付　録　I　連立偏微分方程式における特性帯の理論

1.　連立偏微分方程式 (A.I-1) 式を考える。

$$\left.\begin{aligned} A_1u_t + B_1u_x + C_1v_t + D_1v_x + E_1 = 0 \\ A_2u_t + B_2u_x + C_2v_t + D_2v_x + E_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A.I-1)}$$

ただし係数 $A_1, A_2, B_1, B_2, \cdots\cdots E_1, E_2$ はすべて独立変数 t, x および従属変数 u, v のみの関数で u, v の t, x に関する導関数を含まないものとする。

u_t, u_x, v_t, v_x を未知量と考えると，(A.I-1)式は4つの未知量に対する2個の条件式である。そこでさらに u, v の t, x に関する全微分の式 (A.I-2)式を考える。

$$\left.\begin{aligned} \delta t u_t + \delta x u_x \qquad\qquad &= \delta u \\ \delta t v_t + \delta x v_x &= \delta v \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A.I-2)}$$

(A.I-1), (A.I-2)式は u_t, u_x, v_t, v_x に対する4個の連立一次方程式であるから，これを解いて未知量を求めることができる。係数行列式を $\varDelta$, $\varDelta$ の第 i 列を $-E_1, -E_2, \delta u, \delta v$ でおきかえて得られる行列式を $\varDelta_i$ とする。すなわち，

$$\varDelta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ \delta t & \delta x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta t & \delta x \end{vmatrix} \qquad \text{(A.I-3)}$$

$$\left.\begin{aligned} \varDelta_1 = \begin{vmatrix} -E_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ -E_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ \delta u & \delta x & 0 & 0 \\ \delta v & 0 & \delta t & \delta x \end{vmatrix}, \qquad \varDelta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & -E_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & -E_2 & C_2 & D_2 \\ \delta t & \delta u & 0 & 0 \\ 0 & \delta v & \delta t & \delta x \end{vmatrix}, \\ \varDelta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & -E_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & -E_2 & D_2 \\ \delta t & \delta x & \delta u & 0 \\ 0 & 0 & \delta v & \delta x \end{vmatrix}, \qquad \varDelta_4 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -E_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -E_2 \\ \delta t & \delta x & 0 & \delta u \\ 0 & 0 & \delta t & \delta v \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A.I-4)}$$

$\varDelta, \varDelta_i$ を用いれば，u_t, u_x, v_t, v_x は (A.I-5)式であらわされる。

$$u_t = \frac{\varDelta_1}{\varDelta}, \quad u_x = \frac{\varDelta_2}{\varDelta}, \quad v_t = \frac{\varDelta_3}{\varDelta}, \quad v_x = \frac{\varDelta_4}{\varDelta} \qquad \text{(A.I-5)}$$

ここで一例として，静止した水域に波が進入する場合を考えると，波の先端では，(A. I-5)式に与えた諸量は不連続であるから，0/0 の形の不定形になるであろう。

まず分母を0として，$\varDelta=0$ の条件をしらべる。(A.I-3)式を用いて計算すれば (A.I-6)式が得られる。

$$\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}(\delta x)^2 - \left\{ \begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \right\} \delta x \delta t + \begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix} (\delta t)^2 = 0 \qquad \text{(A.I-6)}$$

計算を簡単にするために新らしい記号 (A.I-7)式を用いる。

$$[PQ] = P_1Q_2 - P_2Q_1 \qquad \text{(A.I-7)}$$

(A.I-7)式を用いて (A.I-6)式を書き直すと (A.I-8)式が得られる。

$$a(\delta x/\delta t)^2 - 2b(\delta x/\delta t) + c = 0 \qquad \text{(A.I-8)}$$

ただし

$$a = [AC], \; 2b = [AD] + [BC], \quad c = [BD] \qquad \text{(A.I-9)}$$

(A.I-8)式を $(\delta x/\delta t)$ の2次式とみなし，2根を λ_+, λ_- と書くと

$$\lambda_+ = \frac{b + \sqrt{(b^2 - ac)}}{a}, \quad \lambda_- = \frac{b - \sqrt{(b^2 - ac)}}{a} \qquad \text{(A.I-10)}$$

すなわち，$\varDelta=0$ の条件として (A.I-11) 式が得られる。

$$\delta x - \lambda_+ \delta t = 0 \qquad \text{(A.I-11a)}$$

$$\delta x - \delta\lambda_{-}\delta t = 0 \qquad \text{(A.I-11b)}$$

つぎに分子が0になる場合として $\Delta_4 = 0$ を考える。計算の結果 (A.I-12)式が得られる。

$$[AB]\,\delta u + \{\,[AC]\,(\delta x/\delta t) - [BC]\}\,\delta v + \{\,[AE]\,(\delta x/\delta t) - [BE]\}\,\delta t = 0 \qquad \text{(A.I-12)}$$

以上をまとめて書くと，例えば $v_x = 0/0$ という条件は (A.I-13) 式となる。

$$\delta x = \lambda_{+}\delta t \qquad \text{(A.I-13a)}$$

$$T\delta u + (a\lambda_{+} - S)\,\delta v + (L\lambda_{+} - M)\,\delta t = 0 \qquad \text{(A.I-13b)}$$

$$\delta x = \lambda_{-}\delta t \qquad \text{(A.I.-13c)}$$

$$T\delta u + (a\lambda_{-} - S)\,\delta v + (L\lambda_{-} - M)\,\delta t = 0 \qquad \text{(A.I-13d)}$$

ここに

$$\left.\begin{array}{l} T = [AB],\ a = [AC],\ S = [BC] \\ L = [AE],\ M = [BE] \end{array}\right\} \qquad \text{(A.I-14)}$$

2. 前節の理論を**第2章** (2.3)，(2.4)式に適用する。

$$[v\,(h+\eta)\,]_x = -\,\eta_t \qquad (2.3)$$

$$v_t + vv_x = -\,\eta_x \qquad (2.4)$$

ここで $c^2 = h + \eta$ とおき (2.3)，(2.4)式を書き直すと (A.I-15)式が得られる。

$$\left.\begin{array}{l} 2cc_t + 2vcc_x \qquad + c^2v_x = 0 \\ \qquad 2cc_x + v_t \ + vv_x = h_x \end{array}\right\} \qquad \text{(A.I-15)}$$

(A.I-1)式と比較すると次のようになる。

$$A_1 = 2c, \quad B_1 = 2vc, \quad C_1 = 0, \quad D_1 = c^2, \quad E_1 = 0$$

$$A_2 = 0, \quad B_2 = 2c, \quad C_2 = 1, \quad D_2 = v, \quad E_2 = -\,h_x$$

(A.I-14)式にこれらの値を代入すると

$$T = [AB] = 4c^2, \quad a = [AC] = 2c, \quad S = [BC] = 2vc$$

$$L = [AE] = -\,2ch_x, \quad M = [BE] = -\,2vch_x$$

また λ_{+}，λ_{-} を求めるために (A.I-9)式を計算すると

$$2b = [AD] + [BC] = 4vc,\ \text{または}\ b = 2vc$$

$$c = [BD] = 2c\,(v^2 - c^2)$$

すなわち (A.I-10)式から

$$\lambda_{+} = (v+c), \quad \lambda_{-} = (v-c) \qquad \text{(A.I-16)}$$

(A.I-16)式を (A.I-13)式に代入すると**第2章** (2.5)～(2.8)式が得られる。

$$\delta x = (v + c)\,\delta t \qquad (2\text{-}5)$$

$$\delta\,(v + 2c) - h_x\delta t = 0 \qquad (2\text{-}6)$$

$$\delta x = (v - c)\,\delta t \qquad (2\text{-}7)$$

$$\delta\,(v - 2c) - h_x\delta t = 0 \qquad (2\text{-}8)$$

3. (2-5)～(2-8)式の連立微分方程式が (2-3)，(2-4)式と同等であることは，次のように確かめられる。全微分の関係 (A.I-2)式を参照して(2-6)，(2-8)式を書き直すと (A.I-17)，(A.I-18)式が得られる。

$$2c_t + 2\,(v + c)\,c_x + v_t + (v + c)\,v_x - h_x = 0 \qquad \text{(A.I-17)}$$

$$-\,2c_t - 2\,(v - c)\,c_x + v_t + (v - c)\,v_x - h_x = 0 \qquad \text{(A.I-18)}$$

(A.I-17)式と (A.I-18)式を加えると，$2cc_x = h_x + \eta_x$ を考慮して

$$v_t + vv_x = -\,\eta_x \qquad (2\text{-}4)$$

(A.I-17)式から (A.I-18)式を差引けば，$2cc_t = \eta_t$ であるから

$$[v\,(h + \eta)]_x = -\,\eta_t \qquad (2\text{-}3)$$

それぞれもとの微分方程式が得られる。

参　考　文　献

犬井　鉄郎〔1951〕：応用偏微分方程式論（岩波）

河村　龍馬〔1958〕：高速空気力学（日刊工業新聞）
岸　　力〔1953〕：特性曲線法による非定常流の解き方(1)，建設省土木研究所報告，85号。

付　録　II　浅い水域における移動性の波の理論

（Keulegan G. H. and Patterson G.W. [1940] : Mathematical Theory of Irrotational Translation Waves, Journal of Research, Nat. Bur. of Stand., V. 24　要約）

1.　水路底に x 軸，鉛直上向きに z 軸をとる。速度ポテンシャルを ϕ とすると

$$u = -\partial\phi/\partial x \tag{A.II-1}$$

$$w = -\partial\phi/\partial z \tag{A.II-2}$$

また ϕ は Laplaceの式を満たす。

$$\partial^2\phi/\partial x^2 + \partial^2\phi/\partial z^2 = 0 \tag{A.II-3}$$

任意の深さ z の点の圧力は (A.II-4)式で与えられる。

$$p/\rho = \partial\phi/\partial t - gz - \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + F(t) \tag{A.II-4}$$

水路の静止水深を h，静水面から測った波面の高さを η とする。すなわち波の表面を $z = h + \eta$ であらわす。(A.II-4)式で $F(t)$を定めるために，自由表面上の無限遠点に対して次の条件を与える。

$z = h$ で $\partial\phi/\partial t = u = w = \eta = 0$

$p = p_a$

(A.II-4)式にこの条件を代入すると

$$F(t) = p_a/\rho + gh$$

自由表面では到る処 $p = p_a$ であるから，自由表面の力学的条件は (A.II-5)式になる。

$$\partial\phi/\partial t - g\eta - \frac{1}{2}(u^2 + w^2) = 0, \qquad z = h + \eta \tag{A.II-5}$$

(A.II-5)式は $z = h$ または $\eta = 0$ の位置で $\partial\phi/\partial t = u = w = 0$ の条件が成り立てばよいのであるから，必ずしも無限遠点で水が静止していなくてもよいのである。

自由表面の運動学的条件は (A.II-6)式である。

$$w = \partial\eta/\partial t + u\partial\eta/\partial x, \qquad z = h + \eta \tag{A.II-6}$$

また水路底では $w = 0$ であるから

$$\partial\phi/\partial z = 0\ , \qquad z = 0 \tag{A.II-7}$$

条件 (A.II-7)式を考え，ϕ が (A.II-8)式であらわされると仮定する。

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n z^n \quad , \quad \phi_1 = 0 \tag{A.II-8}$$

ただし ϕ_n は x,t のみの関数である。

(A.II-8)式を (A.II-3)式に代入すると (A.II-9)式が得られる。

$$\phi = \phi_0 - \frac{z^2}{2!}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2} + \frac{z^4}{4!}\frac{\partial^4\phi_0}{\partial x^4} - \frac{z^6}{6!}\frac{\partial^6\phi_0}{\partial x^6} + \cdots\cdots \tag{A.II-9}$$

(A.II-9)式から ϕ, $\partial\phi/\partial z$ の第1近似値は (A.II-10)式になる。

$$\left.\begin{array}{l} \phi = \phi_0 \\ -\partial\phi/\partial z = w = z\partial^2\phi_0/\partial x^2 \end{array}\right\} \tag{A.II-10}$$

(A.II-10)式を (A.II-5)式および (A.II-6)式に代入すると (A.II-11)式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}&\partial\phi_0/\partial t - g\eta = 0\\&-h\,(\partial^2\phi_0/\partial x^2) + \partial\eta/\partial t = 0\end{aligned}\right\} \tag{A.II-11}$$

(A.II-11)式で x の正の方向に進む波だけを考えると解は (A.II-12)式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}&\eta/h = f\,(x-ct)\\&u/c = f\,(x-ct)\\&\ \ c = \sqrt{(gh)}\end{aligned}\right\} \tag{A.II-12}$$

(A.II-12)式から，x の正の方向に進む波については，第1近似において (A.II-13)式が成り立つ。

$$u_0 = \sqrt{(g/h)}\,\eta \tag{A.II-13}$$

2. つぎに第2次近似に進む前に，波の伝播速度について考察する。ある点 x に一つの鉛直平面を考え，その平面が常に前面に同一の水量を保ちながら移動するとき，その平面の移動速度を波の伝播速度と定義する。この定義は Boussinesq によるものである。

定義により，伝播速度を ω と書けば，次の関係が成り立たねばならない。

$$\eta\omega\,\Delta t = \int_x^\infty \frac{\partial\eta}{\partial t}\,\Delta t\cdot dx$$

両辺を Δt で割り，x で微分すると (A.II-14)式が得られる。

$$\partial\eta/\partial t + \partial(\eta\omega)/\partial x = 0 \tag{A.II-14}$$

もし波が変形せずに伝播するものとすれば，ω は一定値であるから (A.II-14)式は (A.II-15)式になる。

$$\partial\eta/\partial t + \omega\partial\eta/\partial x = 0 \tag{A.II-15}$$

(A.II-14)式と連続の条件を比較すれば

$$\partial Q/\partial x = \partial\ [U(h+\eta)]\,/\partial x = \partial\,(\eta\omega)\,/\partial x \tag{A.II-16}$$

ここに Q：任意の鉛直断面の流量

U：任意の鉛直断面内の平均流速

(A.II-16)式を積分するに当り，$\eta = 0$ の点で $U=0$ であるならば，(A.II-17)，(A.II-18)式が成り立つ。

$$U = \eta\omega/\,(h+\eta) \tag{A.II-17}$$

$$\omega = Q/\eta \tag{A.II-18}$$

3. 表面条件(A.II-5)，(A.II-6)式において w^2 の項を省略し，また u の代りに第1近似値 u_0 すなわち(A.II-13)式を用いればそれぞれ (A.II-19)，(A.II-20)式が得られる。

$$g\eta - \partial\phi/\partial t + \frac{1}{2}\,(g/h)\,\eta^2 = 0 \tag{A.II-19}$$

$$\partial\phi/\partial z + \partial\eta/\partial t + \sqrt{(g/h)}\,\eta\,(\partial\eta/\partial x) = 0 \tag{A.II-20}$$

(A.II-9)式で初めの2項だけを考え，さらに(A.II-11)式を考慮すれば $\partial\phi/\partial t$ の第2近似値として(A.II-21)式が得られる。

$$\partial\phi/\partial t = \partial\phi_0/\partial t - (h^2g/2)\,\partial^2\eta/\partial x^2 \tag{A.II-21}$$

つぎに $\partial\phi/\partial z$ の第2近似値を求めるに，x の正の方向にだけ進む波を考えて高次の項に (A.II-13)式を用いれば(A.II-22)式が得られる。

$$\begin{aligned}\partial\phi/\partial z = &-h\partial^2\phi_0/\partial x^2 + \sqrt{(g/h)}\,\eta\,\partial\eta/\partial x\\&-(h^3/6)\sqrt{(g/h)}\,\partial^3\eta/\partial x^3\end{aligned} \tag{A.II-22}$$

(A.II-21)，(A.II-22)式を (A.II-19)，(A.II-20)式に代入すると (A.II-23)式および(A.II-24)式が得られる。

$$g\eta - \partial\phi_0/\partial t + (g/2)\ [(\eta^2/h) + h^2\partial^2\eta/\partial x^2] = 0 \tag{A.II-23}$$

$$\partial\eta/\partial t - h\partial^2\phi_0/\partial x^2 + \sqrt{(g/h)}\,\frac{\partial}{\partial x}\,[(\eta^2/h) - (h^2/6)\,\partial^2\eta/\partial x^2] = 0 \tag{A.II-24}$$

両式から ϕ_0 を消去するために，(A.II-23)式を x で2回，(A.II-24)式を t で1回微分する。t に関する微分の代りに近似式 (A.II-25)式を用いる。

$$\partial/\partial t \cong -\sqrt{(gh)}\cdot\partial/\partial x \tag{A.II-25}$$

計算の結果 (A.II-26)式が得られる。

$$\partial^2\eta/\partial t^2 = gh\partial^2\eta/\partial x^2 + gh\partial^2/\partial x^2\,[(3/2)\,(\eta^2/h) + (h^2/3)\,(\partial^2\eta/\partial x^2)] \qquad \text{(A.II-26)}$$

この式は第２近似における波の運動の基本式で第１近似の (A.II-11)式と比較すれば，右辺第２項が補正項として加ったことがわかる。補正項には波高と波形の曲率の効果が含くまれている。**第１章** (1.8)式は (A.II-26)式である。

4. つぎに流速成分 u, w を求める。(A.II-24)式において $\partial\eta/\partial t$ を (A.II-14)式を用いて $\tau - \partial\,(\eta\omega)/\partial x$ と書き変えると，底面流速 u_0 の式として (A.II-27)式が得られる。

$$u_0 = \sqrt{(g/h)}\,[\eta - (\eta^2/4h) + (h^2/3)(\partial^2\eta/\partial x^2)] \qquad \text{(A.II-27)}$$

(A.II-9)式に (A.II-27)式を代入すれば，流速成分の第２近似として (A.II-28)，(A.II-29)式が得られる。

$$u = \sqrt{(gh)}\,[\,(\eta/h) - (\eta^2/4h^2) + (h/3 - z^2/2h)(\partial^2\eta/\partial x^2)] \qquad \text{(A.II-28)},$$

$$w = -z\sqrt{(gh)}\,[(1/h - \eta/2h^2)(\partial\eta/\partial x) + (h/3 - z^2/6h)(\partial^3\eta/\partial x^3)] \qquad \text{(A.II-29)}$$

5. 第２近似における波の運動の基本式 (A.II-26)式からクノイド波の理論が導かれる。伝播にともない変形しない不変性の波を扱うから，新らしい変数 (A.II-30)式を用いる。

$$\left.\begin{aligned}(x - \omega t) &= \xi h\\ \eta &= \zeta h\\ \left(\frac{\omega^2}{gh} - 1\right) &= b\end{aligned}\right\} \qquad \text{(A.II-30)}$$

(A.II-30)式を (A.II-26)式に代入すると $\partial^2/\partial t^2 = \omega^2\partial^2/\partial x^2$ であるから (A.II-31)式が得られる。

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\,(6b\zeta - 9\zeta^2 - 2\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}) = 0 \qquad \text{(A.II-31)}$$

(A.II-31)式を２回積分すれば (A.II-32)式が得られる。

$$6b\zeta - 9\zeta^2 - 2\partial^2\zeta/\partial\xi^2 + c_1\xi + c_2 = 0 \qquad \text{(A.II-32)}$$

c_1, c_2 は積分常数であるが，ξ の如何にかかわらず (A.II-32)式が成立するためには $c_1 = 0$ でなければならない。さらに $\zeta = 0$ の点で $\partial^2\zeta/\partial\xi^2 = 0$ であるならば $c_2 = 0$ となり，これは孤立波を与える。

ここでは条件をさらに一般化して，$\zeta = 0$ の点でも $\partial\zeta/\partial\xi$, $\partial^2\zeta/\partial\xi^2$ は必ずしも０でない場合を考える。(A.II-32)式で $c_2 \neq 0$ とし，両辺に $(\partial\zeta/\partial\xi)\,d\xi$ を乗じて積分すると (A.II-33)式が得られる。

$$(d\zeta/d\xi)^2 = 3b\zeta^2 - 3\zeta^3 + 3c_2\zeta + 3c_1 \qquad \text{(A.II-33)}$$

ただし c_1 は別の積分常数である。

(A.II-33)式において $(d\zeta/d\xi)$ は $\zeta = 0$ で実数であるから c_1 は正である。もし右辺の３次式の根を $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ とすれば次の関係が成り立つ，

$$\zeta_1 \cdot \zeta_2 \cdot \zeta_3 = c_1$$

この関係から，３根は全部正か，一つが正で他の二つは負，あるいは一つが正で他の二つは複素数である。このうち無限の波列を考えている今の問題に適合するのは第二の場合である。すなわち一つの波について $d\zeta/d\xi = 0$ となる ζ の値が３個あり，１個は正，他の２個は負である。この３根をあらためて ζ_1, $-\zeta_2$, $-\zeta_3$, $\zeta_3 \geqq \zeta_2$ と書くと (A.II-33)式は (A.II-34)，(A.II-35)式のようにあらわされる。

$$(d\zeta/d\xi)^2 = 3\,(\zeta_1 - \zeta)\,(\zeta + \zeta_2)\,(\zeta + \zeta_3) \qquad \text{(A.II-34)}$$

$$\left.\begin{aligned}b &= \zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3\\ c_2 &= -\zeta_2\zeta_3 + \zeta_1\zeta_3 + \zeta_1\zeta_2\\ c_1 &= \zeta_1\zeta_2\zeta_3\end{aligned}\right\} \qquad \text{(A.II-35)}$$

(A.II-34)式から $\zeta_1 \geqq \zeta \geqq -\zeta_2$ の範囲でだけ ζ が実在し得ることがわかるから，新らしい変数 χ を用いて ζ を (A.II-36)式であらわす。

$$\zeta = \zeta_1\cos^2\chi - \zeta_2\sin^2\chi \qquad \text{(A.II-36)}$$

(A.II-36)式を (A.II-34)式に代入すると (A.II-37)式となる。

$$\beta\,(d\chi/d\xi) = \sqrt{(1 - k^2\sin^2\chi)} \qquad \text{(A.II-37)}$$

ただし β, k^2 はそれぞれ (A.II-38)，(A.II-39)式で与えられる。

$$\beta=\sqrt{\left[\frac{4}{3(\zeta_1+\zeta_3)}\right]}=\sqrt{\left[\frac{4h}{3(\eta_1+\eta_3)}\right]} \tag{A.II-38}$$

$$k^2=\frac{\zeta_1+\zeta_2}{\zeta_1+\zeta_3}=\frac{\eta_1+\eta_2}{\eta_1+\eta_3} \tag{A.II-39}$$

(A.II-37)式を積分するに当り，波頂の位置を $\xi=0$ にとると，そこでは $\zeta=\zeta_1$ すなわち $\chi=0$ であるから (A.II-40)式が得られる。

$$\xi=\beta\int_0^x\frac{d\chi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\chi)}}=\beta F(x,k) \tag{A.II-40}$$

ただし F は第1種不完全楕円積分

Jacobiの楕円関数を用いると，次の関係が成り立つから (A.II-36)式は (A.II-41)式になる。

$$\left.\begin{aligned}&\cos\chi=cn(\xi/\beta,k),\quad \sin\chi=sn(\xi/\beta,k)\\&sn^2\bar{u}+cn^2\bar{u}=1\end{aligned}\right\}$$

$$\zeta=-\zeta_2+(\zeta_1+\zeta_2)\,cn^2(\xi/\beta,k) \tag{A.II-41}$$

変数をもとにもどすと (A.II-42)式が得られる。

$$\eta=-\eta_2+(\eta_1+\eta_2)\,cn^2\left[\sqrt{\left[\frac{3(\eta_1+\eta_3)}{4h^3}\right]}(x-\omega t),\sqrt{\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{\eta_1+\eta_3}\right)}\right] \tag{A.II-42}$$

波長は (A.II-40)式を用いれば (A.II-43)式で与えられる。

$$\frac{L}{h}=2\beta\int_0^{\pi/2}\frac{d\chi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\chi)}}=2\beta F_1(k) \tag{A.II-43}$$

ただし F_1 は第1種完全楕円積分

水路の初めの水深が h であるから

$$\int_0^{L/h}\zeta d\xi=0$$

この式に (A.II-36)，(A.II-37)式を代入すると

$$2\int_0^{\pi/2}\frac{(\zeta_1\cos^2\chi-\zeta_2\sin^2\chi)\beta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\chi)}}d\chi=0$$

(A.II-39)式を用いてこれをさらに書き直すと (A.II-44)式が得られる。

$$(\eta_1+\eta_3)\,E_1(k)=\eta_3F_1(k) \tag{A.II-44}$$

ただし E_1 は第2種完全楕円積分

ここに求めた諸式は同一の大きさ，形をもつ無限個数の波列をあらわしている。この不変性の週期波の存在は Boussinesq によって最初に指適されたものであり，Korteweg & de Vries によってクノイド波 (Cnoidal wave) と名付けられた。

クノイド波の波形を定めるには η_1,η_2,η_3 および k の値が必要である。しかし，これらの4量は互に独立でなく，(A.II-39)式(または (A.II-43)) および (A.II-44)式という関係がある。結局クノイド波では4量のうち2量を与えれば，波形は確定するのである。

最後にこの波の伝播速度を求める。(A.II-30)式 と (A.II-35)式から (A.II-45)式が得られる。

$$\omega=(gh)^{1/2}\left[1+\frac{\eta_1}{h}-\frac{\eta_2}{h}-\frac{\eta_3}{h}\right]^{1/2} \tag{A.II-45}$$

(A.II-39)，(A.II-44)式および $\eta_1+\eta_2=H$ の3式を解けば η_1,η_2,η_3 は (A.II-46)式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}\eta_1&=(H/k^2)\ (1-E_1(k)/F_1(k))\\\eta_2&=(H/k^2)\ (E_1(k)/F_1(k)\ -(1-k^2))\\\eta_3&=(H/k^2)\ (E_1(k)/F_1(k))\end{aligned}\right\} \tag{A.II-46}$$

(A.II-46)式を (A.II-45)式に代入すれば (A.II-47)式が得られる。

$$\omega=(gh)^{1/2}\left[1+\frac{H}{k^2h}\left(2-k^2-3\frac{E_1(k)}{F_1(k)}\right)\right]^{1/2} \tag{A.II-47}$$

(A.II-45)式で η_2/h を省略すれば (A.II-48)式となる。

$$\omega \cong (gh)^{1/2}\left[1+\frac{H}{k^2h}\left(\frac{1}{2}-\frac{E_1(k)}{F_1(k)}\right)\right] \qquad \text{(A.II-48)}$$

(A.II-48)式は Korteweg & de Vries が (A.II-49)式から求めた伝播速度 (A.II-50)式と一致している。

$$chL = \int_0^L \int_0^{h+\eta} udzdx \qquad \text{(A.II-49)}$$

$$c = (gh)^{1/2}\left[1+\frac{H}{k^2h}\left(\frac{1}{2}-\frac{E_1(k)}{F_1(k)}\right)\right] \qquad \text{(A.II-50)}$$

付　録　III　クノイド波理論の実用解

(Wiegel, R. L. [1960] : A Presentation of Cnoidal Wave Theory for Practical Application, Journal of Fluid Mechanics, V.7, Part 2.　要約)

クノイド波の波長 L は (A.III-1)式で与えられる*。

$$\frac{L}{h} = \frac{4}{\sqrt{3}}F_1(k)\left(2\bar{L}+1-\frac{z_t}{h}\right)^{-1/2} \qquad \text{(A.III-1)}$$

ただし　h : 静止水深

z_t : 波谷から水底までの深さ

F_1 : 第1種完全楕円積分

また $\bar{L}, k$ は (A.III-2)式および (A.III-3)式の2式で定義される量である。

$$k^2 = \frac{(z_c/h)-(z_t/h)}{2\bar{L}+1-(z_t/h)} \qquad \text{(A.III-2)}$$

$$(2\bar{L}+1-(z_t/h))E_1(k) = (2\bar{L}+2-(z_c/h)-(z_t/h))F_1(k) \qquad \text{(A.III-3)}$$

ただし E_1 : 第2種完全楕円積分

z_c : 波頂から水底までの深さ

(A.II-34)式で示したように $\zeta_3 \geq \zeta_2$ であるから

$$\left.\begin{aligned} &2\bar{L}+1 \geqq (z_c/h) > (z_t/h) \\ &0 < k^2 \leqq 1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A.III-4)}$$

(A.III-2)式を書き変えると

---

* (A.II) の諸式と (A.III-1)～(A.III-3)式との関係は次のようである。(A.II-43)式と (A.III-1)式とを比較し，β に (A.II-38)式を用いると。

$$\zeta_1+\zeta_3 = 2\bar{L}+1-(z_t/h) \qquad \text{(a)}$$

(A.II-39)式と (A.III-2)式を比較すると

$$\zeta_1+\zeta_2 = (z_c/h)-(z_t/h) = H/h \qquad \text{(b)}$$

(A.II-44)式と (A.III-3)式を比較すると

$$\zeta_3 = 2\bar{L}+2-(z_c/h)-(z_t/h) \qquad \text{(c)}$$

(a) ～ (c) から (d) の関係が得られる。

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_1 = (z_c/h)-1 \\ &\zeta_2 = (z_t/h)-1 \\ &\zeta_3 = 2\bar{L}-\zeta_1+\zeta_2 \text{ または } \zeta_1-\zeta_2+\zeta_3 = 2\bar{L} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(d)}$$

$$2\bar{L}+1-(z_t/h)=(H/h)/k^2 \tag{A.III-5}$$

(A.III-5)式を (A.III-1)式に代入すると

$$L^2H/h^3=(16/3)\,[kF_1(k)]^2 \tag{A.III-6}$$

(A.III-6)式は波の特性値と楕円積分の母数との関係をあらわす重要な式である。

(A.III-3)式において

$$2\bar{L}+2-(z_c/h)-(z_t/h)=[2\bar{L}+1-(z_t/h)]+1-(z_c/h)$$

であるから，(A.III-3)式は (A.III-7)式と書くことができる。

$$E_1(k)-F_1(k)=\frac{[1-(z_c/h)]}{[2\bar{L}+1-(z_t/h)]}F_1(k) \tag{A.III-7}$$

(A.III-7)式に (A.III-1)式を代入すると

$$\frac{z_c}{h}=\frac{16h^2}{3L^2}\left\{F_1(k)\,[F_1(k)-E_1(k)]\right\}+1 \tag{A.III-8}$$

両辺に h/H を乗じて整理すると

$$\frac{z_c}{H}-\frac{h}{H}=\frac{\eta_c}{H}=\frac{16h^3}{3L^2H}\left\{F_1(k)\,[F_1(k)-E_1(k)]\right\} \tag{A.III-9}$$

これをさらに (A.III-6)式によって書き直すと

$$\frac{\eta_c}{H}=\frac{F_1(k)\,[F_1(k)-E_1(k)]}{[kF_1(k)\,]^2} \tag{A.III-10}$$

また z_t は (A.III-8)式から

$$\frac{z_t}{h}=\frac{z_c}{h}-\frac{H}{h}=\frac{16h^2}{3L^2}\left\{F_1(k)\,[F_1(k)-E_1(k)]\right\}+1-\frac{H}{h} \tag{A.III-11}$$

静水面と z_t との差 δt は (A.III-11)式から

$$\delta t=H-(16h^3/3L^2)\,\{F_1(k)\,[F_1(k)-E_1(k)]\}$$

これに (A.III-6)式を代入すると

$$\delta t=\frac{H}{k^2}\left[\frac{E_1(k)}{F_1(k)}-(1-k^2)\right] \tag{A.III-12}$$

波形を求めるために (A.II-42)式に (A.III-6)式および (A.II-39)式を代入して整理すると

$$z_s=z_t+Hcn^2\,[2F_1(k)\left(\frac{x}{L}-\frac{t}{T}\right),\ \ k] \tag{A.III-13}$$

伝播速度として Stokes の第二定義にしたがい，波の水平運動量を 0 にする 速度を求めると (A.III-14a)式および (A.III-14b)式が得られる。

$$c=(gh)^{1/2}\,[1+\frac{H}{hk^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{E_1(k)}{F_1(k)}\right)] \tag{A.III-14a}$$

(A.III-6)式を代入して書き変えると

$$c=(gh)^{1/2}\left[1+\frac{16h^2}{3L^2}F_1{}^2(k)\left(\frac{1}{2}-\frac{E_1(k)}{F_1(k)}\right)\right] \tag{A.III-14b}$$

一つの極限として $k_2\to1$ の場合を考えると，(A.III-14a)式から

$$c=(gh)^{1/2}\left(1+\frac{H}{2h}\right) \tag{A.III-14c}$$

これは孤立波の伝播速度 (A.III-14d)式と殆んど一致している。

$$c=(gh)^{1/2}\left(1+\frac{H}{h}\right)^{1/2} \tag{A.III-14d}$$

他の極限として $k^2\to0$ の場合を考える。

$E_1(k)/F_1(k)\to1$ であるから (A.III-14b)式は (A.III-14e)式となる。

$$c=(gh)^{1/2}\left(1-\frac{2\pi^2h^2}{3L^2}\right) \tag{A.III-14e}$$

これは (A.III-14f)式の近似式と考えられる。

$$c = \left\{gh\left(1 - \frac{4\pi^2 h^2}{3L^2}\right)\right\}^{1/2} \tag{A.III-14f}$$

さて小振巾の進行波の伝播速度は (A.III-14g)式である。

$$c = \left\{\frac{gL}{2\pi}\tanh\frac{2\pi h}{L}\right\}^{1/2} \tag{A.III-14g}$$

(A.III-14g)式を展開して初めの2項を考えると (A.III-14f)式が得られる。

(A.III-6)式と (A.III.-14a)式とからクノイド波の週期を求めると (A.III-15)式が得られる。

$$T\sqrt{(g/h)} = \sqrt{\left(\frac{16h}{3H}\right)}\left\{\frac{kF_1(k)}{1 + \frac{H}{hk^2}\left[\frac{1}{2} - \frac{E_1(k)}{F_1(k)}\right]}\right\} \tag{A. III-15}$$

流速の2成分 u, w は (A.II-28), (A.II-29)式に (A.III-13)式を代入して求められる。

$$\begin{aligned}\frac{u}{\sqrt{(gh)}} = \Big[& -\frac{5}{4} + \frac{3z_t}{2h} - \frac{z_t^2}{4h^2} + \left(\frac{3H}{2h} - \frac{z_t H}{2h^2}\right) cn^2(\ ) \\ & - \frac{H^2}{4h^2} cn^4(\ ) - \frac{8HF_1^2(k)}{L^2}\left(\frac{h^2}{3} - \frac{Z^2}{2h}\right)\Big\{ - k^2 sn^2(\ ) cn^2(\ ) \\ & + cn^2(\ )\, dn^2(\ ) - sn^2(\ )\, dn^2(\ )\Big\}\Big]\end{aligned} \tag{A.III-16}$$

$$\begin{aligned}\frac{w}{\sqrt{(gh)}} = z\frac{2HF_1(k)}{Lh}\Big[& 1 + \frac{z_t}{h} + \frac{H}{h} cn^2(\ ) + \frac{32F_1^2(k)}{3L^2}\left(h^2 - \frac{z^2}{2}\right) \times \\ & \Big\{k^2 sn^2(\ ) - k^2 cn^2(\ ) - dn^2(\ )\Big\}\Big] sn(\ )\, cn(\ )\, dn(\ )\end{aligned} \tag{A.III-17}$$

ただし $sn(\ )$ などは $sn(2F_1(k)(x/L - t/T), k)$ をあらわす。

(A.III-16), (A.III-17)式の計算にあたっては次の関係を利用すればよい。

$$\left.\begin{aligned} & \bar{u}/k = 2F_1(k)\, x/L \\ & sn^2(\bar{u}/k) = 1 - cn^2(\bar{u}/k) \\ & dn^2(\bar{u}/k) = 1 - k^2[1 - cn^2(\bar{u}/k)] \end{aligned}\right\} \tag{A.III-18}$$

またクノイド波の圧力分布は (A.III-19)式で与えられる静水圧分布である。

$$p = \rho g(z_s - z) \tag{A.III-19}$$