常数  $C$  を決定するには、次のようにして観測値とスペクトルによる計算波高とを関連づける。

(4.76) 式のスペクトルにおいて周期  $0 \sim T$ 、または frequency  $\infty \sim \omega$  の間の波の全エネルギー  $V(\omega)$  は次のようになる。

$$V(\omega) = \int_\infty^\omega dV_\omega = -C \rho g^3 \pi^3 \int_\infty^\omega \omega^{-6} \cdot \exp[-2g^2/\omega^2 U^2] d\omega \quad (4.77)$$

$b = 2g^2/U^2$ ,  $b/\omega^2 = x^2$ ,  $d\omega = -\sqrt{b} dx/x^2$  とおいて、

$$V(x) = C \rho g^3 \pi^3 \left[ \frac{3}{4\sqrt{b^5}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{b^5}} \left( 2x^2 + \frac{3}{4}x \right) \right] \quad (4.78)$$

となる。 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \Phi(x)$  は誤差積分である。十分に発達した波の全エネルギーは(4.77)式で  $\omega \rightarrow \infty$  において次のように求められる。

$$V = C \cdot \rho \cdot \pi^3 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{3}{32} \cdot \frac{1}{g^2} U^5 \text{ または } \text{const} \cdot U^5 \quad (4.79)$$

すなわち十分に発達した海面では全エネルギーは風速の5乗に比例することになる。

一方、海面上の1点で波形を観測し静水面からの surface elevation を  $\eta(t)$  とし、

$$E = \lim_{\bar{T} \rightarrow \infty} \frac{2}{\bar{T}} \int_{t^*}^{t^* + \bar{T}} \eta^2(t) dt \quad (4.80)$$

たる量を取ると、これは定常的な海面変動に対しては常に収斂し一定値をもつ。 $t^*$  は観測開始の時刻で、 $\bar{T}$  は観測時間である。この時海面の単位面積当たりの全エネルギー  $V$  は potential energy の2倍で次のようになる。

$$V = \lim_{\bar{T} \rightarrow \infty} \frac{\rho g}{\bar{T}} \int_{t^*}^{t^* + \bar{T}} \eta^2(t) dt = \frac{1}{2} \rho g E, \text{ または } E = \frac{2V}{\rho g} \quad (4.81)$$

したがって  $E$  は(4.81)式で全エネルギーと関係づけられる。一方、Longuet-Higgins (1952) および Pierson (1953) によると、不規則な海面波形における平均波高  $H_{mean}$ 、有義波高  $H_{1/3}$ 、1/10 最大波高  $H_{1/10}$  などはこの  $E$  量と次のように関係づけられる。

$$H_{mean} = 1.772 \sqrt{E}, \quad H_{1/3} = 2.832 \sqrt{E}, \quad H_{1/10} = 3.600 \sqrt{E} \quad (4.82)$$

そこで(4.81), (4.79)式から

$$E = C \cdot \pi^3 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{3}{16g^3} U^5 \text{ または, } \sqrt{E} = \left( C \pi^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{3}{16g^3} \right)^{1/2} U^{2.5} \quad (4.83)$$

Neumann は M. S. Heidberg 号での、十分に発達した状態での波の観測結果を図-2.4.20のように描いている。実線はほぼこの観測値の上限を示しており

$$H_{1/10}(\text{cm}) = 0.9 \times 10^{-5} U^{2.5} (\text{cm/sec}) \quad (4.84)$$

に相当する。参考のために  $H_{1/10} = 0.9 \times 10^{-5} U^2$  の線も入れてあるが、面白いことに  $U^{2.5}$  に比例するという傾向の方が現象と一致していることになる。(4.82), (4.83), (4.84)式から

$$\frac{0.9 \times 10^{-5}}{3.600} = \left( C \cdot \pi^3 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{3}{16g^3} \right)^{1/2}$$

の関係となり、 $g = 980 \text{ cm/sec}^2$  として結局  $C$  は次の値となる。

$$C = 8.27 \times 10^{-4} (\text{sec}^{-1}) \quad (4.85)$$

こうして十分に発達した波に対する Neumann のスペクトルが決まるが、このスペクトルから次のようなことが分る。すなわち図-2.4.20から分るようにスペクトルは一つの peak をもつが、これはその附近の frequency の波が最もエネルギー密度の高いことを示しており、これを optimum frequency といい  $\omega_{max}$  で表わすと、それは(4.76)式を  $\omega$  について微分して求められる。

$$\frac{d}{d\omega} [\omega^{-6} \cdot \exp(-2g^2/\omega^2 U^2)] = 0$$

から

$$\omega_{max} U = \sqrt{\frac{2}{3} g} \quad (4.86)$$

また optimum period  $T_{max}$  は

$$T_{max} = 0.405 U (\text{knot}) = 0.788 U (\text{m/s}) \quad (4.87)$$

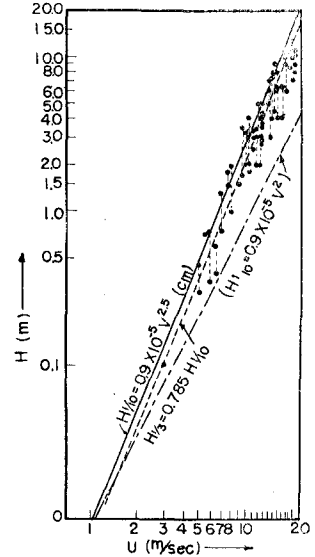


図-2.4.20 十分に発達した波における風速と波高の関係 (Neumann, 1953)

Pierson (1954) によると、このようなスペクトルをもつ波の見かけの周期（相次ぐ波の山の時間間隔）の平均値  $\bar{T}$  は次式で表わされる。

$$\bar{T} = 2\pi \left[ \int_0^\infty dV_\omega / \int_0^\infty d(\omega^2 V_\omega) \right]^{1/2} \quad (4.88)$$

これから Neumann スペクトルに対しては

$$\bar{T}/U = \frac{\pi}{g} \sqrt{3} \quad \text{または} \quad \bar{T} = 0.555 U \text{ (m/s)} \quad (4.89)$$

また平均の phase velocity  $\bar{C}$  は (4.89) 式から

$$\frac{g}{2\pi} \bar{T} = \bar{C} = 0.86 U \quad (4.90)$$

(4.77) 式から  $T=0 \sim T$ , または  $\omega=\infty \sim \omega$  の間の波の全エネルギーはスペクトル線の下に面積に比例し、その平方根は (4.82) 式から波高と関係づけられ、実際にスペクトルを利用して波高を推定する場合には (4.77) 式

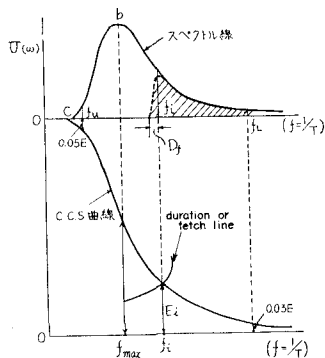


図-2.4.21 Neumann のスペクトルと C. C. S. curve

を用いる方が便利である。このようにスペクトル密度を表わす (4.76) 式を frequency  $\omega$  について積分して図示したものを cocumulative spectra (または略して C. C. S. curve) という。図-2.4.21 はその説明図である。横軸を  $f=1/T$  で目盛り、縦軸を  $E$  で示すと、 $\sqrt{E}$  に (4.82) 式の係数を乗じて、 $f=\infty$  から  $f=f$  までのエネルギーとそれによる波高がわかる。さらに実用的に縦軸を  $\sqrt{E}$  の目盛で示すときもあり、これを distorted cocumulative spectra という。

スペクトルによって示される成分波の周期は下限 0 から風速によって決まる上限  $T$  まで広い範囲にわたって存在するが、Neumann によると十分に発達した状態の波では frequency の大きい端と小さい方の端は実用上無視することができる。そこで C. C. S. curve の下方の端では全体の  $E$  量の 3%, すなわち  $0.03E$  より下は無視し、また上方の端では  $0.05E$  より上は無視される。例えば風速 30 ノットの

全  $E$  量は  $E=58.5(\text{ft})^2$  であり、 $0.05E=2.9$ , この値は C. C. S. curve 上では  $f=0.06$  すなわち  $T=16.7$  秒に当る。これは 30 ノットの風速で十分発達した波における周期の significant range の上限を示すものと考えて良い。また  $0.03E=1.76$  は C. C. S. curve の  $f=0.213$  すなわち  $T=4.7$  秒に当る。したがって周期の significant range は  $4.7 \sim 16.7$  秒である。

以上は fetch および duration が十分長く、十分に発達した状態での波のスペクトルについて述べたものであるが、fetch および duration が有限の場合については、おのおのの風速に対して C. C. S. curve 上に fetch および duration line が示される。これと C. C. S. curve との交点に対応する frequency  $f_i$  よりも大きい frequency の波のみが成長しており、それ以下の frequency はほとんど出現していないと考える (図-2.4.21 では斜線の部分に相当する)。実際にはこの  $f_i$  が optimum frequency  $f_{max}$  よりも大きいときには、 $f_i$  よりも  $D_f$  だけ小さい frequency の波までは成長を始めていると考えられる。

$$D_f = 0.15 f_i \quad (4.91)$$

このように有限の fetch および duration における  $f_i$  を示す fetch line または duration line は前述の Hauptwellen の計算において (A) および (B) の場合に対して求められた  $\beta_m$ ,  $\beta(1)$  および  $\beta^*_m$  wave の発達から計算されたものである。

このようにして作られた C. C. S. curve による実際の海の波の予知を行なう具体的方法が Pierson および James により進められ、いわゆる P-N-J 法として広く利用されている。

Neumann によって提出されたこのスペクトルは、例えば (4.85) 式の常数が無次元量でないこと、 $\omega$  の大きい部分のスペクトルの形が Phillips の  $\omega^{-5}$  法則に一致しないこと、あるいはこのスペクトルによる波高が風速の 2.5 乗に比例し、風速の 2 乗に比例するという他の方法との差異が大きいことなど、種々の点で批判されることも

あったが、既述のように Neumann 自身の実際の海での体験と慎重な考察および資料に裏付けられたもので、最も信頼あるスペクトルとして用いられている。

#### 参 考 文 献

- Bretschneider, C. L. (1952): "The Generation and Decay of Wind Waves in Deep Water." Trans. Amer. Geoph. Uni., Vol. 37, No. 3.
- Bretschneider, C. L. (1959): "Wave Variability and Wave Spectra for Wind-Generated Gravity Waves." Technical Memo. No. 118, B.E.B.
- Burling, R.W. (1955): "Wind Generation of Waves on Water." Ph. D. Dissertation, Imperial College, Univ. of London.
- Darbyshire, J. (1952): "The Generation of Waves by Wind." Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol. 215.
- Darbyshire, J. (1955): "An Investigation of Storm Waves in the North Atlantic Ocean." Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol. 230.
- Darbyshire, J. (1956): "An Investigation into the Generation of Waves when the Fetch of the Wind is less than 100 Miles." Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. Lond. Vol. 82, No. 354.
- Darbyshire, J. (1959): "A Further Investigation of Wind-Generated Waves." Deut. Hydro. Zeit. Bd. 12, Ht. 1.
- Darbyshire, J. (1959): "The Spectra of Coastal Waves." D.H.Z. Bd. 12, Ht. 4.
- Eckart, C. (1953): "The Generation of Wind Waves on a Water Surface." Jour. Appl. Physics, Vol. 24, No. 12.
- Ellison, T.H. (1956): "Atmospheric Turbulence." Surveys in Mechanics, Cambridge Univ. Press.
- Francis, J.R.D. (1951): "The Aerodynamic Drag of a Free Water Surface." Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A, Vol. 206.
- Jeffreys, H. (1925): "On the Formation of Water Waves by Wind." Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A, Vol. 107.
- Jeffreys, H. (1926): "On the Formation of Water Waves by Wind (Second Paper)." Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A, Vol. 110.
- Johnson, J.W. (1948): "The Characteristics of Wind Waves on Lakes and Protected Bays." Trans. Amer. Geoph. Uni., Vol. 29, No. 5.
- Johnson, J.W. (1950): "Relationships between Wind and Waves, Abbotts Lagoon, California." Trans. Amer. Geoph. Uni., Vol. 31, No. 3.
- Johnson, J.W. and E.K. Rice (1952): "A Laboratory Investigation of Wind-Generated Waves." Trans. Amer. Geoph. Uni., Vol. 33, No. 6.
- Kelvin and Helmholtz (1871): Lamb, Hydrodynamics, 1930, 231, 232.
- Longuet-Higgins, M.S. (1952): "On the Statistical Distribution of the Heights of Sea Waves." Jour. Mar. Res., Vol. 11, No. 3.
- Longuet-Higgins, M.S., D.E. Cartwright and N.D. Smith (1961): "Observations of the Directional Spectrum of Sea Waves using the Motions of a Floating Buoy." Proc. Conf. Ocean Wave Spectrum, Easton, Maryland, U.S. Navy Oceano. Office.
- Keulegan, G.H. (1953): "Hydrodynamic Effects of Gales on Lake Erie." Jour. Res. Nat. Bur. Sta., Vol. 50, No. 2.
- 国司秀明(1962): "風洞水槽による風波の研究(II), 風波の発生と発達について", 日本海洋学会誌, 創立20周年記念論文集.
- Lin, C.C. (1955): "The Theory of Hydrodynamic Stability, p. 60." Cambridge Univ. Press.

- Miles, J.W. (1957): "On the Generation of Surface Waves by Shear Flows." Jour. Fluid Mechanics, Vol. 3.
- Miles, J.W. (1959): "On the Generation of Surface Waves by Shear Flows (Part 2)." Jour. Fluid Mech., Vol. 6.
- Miles, J.W. (1960): "On the Generation of Surface Waves by Turbulent Shear Flows (Part 3)." Jour. Fluid Mech., Vol. 7.
- Miles, J.W. (1962): "On the Generation of Surface Waves by Shear Flows (Part 4)." Jour. Fluid Mech., Vol. 13.
- Motzfeld, H. (1937): "Die Turbulente Strömung an Welligen Wänden." Zeit. Ang. Math. Mech., Bd. 7, Ht. 4.
- Neumann, G. (1949): "Die Entstehung der Wasserwellen von Wind." Deut. Hydro. Zeit., Bd. 2, Ht. 5.
- Neumann, G. (1950): "Über Seegang, Dunung und Wind." D.H.Z., Bd. 3, Ht. 1/2.
- Neumann, G. (1952): "Über die komplexe Natur des Seeganges. 1 Teil." D.H.Z., Bd. 5, Ht. 2/3.
- Neumann, G. (1952): "Über die komplexe Natur des Seeganges. 2 Teil." D.H.Z., Bd. 5, Ht. 5/6.
- Neumann, G. (1953): "On Ocean Wave Spectra and a New Method of Forecasting Wind-Generated Sea." Tech. Memo. No. 43, B.E.B.
- Phillips, O.M. (1957): "On the Generation of Waves by Turbulent Wind." J.F. M., Vol. 2.
- Phillips, O.M. (1958): "The Equilibrium Range in the Spectrum of Wind Generated Waves." J.F.M., Vol. 4.
- Pierson, W.J.Jr. (1954): "An Interpretation of the Observable Properties of 'Sea' Waves in Terms of Energy Spectrum of the Gaussian Record." Trans. Amer. Geoph. Uni., Vol. 35, No.5.
- Pierson, W.J.Jr., G. Neumann, and R.W. James (1955): "Practical Methods for Observing and Forecasting Ocean Waves by Means of Wave Spectra and Statistics." U.S. Navy Hydro. Office, Pub. No. 603.
- Sheppard, P.A. (1958): "Transfer across the Earth's Surface and through the Air above." Quart. Jour. Roy. Meteor. Soc., Vol. 84.
- Stanton, T., D. Marshall and R. Houghton (1932): "The Growth of Waves on Water due to the Action of the Wind." Proc. Roy. Soc. London. Ser. A, Vol. 137.
- Sverdrup, H.U. and W.H. Munk (1947): "Wind Sea and Swell; Theory of Relations for Forecasting." U.S. Hydrographic Office, Pub. No. 601.
- Thijssse, J. Th. (1952): "Growth of Wind-Generated Waves and Energy Transfer." Gravity Waves, Nat. Bur. Stand. Cir. 521.
- Van Dorn, W.G. (1953): "Wind Stress on an Artificial Pond." Jour. Mar. Res., Vol. 12, No.3.
- Wilson, B.W. (1955): "Graphical Approach to the Forecasting of Waves in Moving Fetches." Tech. Memo. No. 73, B.E.B.