

波 動 論

——主として波の諸理論とその適用範囲——

第1章 波の理論の適用範囲

1.1 越波量に対する孤立波理論の応用

水の波に対して Stokes 波、クノイド波、孤立波などいくつかの理論があり、われわれが海岸の諸現象を考える場合の基礎となっている。この意味で、それぞれの理論の適用範囲を明らかにしておくことはまた、われわれの海岸現象に対する理解を深めることにもなると思われる。

話題があまり抽象的にならないよう具体的な例を挙げてみる。防波堤あるいは海岸堤防の高さと越波量との関係を考える。近藤[1963]は直立壁に対する越波量を孤立波理論で解析した。図-1.1に示すように、波高 H の波が水面上 R_c の高さをもつ直立壁に入射するときの越波量は、波形のうち R_c より上にある水容積 V' (図中斜線を附した部分) に比例すると考える。水深が小さいとして波形を孤立波の波形 (1.1) 式で近似する。

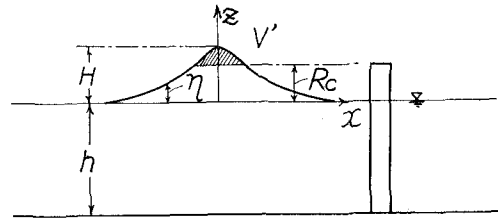


図-1.1 越波の概略図

$$\eta = H \operatorname{sech}^2 \left(-\frac{x}{h} \sqrt{\frac{3H}{4h}} \right) \quad (1.1)$$

ここに

η : 静水面から測った波面の高さ

H : 波高

h : 水深

x : 波頂から測った水平距離

(1.1) 式を用いれば V' は (1.2) 式で与えられる。

$$V' = \frac{4}{\sqrt{3}} H^{1/2} h^{3/2} \left\{ \left(1 - \frac{R_c}{H} \right)^{1/2} - \frac{R_c}{H} \operatorname{sech}^{-1} \left(\frac{R_c}{H} \right)^{1/2} \right\} \quad (1.2)$$

孤立波の全容積 V は (1.2) 式で $R_c=0$ と置いた場合であるから、(1.3) 式であらわされる。

$$V = \frac{4}{\sqrt{3}} H^{1/2} h^{3/2} \quad (1.3)$$

単位幅、1 週期当りの越波量 Q が V' に比例すると考えると、(1.2) および (1.3) 式から (1.4) 式が得られる。

$$Q / \left(\frac{4}{\sqrt{3}} H^{1/2} h^{3/2} \right) = \alpha \left\{ \left(1 - \frac{R_c}{H} \right)^{1/2} - \frac{R_c}{H} \operatorname{sech}^{-1} \left(\frac{R_c}{H} \right)^{1/2} \right\} \quad (1.4)$$

ただし α : 比例係数

Beach Erosion Board [1961] の実測資料のうち、相対水深が小さく、 $0.04 < (h/L_0) < 0.10$ の範囲のものをえらび、直立壁の高さと越波量との関係をしらべると 図-1.2 のようになる。図中の実線は (1.4) 式で $\alpha=1/2$ にとった曲線で実測値とよく合っている。

この種の問題の近似解法として、われわれは潜堤による波高低下率に関する Fuchs [1951] の研究を知っている。Fuchs の方法は入射波のエネルギーのうち、潜堤上の水深に含まれる部分が透過エネルギーとなり、潜堤背後の透過波を形成すると考えるのである。潜堤が低い場合には Fuchs の計算値は実験値とよく合うが、潜堤の

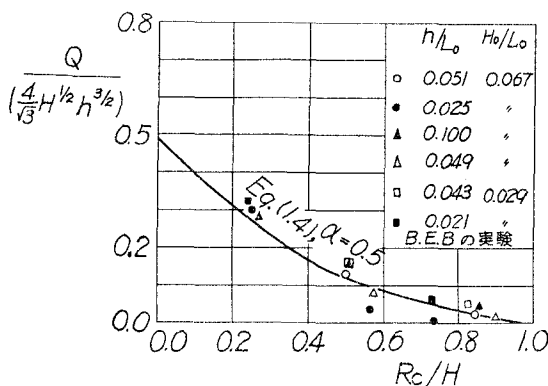


図-1.2 越波量と天端高との関係 (kondō)

高さが増すとともに計算値は実験値からはずれてくる。Fuchs の計算では小振幅波の理論を用いているので、潜堤の天端が水面に達すれば透過波はないことになる。しかし実験結果では、この場合でも、入射波高の40～50%の波高をもつ透過波が存在する。実験結果を説明するためには、有限振幅波の理論を借りなければならない。この点は越波量についても事情は同じである。

有限振幅波の理論でも Stokes 波を用いることはどうであろうか。図-1.2 で越波量が0になるのは $(Re/H) \approx 1$ である。波の打上げ高に関する佐藤・岸 [1954]、石原・岩垣・鈴木 [1955] の実験あるいは石原・岩垣・三井 [1957] による越波量の実験を参照すると越波量が0になる (Re/H) は1より大きく、 $(Re/H) \approx 1.3 \sim 1.5$ 程度と考え

られる。したがって、越波量が0になる条件として $(Re/H) = 1$ は決して大き過ぎる値ではない。

Stokes 波の理論として Skjelbreia および Hendrickson [1960] の式を用い、静水面上の波頂の高さを求める。静水面から波高中分面までの高さ δ は (1.5) 式で与えられる。

$$\delta \approx \frac{\pi H^2}{4L} \coth \frac{2\pi h}{L} \quad (1.5)$$

(1.5)式と碎波に関する浜田 [1951] の実験式 (1.6) 式とを組み合わせると (δ/H) の極値 $(\delta/H)_e$ は (1.7) 式で示される。

$$\frac{H}{L} \coth \frac{2\pi h}{L} = 0.142 \quad (1.6)$$

$$(\delta/H)_e \approx 0.11 \quad (1.7)$$

したがって、越波が直立壁の天端より上にある水量で生ずるものとすれば、Stokes 波による越波限界は $(Re/H) \approx 0.61$ でなければならない。

Stokes 波でも直立壁があれば重複波が生じ、波頂の位置は高くなるから $(Re/H) > 0.61$ でも越波が存在することは説明される。しかし、Stokes 波では水量の計算に波形こう配の効果が入るはずである。図-1.2 をみれば、ここに用いた資料の範囲では波形こう配の効果はほとんど認められない。この理由を説明するためにも孤立波理論の方が適していると思われる。

1.2 Wilson の波型分類図

表-1 相対水深による波の分類

h/L_0	Designation	Character	Theory	Stability
≥ 0.5	Deep Water Wave	Oscillatory	Stokes' Theory (Airy's Theory)	Stable
$0.5 \sim 0.1$	Transitional Water Wave	Oscillatory		
$0.1 \sim 0.04$	Shallow Water Wave	Translatory	Cnoidal Wave Theory Solitary Wave Theory	Stable
≤ 0.04	Long Wave	Translatory	Long Wave Theory (Lagrange's) Theory	Unstable

われわれはすでに、波の理論の適用範囲に関して相対水深 h/L_0 による分類を知っている。これを表-1に示す。Stokes 波、クノイド波、孤立波の各理論はいずれも有限振幅の Permanent type の波に対するものであるから、これらの理論の適用範囲を考えるに当っては、波高の効果を考慮して波形の安定性に関する基準を加える必要がある。ここでは Wilson [1962] の表示を中心に、各種理論の適用範囲について考察する。Boussinesq [1872] は有限振幅の波の一般式として(1.8)式を示した。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \eta \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h} + \frac{h^2}{3\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \right\} \quad (1.8)$$

ここに

η : 静水面から測った波面の高さ

h : 水深

(1.8)式から、任意の波形をもつ波の伝播速度 c は(1.9)式で与えられる。

$$c^2 = gh \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h} + \frac{h^2}{3\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \quad (1.9)$$

(1.9)式の右辺第2項、第3項はそれぞれ波高と波面の曲率が波速に及ぼす効果をあらわしている。もし第2項と第3項の和がある常数に等しければ Permanent type の波が得られる。孤立波はこの常数値を (H/h) と置いたもので、(1.10)式であらわされる。

$$\frac{3}{2} \frac{\eta}{h} + \frac{h^2}{3\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = -\frac{H}{h} \quad (1.10)$$

(1.10)式で η と $\partial^2 \eta / \partial x^2$ は反対の符号をもっている。第1項の η は波形を前傾させる効果をもつが、それを第2項の曲率 $\partial^2 \eta / \partial x^2$ が補なって波形を維持しているのである。砕波の観察においても、波形こう配が大きい波ほど Permanent type に近いことはよく知られた事実である。任意の波形の波の安定性は第1項と第2項の比をあらわす無次元量 (HL^2/h^3) の大小によって判別されるであろう。

Ursell [1953] は波高 H の代りに、静水面から波頂までの高さ η_0 を用い、 $(\eta_0 L^2/h^3)$ なるパラメーターで波を分類している。 $(\eta_0 L^2/d^3) \gg 1$ ならば波は波形の不安定な長波で変形が著るしい。 $(\eta_0 L^2/d^3) \simeq 1$ のときは孤立波が存在し得る。

$(\eta_0 L^2/d^3) < 1$ の波は Stokes 波で波形は安定である。

$(\eta_0 L^2/d^3) \ll 1$ ならば Airy の小振幅理論が適用される。

Wilson [1962] は、Ursell の分類のうち孤立波の存在範囲は正しくないとして、次のように修正した。孤立波の波頂の曲率 $(\partial^2 \eta / \partial x^2)_c$ は、波面の接触円を波頂とそれをはさんで $L/2$ づつ距った静水面上の2点との3点を通る円と仮定すれば(1.11)式が得られる。

$$(\partial^2 \eta / \partial x^2)_c \simeq -8\eta_0/L^2 \quad (1.11)$$

一方孤立波の波速は(1.12)式で与えられる。

$$c^2 = gh(1 + \eta_0/h) \quad (1.12)$$

(1.12)式と(1.9)式とを等置し、(1.11)式の関係式を代入すれば(1.13)式が得られる。

$$(\eta_0 L^2/h^3) = 5.33 \quad (1.13)$$

また Basset [1888] は孤立波の存在し得る限界として(1.14)式を示している。

$$(\eta_0 L^2/h^3) = 36 \quad (1.14)$$

$(\eta_0 L^2/h^3) = 5 \sim 36$ の領域が、したがって、孤立波理論の適用範囲である。

Wilson はさらに Prins [1956, 1958], Johnson および Bermel [1949], Wiegel [1955] らの実験結果を整理して、次のような波の分類を示した。

- (a) $(\eta_0 L^2/h^3) < 1$: Permanent type の振動波が存在し得る領域で、Airy-Stokes の理論が適合する。
- (b) $1 < (\eta_0 L^2/h^3) < 10$: 波は Permanent type であるが、移動波の性質を帯び、クノイド波の理論が最も適合する。
- (c) $10 < (\eta_0 L^2/h^3) < 40$: 孤立波の理論が適合する。
- (d) $(\eta_0 L^2/h^3) > 40$: Permanent type の波は存在することができず、もし $(H/h) \simeq 0.45$ 程度になれば、

bore になったり、あるいは砕波したりする。 $(H/h)=0.78$ が安定の限界である。

Wilson は以上の結果をまとめて波型の分類図、すなわち各種理論の適用範囲を示した。これを図-1.3に示す。

図によれば、 $(h/L_0)=0.01$ の場所では $(H/L_0)=0.001$ という非常に低い波のみが Permanent type で存在するが、それより波形こう配が大きい波は不安定で $(H/L_0)=0.05$ になれば砕波したり、bore が発生したりすることがわかる。

Borgan および Chappellear [1958] は Stokes-Struik 理論の第3近似を導いたが、その中で波形こう配がある限界値を越すと、波谷に不自然な小山ができることを指摘し、その限界条件を与えている。Borgan および Chappellear の限界線を図-1.3に移すと、 $(\eta_0 L^2/h^3)=20$ と一致し、これはたまたま Russel [1845], Basset [1888] による孤立波の最適領域に合致している。岩垣 [1964] は Skjelbreia による Stokes 波理論について

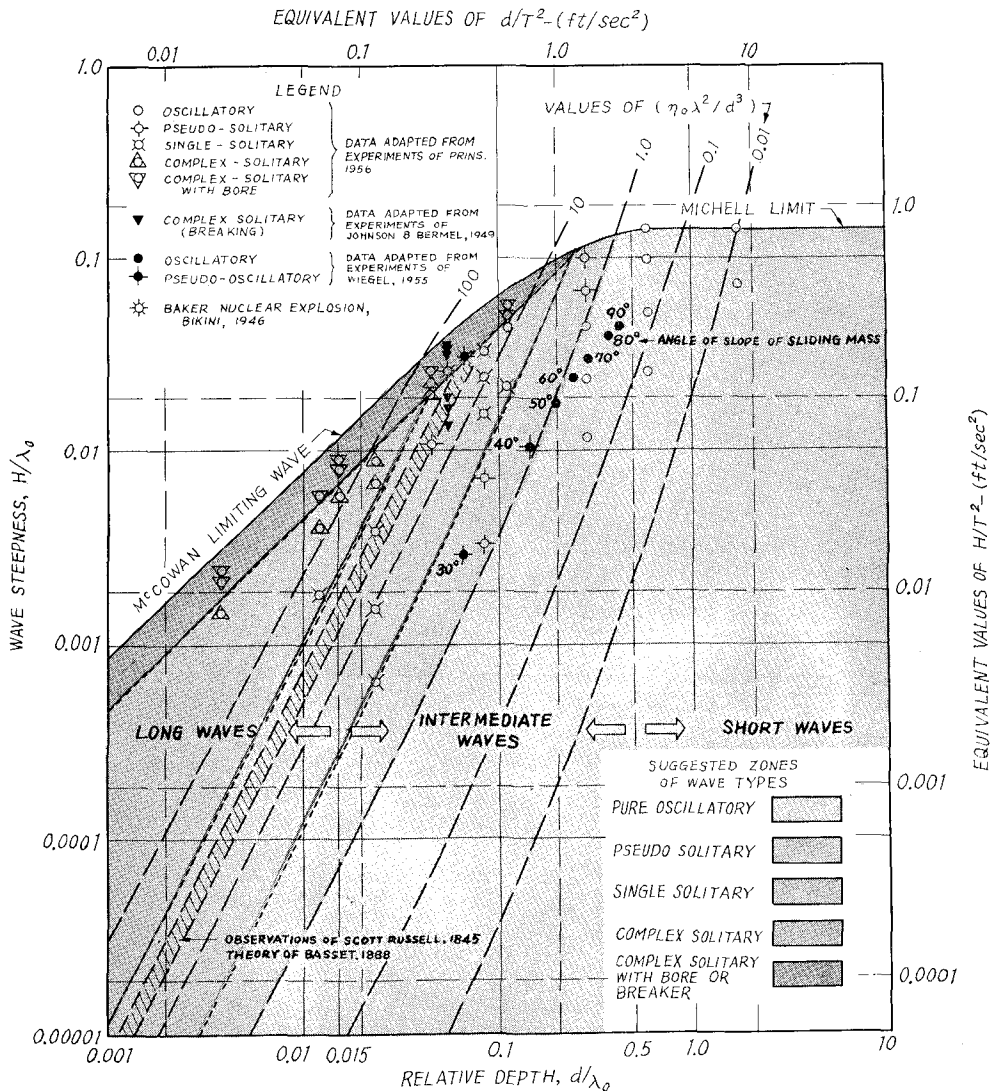


図-1.3 各種理論の適用範囲とその実験値との比較

波谷に小山ができる例を示している。図-1.4がその波形である。図中 $h+\delta$ とあるのは本文の記号では h であり、 $\eta-\delta$ が η である。 $(h/L)=0.05$, $(H/L)=0.01$ を書き直すと $(h/L_0)=0.015$, $(H/L_0)=0.003$ であるから、この波は孤立波の限界領域にあることがわかる。このように Stokes 波の理論は次数の高い精密な解であっても水深が浅くなれば適用し難くなってくる。また逆に、クノイド波の理論を水深の深い方に拡張すれば、Stokes 波の理論よりはるかに近似度の劣った解しか得られないことは、後章で説明するとおりである。それぞれの理論の適用範囲を明らかにすることの重要性が了解されるであろう。

第2章

特性帯理論の長波への応用

2.1 水深が浅くなる場合の長波の変形

水底摩擦の効果を無視すれば、有限振幅長波の連続の式および運動の式は (2.1) および (2.2) 式で与えられる。

$$[v^*(\eta^* + h^*)]_{x^*} = -\eta^*_{t^*} \quad (2.1)$$

$$v^*_{t^*} + v^*v^*_{x^*} = -g^*\eta^*_{x^*} \quad (2.2)$$

ここに

η^*, h^*, x^* などは図-2.1に定義されている。

v^* : 流速, t^* : 時間, g^* : 重力の加速度, *印は次元をもった量の意味である。

変量を次の変換によって無次元量に直す。

$$x = x^*/l_0^*, h = h^*/h_0^*, \eta = \eta^*/h_0^*$$

$$v = v^*/v_0^*, t = t^*/t_0^*,$$

ここに

l_0^* : 原点から汀線までの距離

h_0^* : 原点での水深

$$t_0^* = l_0^*/(g^*h_0^*)^{1/2}, v_0^* = (g^*h_0^*)^{1/2}$$

無次元化された基本式は(2.3)および(2.4)式となる。

$$[v(h + \eta)]_x = -\eta_t \quad (2.3)$$

$$v_t + vv_x = -\eta_x \quad (2.4)$$

(2.3)および(2.4)式の特性方程式は(2.5)~(2.8)式である。

$$dx/dt = v + c \quad (2.5)$$

$$d(v+2c) - h_x dt = 0 \quad (2.6)$$

$$dx/dt = v - c \quad (2.7)$$

$$d(v-2c) - h_x dt = 0 \quad (2.8)$$

$$\text{ここに} \quad c^2 = h + \eta$$

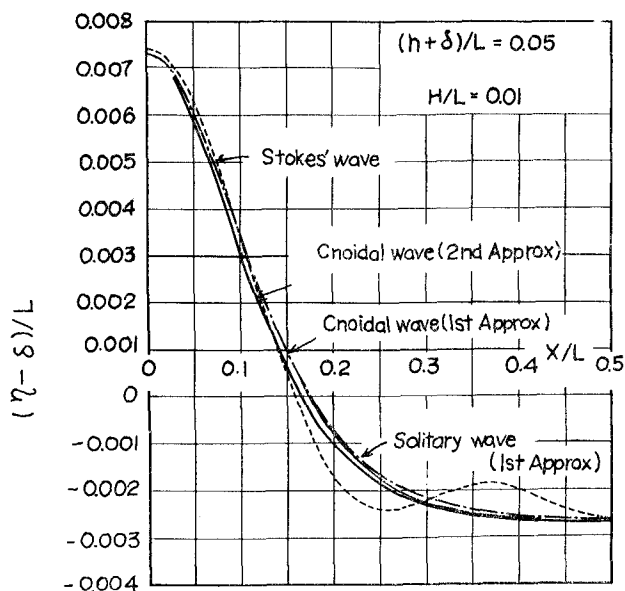


図-1.4 波形の計算例 (Iwagaki)

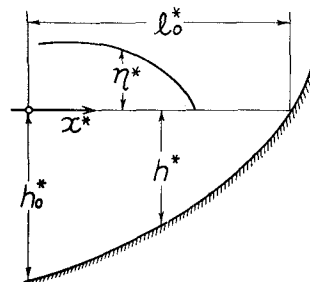


図-2.1 傾斜海岸における長波の説明図

そこで原点から陸に向かって進む圧縮性の波 (η が正の波) を考える。長波の流速および波速はつぎの (2.9) および (2.10) 式で与えられる。[Lamb, Hydrodynamics, 6th ed. p.278~279]

$$v = 2\sqrt{h}(\sqrt{1+M} - 1) \quad (2.9)$$

$$c = \sqrt{h}\sqrt{1+M} \quad (2.10)$$

$$\text{ここに } M = \eta/h$$

(2.9) および (2.10) 式は一様水深の場合の厳密解であるから、水底こう配がゆるやかであれば、水深が変わる場合にも近似的に成り立つであろう。(2.5)式を(2.6)式に代入すれば、(2.11)式が得られる。

$$d(v + 2c) - dh/(v + c) = 0 \quad (2.11)$$

(2.11)式に(2.9)および(2.10)式の関係代入すると(2.12)式が得られる。

$$\frac{1}{h} \frac{dh}{dM} = - \frac{2(3\sqrt{1+M} - 2)}{(\sqrt{1+M} - 1)(6\sqrt{1+M} - 1)\sqrt{1+M}} \quad (2.12)$$

$M \ll 1$ ならば、(2.12)式は(2.13)式で近似される。

$$dh/h = - (4/5)dM/M \quad (2.13)$$

$$\text{したがって } M \propto h^{-5/4}, \eta \propto h^{-1/4} \quad (2.14)$$

(2.14)式の関係は Green の式としてよく知られている。

(2.12)式を積分すれば、(2.15)式が得られる。

$$h = A_0(\sqrt{1+M} - 1)^{-4/5}(6\sqrt{1+M} - 1)^{-6/5} \quad (2.15)$$

境界条件として $h=1$ で $M=M_0$ を与え、積分常数 A_0 を定めると、(2.16)式が得られる。

$$h = \left(\frac{\sqrt{1+M_0} - 1}{\sqrt{1+M} - 1} \right)^{4/5} \left(\frac{6\sqrt{1+M_0} - 1}{6\sqrt{1+M} - 1} \right)^{6/5} \quad (2.16)$$

(2.16)式から求めた (η/η_0) と (h/h_0) の関係を 図-2.2 に示す。図によれば、原点における波高水深比 M_0 が大きくなるにしたがって、水深減少による波高増大の割合は減少されることがわかる。また図中の $M_0 = 0.20$ の曲線を見ると、 η には極値があることが認められる。

(2.12)式にもどって考えると、 $M > 0$ である限り、 h が減少するにつれて M は単調に増大するが、 η は必ずしも増大するとはいえない。 η の最大値は(2.17)式で求められる。

$$d\eta/dh = M + h dM/dh = 0 \quad (2.17)$$

(2.17) 式に (2.12)式を代入して計算すれば、

(2.18) 式の関係を得る。

$$M = 7/9 \text{ あるいは } \eta_{\max} = 0.778h \quad (2.18)$$

(2.18)式の関係は孤立波の限界条件と合致している。

2. 2 幅の変わる水路中での長波の変形

一様水深で幅だけが変化する水路を考え、無次元水路幅を $b = b(x)$ とする。無次元変量を次のように定義する。

$$b = B^*/h_0^*, \quad \eta = \eta^*/h_0^*, \quad x = x^*/h_0^*$$

$$v = v^*/v_0^*, \quad t = t^*/t_0^*$$

ここに

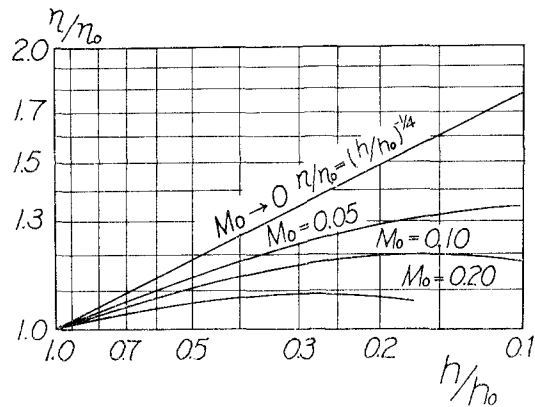


図-2.2 海浜における長波の(η/η_0)と(h/h_0)との関係

B^* : 水路幅, h_0^* : 一様な水深,
 $v_0^* = (g^* h_0^*)^{1/2}$, $t_0^* = (h_0^*/g^*)^{1/2}$

(2.5)および(2.6)式に対応する正の特性曲線は(2.19)および(2.20)式となる。

$$dx/dt = v + c \quad (2.19)$$

$$d(v + 2c) + vc(b_x/b)dt = 0 \quad (2.20)$$

(2.19)式と(2.20)式とを組み合わせると, (2.21)式が得られる。

$$d(v + 2c) + \frac{vc}{v + c} \frac{db}{b} = 0 \quad (2.21)$$

(2.9)および(2.10)式を(2.21)式に代入し, $h=1$ であることを考慮すれば, (2.20)式が得られる。

$$\frac{db}{b} = - \frac{3\sqrt{1+\eta} - 2}{(1+\eta)(\sqrt{1+\eta} - 1)} d\eta \quad (2.22)$$

$\eta \ll 1$ のときは, (2.22)式は近似的に(2.23)式となる。

$$\frac{db}{b} = - 2 \frac{d\eta}{\eta} \quad (2.23)$$

(2.23)式はつぎの(2.24)式の間係をあらわしている。

$$\eta \propto b^{-1/2} \quad (2.24)$$

この関係は Green の式といわれている。

(2.22)式を $b=b_0$ で $\eta=\eta_0$ という条件で積分すれば, (2.25)式が得られる。

$$\frac{b}{b_0} = \left(\frac{1+\eta}{1+\eta_0} \right)^{-2} \left(\frac{\sqrt{1+\eta} - 1}{\sqrt{1+\eta_0} - 1} \right)^{-2} \quad (2.25)$$

(2.25)式から求めた (η/η_0) と (b/b_0) との間係を図-2.3に示す。図によれば, 原点での波高水深比 $M_0(=\eta_0)$ が大きい程, 水路幅縮小による波高の増加は Green の関係より小さくなるのがわかる。しかし図-2.2とくらべると, M_0 の効果は水深変化の場合ほど著しくはない。

2.3 底面摩擦による長波の波高変化

水底摩擦の効果を考慮すれば, 運動の式は (2.26) 式となる。

$$v_{tt}^* + v^* v_{xx}^* = - g^* \eta_{xx}^* - k' v^{*2} / (h^* + \eta^*) \quad (2.26)$$

ここに

$$k' = g^* / c_e^{*2}, \quad c_e^*: \text{Chézy の流速係数}$$

2.1 で用いたと同じ無次元量を用いると, 海底こう配が一様な海岸で $h=1-x$ のときは正の特性方程式は(2.27)および(2.28)式となる。

$$dx/dt = v + c \quad (2.27)$$

$$(dv + 2c) + \left\{ 1 + k(v/c)^2 \right\} dt = 0 \quad (2.28)$$

ここに

$$k = k'/s, \quad s: \text{海底こう配}$$

(2.27)式の間係を用いて(2.28)式の dt を dx に置き換え, (2.9) および(2.10)式を代入すれば, (2.29) 式が得られる。

$$\frac{1}{h} \frac{dh}{dN} = - \frac{4N^2(3N-2)}{N^2(6N-1)(N-1) - 4k(N-1)^2} \quad (2.29)$$

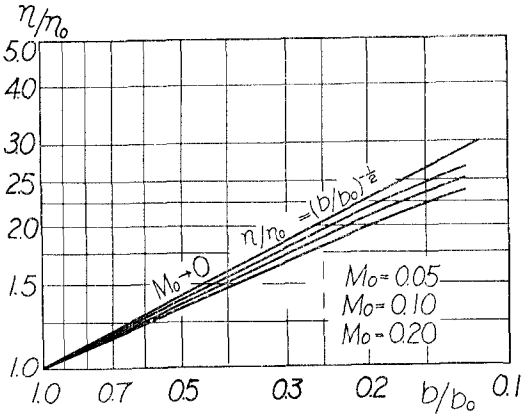


図-2.3 幅の変わる水路中の長波に対する (η/η_0) と (b/b_0) との間係

ただし $N = \sqrt{1 + M}$

(2.29)式で $k = 0$ とすれば, (2.12)式にもどることはいうまでもない。(2.29)式で $(N-1)^3$ 以上の項を無視して積分すれば(2.30)式が得られる。

$$h \simeq A_0 \varepsilon^{-4/5} (\alpha \varepsilon + \frac{5}{4})^{-\beta} \exp(-\frac{7}{2} \varepsilon) \quad (2.30)$$

ここに

$$\varepsilon = N - 1$$

$$\alpha = 4 - k$$

$$\beta = \frac{1}{\alpha} (5 - \frac{35}{4\alpha} - \frac{4\alpha}{5})$$

A_0 : 積分常数

(2.30)式で $k = 4$, すなわち $\alpha = 0$ という特別の場合には(2.31)式を用いればよい。

$$h \simeq A_0 \varepsilon^{-4/5} \exp\left\{-2\varepsilon\left(\frac{7}{5}\varepsilon + 2\right)\right\} \quad (2.31)$$

水深が一様の場合には, 摩擦による波高低下は(2.32)式であらわされる。

$$\frac{dx}{d\eta} = -\frac{\sqrt{1+\eta} (3\sqrt{1+\eta} - 2)}{2k' (\sqrt{1+\eta} - 1)^2} \quad (2.32)$$

$N = \sqrt{1+\eta}$ とおき $x = 0$ で $N = N_0$ と書くと, (2.32)式の積分は(2.33)式となる。

$$k'x = \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N_0-1}\right) - 5 \log\left(\frac{N-1}{N_0-1}\right) - 4(N - N_0) - \frac{3}{2}(N^2 - N_0^2) \quad (2.33)$$

例として $k' = 0.01$ のときの波高低下を図-2.4に示した。

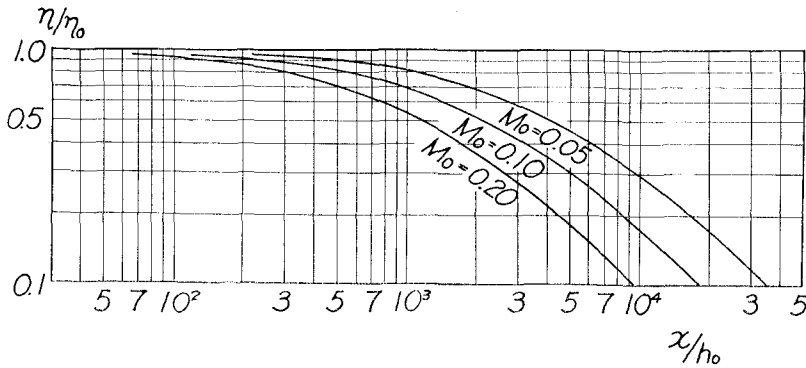


図-2.4 $k' = 0.01$ という一様深さの水路における長波の減衰

2. 4 海岸における長波の砕波

長波は波頂と波谷で伝播速度が異なるから, 進行するにしたがって波形が前傾し, やがて波頭をまき込んで砕波する。数学的には砕波点は特性線の交点の包絡線としてあらわされる。以下の解析では, 前端で有限の波面こう配をもった波が静水中を進行するものとして長波の砕波を考察する。まず, 海底こう配が一定の場合を考える。無次元の水深は(2.34)式であらわされる。

$$h = 1 - x \quad (2.34)$$

時刻 $t = \tau$ のとき原点を出る特性曲線 $dx/dt = v + c$ の上では(2.6)式から(2.35)式の関係が成り立つ。

$$c(t) = c(\tau) - \frac{1}{2}(t - \tau) - \frac{1}{2}\{v(t) - v(\tau)\} \quad (2.35)$$

(2.35)式によれば特性曲線は(2.36)式であらわされる。

$$dx/dt = v + c = c(\tau) - \frac{1}{2}(t - \tau) + \frac{1}{2}\{v(t) + v(\tau)\} \quad (2.36)$$

(1.9)式と(1.14)式とを組み合わせると、この特性曲線の上で時刻 t のときの流速 $v(t)$ は近似的に(2.37)式で与えられる。

$$v(t) \cong \eta(\tau)h^{-3/4} - \frac{1}{4}\eta^2(\tau)h^{-2} \quad (2.37)$$

(2.37)式を(2.36)式に代入し、(2.34)式を考慮すれば(2.38)式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1 + \sigma)^{1/2} - \frac{1}{2}(t - \tau) + \sigma \left\{ 1 + \frac{3}{8}x + \frac{21}{64}x^2 + \frac{77}{256}x^3 + \dots \right\} \\ &\quad - \sigma^2 \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \dots \right\} \end{aligned} \quad (2.38)$$

ここに

$$\sigma = \eta(\tau)$$

$$c(\tau) = (1 + \sigma)^{1/2}$$

(2.38)式の解が(2.39)式のように σ のべき級数であらわされると仮定する。

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i x_i = x_0 + \sigma x_1 + \sigma^2 x_2 + \dots \quad (2.39)$$

特性曲線の交点は(2.40)式で与えられる。

$$-\frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{\partial x_0}{\partial \tau} + \sigma \frac{\partial x_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} x_1 + \dots = 0 \quad (2.40)$$

初めの碎波点は(2.40)式で $\tau = 0, \sigma = 0$ と置いて得られる。したがって、初めの碎波点は(2.39)式の x_0, x_1 だけで定まる。

(2.39)式を(2.38)式に代入し、 $t = \tau$ のとき $x = 0$ という条件を与えれば、(2.41)式が得られる。

$$\begin{aligned} x_0 &= (t - \tau) - \frac{1}{4}(t - \tau)^2 \\ x_1 &= 1.500000(t - \tau) + 0.187500(t - \tau)^2 + 0.078125(t - \tau)^3 \\ &\quad + 0.034180(t - \tau)^4 + 0.015381(t - \tau)^5 + \dots \end{aligned} \quad (2.41)$$

(2.41)式を(2.40)式に代入すれば、初めの碎波時刻 t_b は(2.42)式で与えられる。

$$\begin{aligned} -1 + \frac{1}{2}t_b + mt_b(1.500000 + 0.187500t_b + 0.078125t_b^2 + 0.034180t_b^3 \\ + 0.015381t_b^4 + \dots) = 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

ここに

$$m = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} \right)_{\sigma=0} = - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_{\sigma=0}^*$$

これに対する碎波点 x_b は $\tau = 0, \sigma = 0$ であるから、 $x_b = x_0(t_b)$ であり(2.43)式であらわされる。

$$x_b = t_b - \frac{1}{4}t_b^2 \quad (2.43)$$

$m \sim t_b, m \sim x_b$ の関係をそれぞれ図-2.5 および 2.6 に示した。比較のために、Greenspan [1958] が別の方法で求めた t_b, x_b の値を図に記入したが、本節に示した解と Greenspan の解とはよく一致している。

ここに述べた理論を用いれば、碎波に及ぼす海底こう配の効果を調べることができる。簡単のため波を正弦波と仮定すれば、初めの波面こう配 m と波形こう配との関係は(2.44)式で示される。

$$m = (\pi/s)(H_t/L_t) \quad (2.44)$$

ここに

H_t : 原点における波高

* 原点では $(c)_{\sigma=0} = 1$

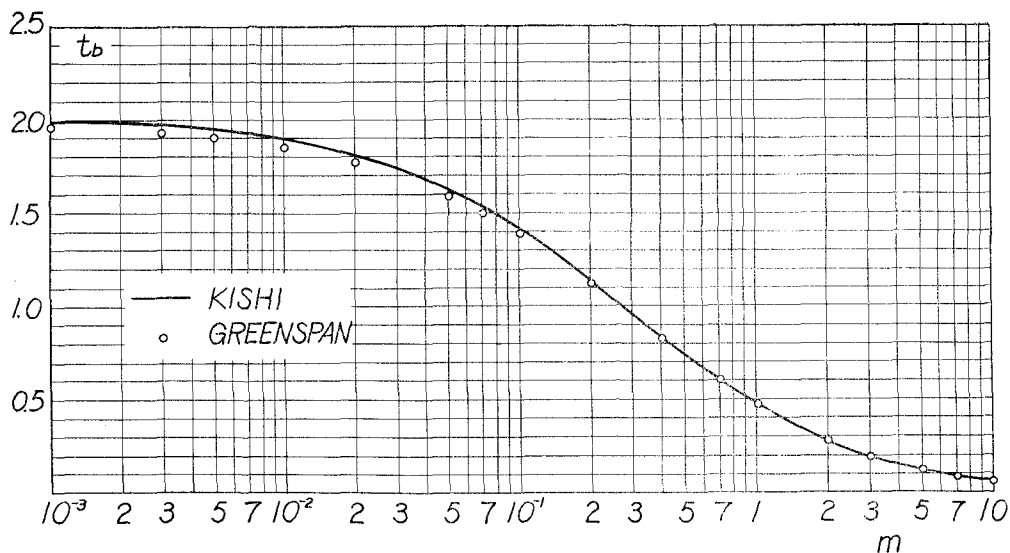


図-2.5 一様傾斜海岸における初期波面こう配 m と砕波時刻 t_b との関係

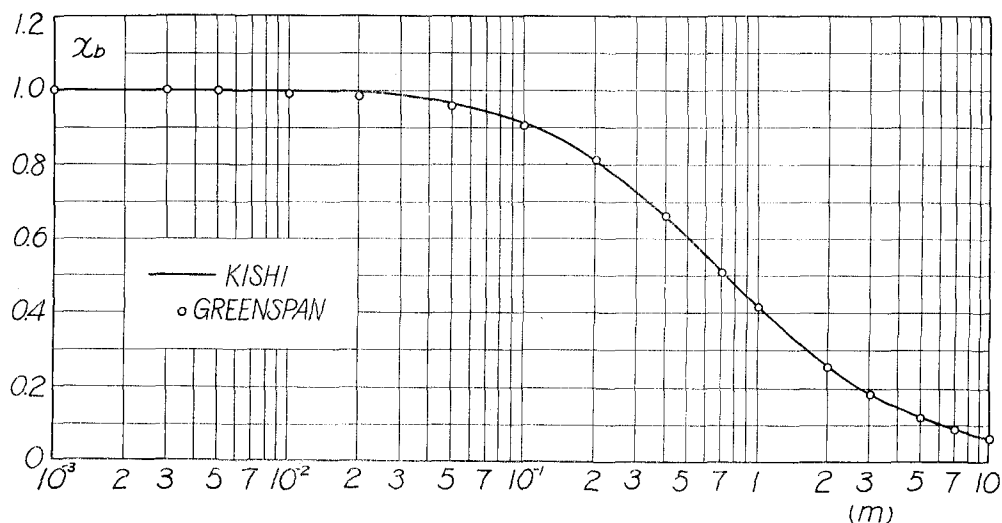


図-2.6 一様傾斜海岸における初期波面こう配 m と砕波点 x_b との関係

L_i : 原点における波長

s : 海底こう配

原点と砕波点における波高比を簡単のため Green の関係(2.45)式で求めることにすれば、海底こう配 s の海岸における (H_b/H_i) と (H_i/L_i) との関係を求めることができる。

$$(H_b/H_i) \cong (1-x_b)^{-1/4} \quad (2.45)$$

われわれは砕波に及ぼす海底こう配の効果に関する資料として Iversen [1952] の実験を知っている。しかし、実験結果は深水波の波高、波長であらわした (H_b/H_0) 、 (H_0/T^2) の関係として整理されている。したがって、ここで求めた計算結果を Iversen の実験結果と比較するためには、原点における (h_i/L_i) を指定しなければなら

らない。そこで $(h_i/L_i) = 0.044$ とする。
 すると、もし原点と深水波との波の換算
 を Airy の理論で行なえば (2.46) 式の関
 係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} (H_b/H_0) &= 1.4(H_b/H_i) \\ (H_0/T^2) \text{ (in ft-sec)} &= \\ 5.12(H_0/L_0) &= (H_i/L_i) \end{aligned} \right\} (2.46)$$

そこで (2.46) 式を用いて、さきに求め
 た計算結果を Iversen の実験と比較す
 ると 図-2.7 のようになり、Iversen の
 実験とかなりよく合っている。初期波形
 こう配が同一の波でも、海底こう配が大
 きい海岸ほど (H_b/H_0) の値が大きいと
 いう性質が長波の変形理論で説明される
 のである。

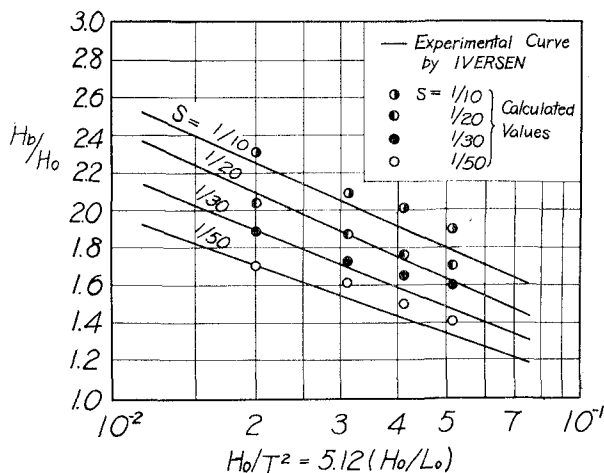


図-2.7 砕波におよぼす海底こう配の影響

第3章 クノイド波理論とその応用

3. 1 Bernoulli の定理による波頂高の解析

第1章に述べた越波量の解析例でもわかるとおり、海岸構造物の設計には静水面から測った波頂の高さ (本文の記号では η_0) を知る必要がおこる。この値は小振幅の深水波では 0.5、孤立波では 1.0 であるが、この間にはすべての波の理論の適用範囲が含まれているから、理論の精度、適用範囲を調べる意味でも興味ある問題である。

まず、Bretschneider [1958] の解法の紹介から始めよう。これは Bernoulli の式の応用例として、せん移海波の性質をしらべる 1 つの有力な方法と思われる。Rayleigh の方法にしたがって、波速と速度が等しく向きが反対の流れを波に重ね合わせると、波の運動は定常流の問題に帰着される。自由表面は 1 つの流線で、それに沿っては圧力は 0 と考えてもよい。基準面を静水面にとり、この波形流の表面流線にそって Bernoulli の式を適用すると、(3.1) 式を得る。

$$\left[\frac{u_s - c}{c} \right]^2 + \left[\frac{w_s}{c} \right]^2 + \frac{2g\eta}{c^2} = k \quad (3.1)$$

ここに

$(u_s - c)$: 波形流の流速

c : 波速

u_s, w_s : 波の運動における表面水分子の水平、垂直速度成分

η : 静水面から測った波面の高さ

波形が静水面を切る点 ($\eta = 0$ の点) では $u_s = 0$ であるから、(3.1) 式の常数 k は (3.2) 式の値をもつ。

$$k = 1 + \left(\frac{w_m}{c} \right)^2 \quad (3.2)$$

ただし w_m : $\eta = 0$ の点の垂直分速度

したがって、(3.3) 式の関係が成り立つ。

$$\left[\frac{u_s - c}{c} \right]^2 + \left[\frac{w_s}{c} \right]^2 + \frac{2g\eta}{c^2} = 1 + \left(\frac{w_m}{c} \right)^2 \quad (3.3)$$

(3.3) 式は波速 c と u_s, w_m との関係を与えている。

波頂では $w_s = 0$ であるから、 $u_s = u_0$ とおくと、(3.4) 式が得られる。

$$2g\eta_0 = 2u_0c - u_0^2 + w_m^2 \quad (3.4)$$

砕波の場合には $u_0 = c_b$, $\eta_0 = \eta_b$ であるから, (3.4)式は(3.5)式となる。

$$c_b^2 = 2g\eta_b - w_m^2 \quad (3.5)$$

(3.5)式を書き直すと $c_b T = L_b$ であるから, (3.6)式が得られる。

$$\frac{(\eta_b/H)}{(L_b/L_A)^2} = \frac{g}{8\pi^2} \frac{[\tanh(2\pi h/L_A)]^2}{(H/T^2)} \left[1 + \left(\frac{w_m}{c_b} \right)^2 \right] \quad (3.6)$$

ここに

$$L_A = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L_A}, \quad \text{Airy 理論における波長}$$

H : 任意の点の波高

(3.6)式で $(w_m/c_b)^2$ の値を見積るため深水最高波を考える。Michell-Havelock の理論によれば $(\eta_b/H_b) = 0.676$, $(L_b/L_A) = 1.20$, $(H_b/L_b) = 1/7$, $(H_b/T^2) = 0.88$ であるから, (3.6)式にこれらの値を代入すれば $(w_m/c_b)^2 = 0.0113$ となる。また水深が非常に浅い場所の砕波を考えると, 波形は孤立波で近似されるから $(w_m/c_b)^2 = 0$ である。

一方, 砕波の実験的な関係として, われわれはすでに Breaker Index Curve を与えられている。これは砕波に対する (H_b/T^2) と (h_b/T^2) との関係を示すものである。そこで, $(H_b/T^2) = 0$ から $(H_b/T^2) = 0.88$ の間で $(w_m/c_b)^2$ が 0 から 0.0113 まで単調に変化すると仮定すれば, (3.6)式の関係を用いて (H_b/T^2) と $(\eta_b/H_b)/(L_b/L_A)^2$ の関係を計算することができる。

また Danel [1952] は砕波に対する (H_b/L_b) と (h_b/L_b) との関係を実験的に定めている。したがって, Breaker Index Curve と Danel の実験値とを比較すれば, 砕波点における (H_b/T^2) (あるいは h_b/T^2) と (L_b/L_A) の関係を求めることができる。これとさきに求めた $(H_b/T^2) \sim (\eta_b/H_b)/(L_b/L_A)^2$ の関係を組み合わせると砕波点における h_b/T^2 (あるいは H_b/T^2) と (η_b/H_b) との関係が定められる。

Bretschneider は, さらに Beach Erosion Board における Mason [1948] の実験結果を利用して砕波していない波の値をしらべ, 図-3.1を作った*。図-3.1と(3.6)式とを組み合わせると, (L/L_A) を求めることができる。

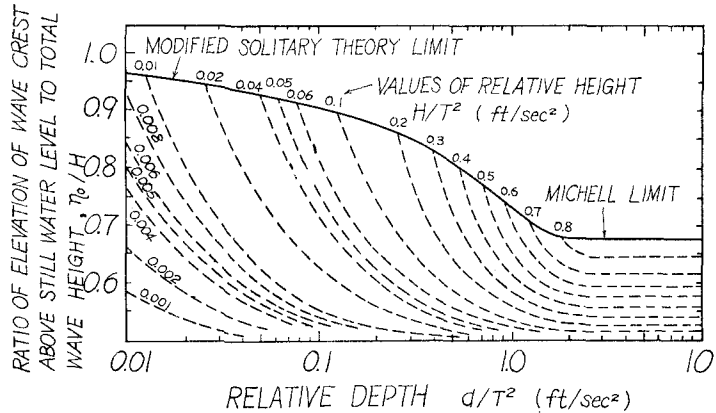


図-3.1 d/T^2 および H/T^2 と η_0/H との関係

第1章の 図-1.3 に示した Wilson の波型分類図は図-3.1を利用してパラメーター $(\eta_0 L^2/\alpha^3)$ を計算したものである。

3.2 クノイド波理論による波頂高の計算

図-3.1でとくに重要なのは水深が浅く, しかも波高がかなり大きい場合であるが, その領域は Wilson の波型分類図をみても大部分がクノイド波理論の適用範囲に入っている。本節ではクノイド波理論の概略を述べ, 次節でクノイド波理論と 図-3.1 とを比較してみる。本節で述べる理論は Wiegell [1960] が Kortweg および de Vries の理論を実用に便利ようにまとめたものである。水理公式集(昭和38年増補改訂版)に記載されている

* Wilson [1962] の論文に引用されている図は Bretschneider [1958] が示したものと多少値がちがう。ここでは Wilson の論文中の図を転載した。

のは Laitone [1960] の第1近似解で、一見、式の形が違っている。しかし、第1近似解は Kortweg および de Vries の結果と一致するものであることを Laitone が指摘している。

クノイド波の波長は(3.7)式で与えられる。

$$L = \left(\frac{16d^3}{3H} \right)^{1/2} kK(k) \quad (3.7)$$

ここに

d : 静止水深

$K(k)$: 母数 k の第1種完全だ円積分

波速は(3.8a)あるいは(3.8b)式で与えられる。

$$c = (gd)^{1/2} \left[1 + \frac{H}{d} \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{E(k)}{K(k)} \right\} \right] \quad (3.8a)$$

ここに

$E(k)$: 母数 k の第2種完全だ円積分

$$c = (gd)^{1/2} \left[1 + \frac{16}{3} \frac{d^2}{L^2} K^2(k) \left\{ \frac{1}{2} - \frac{E(k)}{K(k)} \right\} \right] \quad (3.8b)$$

周期は、したがって(3.9)式であらわされる。

$$T \left(\frac{g}{h} \right)^{1/2} = \left(\frac{16h}{3H} \right)^{1/2} \left[\frac{k K(k)}{1 + H/hk^2 \{1/2 - E(k)/K(k)\}} \right] \quad (3.9)$$

また静水面から波頂までの高さは(3.10)式から求められる。

$$\frac{\eta_0}{H} = \frac{16h^2}{3L^2} \left[K(k) \{K(k) - E(k)\} \right] + 1 \quad (3.10)$$

波形は、波谷の高さを基準にとれば、(3.11)式で与えられる。

$$\zeta = \eta + \delta = H \operatorname{cn}^2 \left\{ 2K(k) \left(-\frac{x}{L} - \frac{t}{T} \right), k \right\} \quad (3.11)$$

ここに

cn : 母数 k の Jacobi のだ円関数

Masch および Wiegel [1961] は以上の諸式を計算するための数表を発表している。水理公式集(昭和38年増補改訂版)では、波高、波長、水深を与えてクノイド波の計算を行なう図表が示されている。しかし、普通の

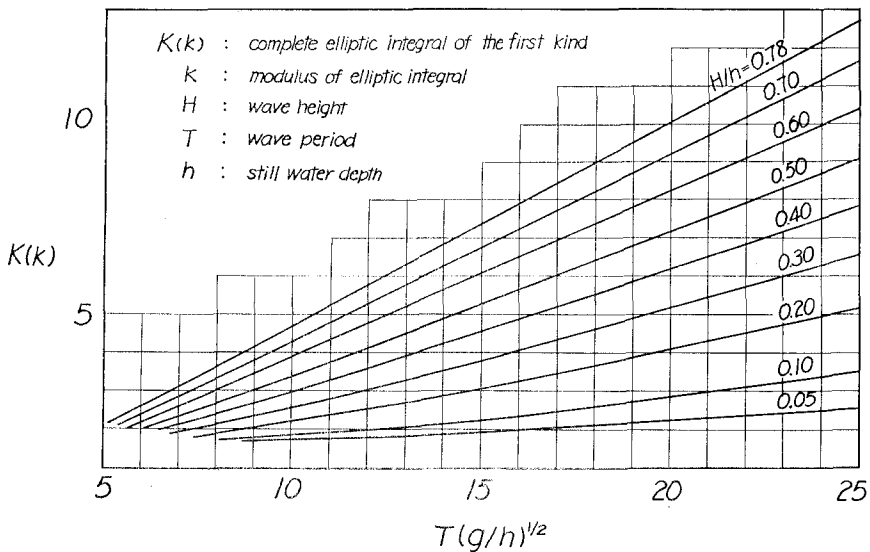


図-3.2.a $T(g/h)^{1/2}$, H/h および $K(k)$ の関係 [Kishi]

場合には波長の代りに週期が与えられる例が多いから、Masch および Wiegel の数表から $T(g/h)^{1/2} - H/h - K(k)$ のグラフを作り、図-3.2.a に示した。また、(3.10)式の計算図表が Wiegel [1960] によって作られているから、これを図-3.2.b に示す。

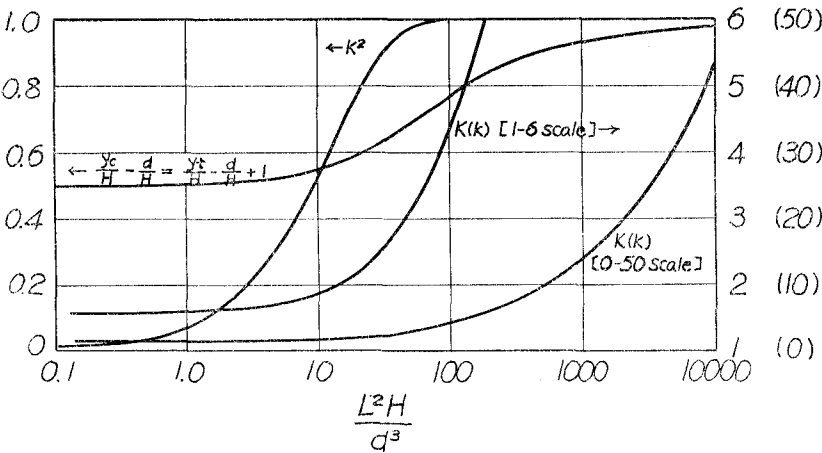


図-3.2.b $\frac{L^2H}{d^3}$ とだ円関数の母数の2乗 (k^2), $\frac{y_e}{H}$, $\frac{y_t}{H}$, $K(k)$ との関係

$$\frac{L^2H}{d^3} = \frac{16}{3} k^2 \cdot K^2(k)$$

$$\frac{y_e}{H} - \frac{d}{H} = \frac{y_t}{H} - \frac{d}{H} + 1 = \frac{16d^3}{3L^2H} \left[K(k) \{ K(k) - E(k) \} \right]$$

3. 3 クノイド波理論による適合性

図-3.1 に示された η_0/H の値をクノイド波の計算値と比較してみよう。

図-3.1 は ft-sec 単位であるから、 $g = 32.2 \text{ ft/sec}^2$ として無次元量を計算する。まず、図-3.1 で $(d/T^2) = 0.4 (\text{ft/sec}^2)$ の縦線に沿って (η_0/H) を計算する。Wilson の波型分類図によれば、波の存在範囲は $(H/T^2) < 0.3$ である。 $T\sqrt{g/h} = 8.97$ であるから、週期 5~10 sec、水深 3~10m の波に相当し、われわれが最も多く扱う範囲である。計算結果を表-2.a に示す。Wilson の波型分類図によれば、クノイド波理論の適用範囲は $(H/T^2) \cong 0.003$ 程度にまで及んでいる。表-2.a をみると、波高が砕波限界にごく近いところでクノイド波の計算値は図-3.1 の値よりいくらか小さいが他の部分はよく合っている。

次に、 $d/T^2 = 0.1 (\text{ft/sec}^2)$ の例を計算してみよう。波の存在範囲は $(H/T^2) < 0.08$ である。水深 1~2m のごく浅い場所に相当する。計算結果を表-2.b に示す。クノイド波の適用範囲は $(H/T^2) \cong 0.001$ まで及んでおり、これは $(H/h) = 0.01$ であるから、実際の海の波は、この部分ではクノイド波として計算しなければ

表-2.a クノイド波理論による η_0/H ($h/T^2 = 0.4 (\text{ft/sec}^2)$, $T\sqrt{g/h} = 8.97$)

H/T^2 (ft/sec ²)	H/h	$K(k)$	η_0/H Cnoidal Wave	η_0/H Bretschneider
0.3	0.75	4.0	0.75	0.83
0.25	0.63	3.5	0.72	0.75
0.2	0.50	3.0	0.67	0.68
0.1	0.25	2.2	0.60	0.61
0.05	0.13	1.9	0.55	0.55
0.02	0.05	1.7	0.52	0.51
0.01	0.025	1.6	0.51	0.505

表-2.b クノイド波理論による η_0/H ($h/T^2 = 0.1(\text{ft}/\text{sec}^2)$, $T\sqrt{g/h} = 17.9$)

H/T^2 (ft/sec ²)	H/h	$K(k)$	η_0/H Cnoidal Wave	η_0/H Bretschneider
0.078	0.78	9.0	0.90	0.90
0.06	0.6	7.1	0.87	0.82
0.05	0.5	6.2	0.84	0.76
0.04	0.4	5.5	0.82	0.72
0.03	0.3	4.6	0.78	0.68
0.02	0.2	3.7	0.72	0.63
0.01	0.1	2.6	0.61	0.55
0.005	0.05	2.06	0.57	0.53
0.003	0.03	1.85	0.54	0.52
0.001	0.01	1.66	0.52	0.51

ならないことがわかる。表-2.bによれば、クノイド波の計算値は図-3.1の値より全体としていくらか大きい。しかし Bretschneider の原文をしらべると、 $d/T^2 = 0.1$ の部分は実測値がなく、外挿的に推定した部分であるから、むしろ図-3.1を本表の計算値のように修正すべきなのかも知れない。今後の実験的な照査が望まれるところである。

第4章 重複波の波圧とその適用限界

4.1 重複波圧における2倍周波数成分の効果

波が直立壁に入射すると、その前面には重複波が生ずる。重複波についても各種の理論が発表されているが、ここでは主として、波圧の点から重複波理論の適用範囲を考察したいと思う。入射波が砕波であれば、直立壁面に作用する波圧は衝撃性を示し、いわゆる重複波圧とは違った性質を示すのは当然であるが、入射波が砕波でなくとも、波形こう配の大きい波は部分的な砕波を生じ、波圧は重複波理論より大きくなることが知られている。本節では、重複波から砕波への過渡状態について考えるのである。

重複波の速度ポテンシャルを(4.1)式で与える。

$$\phi = -\frac{gH}{\sigma} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos kx \cos \sigma t \quad (4.1)$$

ただし

H : 入射波の波高,

$\sigma = 2\pi/T$, T : 週期,

$k = 2\pi/L$, L : 波長,

z 軸は静水面から鉛直上向きにとる。

圧力は(4.2)式から求められる。

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t} - gz - \frac{1}{2} q^2 + F(t) \quad (4.2)$$

ここに

$$q^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2$$

小振幅波を考慮して q^2 , $F(t)$ が他の項にくらべて小さいと仮定すると、波形は $\eta = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0}$ から(4.3)式のように得られる。

$$\eta = H \cos kx \sin \sigma t \quad (4.3)$$

ここで垂直方向には水底から波の表面まで、水平方向には壁面から波の1波長分の水塊を考える。この波の両

端は波の腹になっていて、水平方向の速度成分が0であるから、この領域の内部の水は運動中に外に出ることはない。したがって、この水塊全体について次の運動方程式が成立する。

$$M \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \int_0^L p_{-h} dx - Mg \quad (4.4)$$

ただし

$$M : \text{水塊の質量} \quad M = \int_0^L \int_{-h}^{\eta} \rho dz dx = \rho h L$$

(4.2)式を(4.4)式に代入すれば、(4.5)式が得られる。

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 z_0}{dt^2} &= \rho F(t) L - \frac{\rho}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{-h}^2 dx \\ &= \rho F(t) L - \rho g k H^2 L \frac{1}{\sinh 2kh} \cos^2 \sigma t \end{aligned} \quad (4.5)$$

一方、この水塊の重心の位置 z_0 は(4.6)式で与えられる。

$$z_0 = \frac{\rho}{M} \int_0^L \int_{-h}^{\eta} z dx dz = \frac{\rho}{2M} \int_0^L (\eta^2 - h^2) dx \quad (4.6)$$

もし進行波波形が $\eta = H \sin(kx - \sigma t)$ と表わされる場合には、 $d^2 z_0 / dt^2 = 0$ である。しかし、波形が(4.3)式であらわされる重複波の場合には $d^2 z_0 / dt^2 \neq 0$ である。計算の結果は(4.7)式である。

$$M \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \frac{\rho}{2} g k H^2 L \tanh kh \cos 2\sigma t \quad (4.7)$$

したがって、(4.7)式を(4.5)式に代入すれば(4.8)式が得られる。

$$F(t) = \frac{\sigma^2 H^2}{2} \left(\cos 2\sigma t + \frac{2}{\sinh^2 kh} \cos^2 \sigma t \right) \quad (4.8)$$

$F(t)$ を(4.2)式に代入し、 $(\partial \phi / \partial t)_{z=0}$ の代りに $(\partial \phi / \partial t)_{z=\eta}$ においても $p = 0$ を満たすことはできない。永井 [1962] は(4.1)式を(4.2)式に代入し、 $p = 0$ となるように $F(t)$ を定める計算を示している。しかし、その結果は(4.8)式とは一致していない。(4.8)式はその誘導過程からみて根拠のあるものと考えられるから、(4.2)式が満たされないのは、(4.1)式が厳密でないためである。近似度の高い重複波の理論がいくつか発表されているが、ここでは触れない。

(4.8)式をみると、 $F(t)$ は表面波形の1/2の週期で動揺する圧力をあらわしていることがわかる。波山の時刻は $\sigma t = \frac{\pi}{2}$ のときであるが、このときには $F(t)$ は負の値である。したがって重複波で、比較的波形こう配が大きい波では、波山のときに必ずしも波圧の最大は生じないで、波山の時刻の前後にむしろ高い圧力があらわれる。浜田 [1953] は、重複波の実験からこのような重複波の特性を確認するとともに、波形が(4.3)式のように単純でない場合にも使用できる壁面圧力の算出式として(4.9)式を示した。

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \frac{\sinh^2 k(z_t + h)}{\sinh^2 kh} \right\} \frac{d^2}{dt^2} \eta^2(t) + g \eta(t) \frac{\cosh k(z_t + h)}{\cosh kh} - g z_t \quad (4.9)$$

ただし

z_t : 静止時に z の位置にあった分子の時刻 t のときの位置で(4.10)式で与えられる。

$$z_t = \eta(t) \frac{\sinh k(z + h)}{\sinh kh} + z \quad (4.10)$$

(4.9)式によれば、波形こう配がかなりの大きさを持ち、しかも波形が変形した波が直立壁に入射するときは、(4.8)式の右辺 $F(t)$ に相当する第1項が異常に大きくなって砕波型の衝撃圧が生じ得ることがわかる。

4. 2 重複波の限界

前節に述べた通り、重複波型の波圧から砕波型の波圧への移行は、波形の安定性が大いに関係している。

重複波で波形が不安定になる1つの条件は Suquet および Wallet [1953] および岸 [1955] によって研究された。岸の条件は(4.11)式であらわされる。

$$(\partial v / \partial t)_{z=\eta_c} + g \tan kh = 0 \quad (4.11)$$

波山の位置では $u, v = 0$ であるから、(4.11)式は(4.12)式になる*。

$$(\partial^2 \eta / \partial t^2)_{\eta=\eta_0} + g \tanh kh = 0 \quad (4.12)$$

波形は Sainflou の式も、高次の近似解とよく一致するのであるから、(4.12)式に(4.13)式を代入して計算してみる。

$$\eta = \frac{1}{2} k H^2 \coth kh \cdot \sin^2 \sigma t + H \cdot \sin \sigma t \quad (4.13)$$

計算の結果得られる重複波の砕波限界は図-4.1の実線のように、これは Suquet および Wallet の実験値とよく合っているのである。図にはさらに、進行波の砕波限界も記入した。入射波が進行波の砕波限界に近ければ、波は多かれ少なかれ不安定であるから、壁面では衝撃的な波圧が生ずるであろう。

4.3 重複波圧式の適用限界——重複波圧から砕波波圧への移行過程の考察

図-4.1に示した重複波の砕波限界は、いわば重複波の絶対不安定限界をあらわすもので、波形の不規則性など不安定条件が重なればこの限界以下でも波圧に衝撃的な性質がみられるようになる。そこで永井 [1962, 1963] の実験結果から、重複波理論の適用限界をしらべてみる。前節に示したとおり、重複波では2倍周波数の圧力動揺があるが、一般に用いられている Sainflou の波圧式はこの効果を除外しているので実測値にくらべ過大の値を示し、この補正は無視できないのである。波圧が衝撃性を示すかどうかの判定は、2倍周波数成分の効果を考慮した式と実測波圧とを比較しなければならない。(4.8)式を用いて、波山の時刻の全波圧 P_0 を求めると、(4.14)式が得られる。(永井[1962])

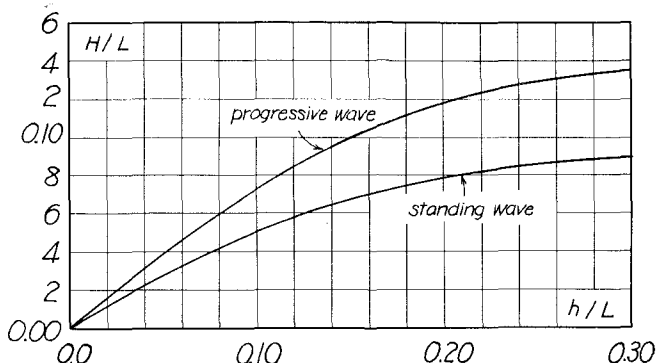


図-4.1 Maximum waves に対する H/L と h/L の関係

$$P_0 = \int_{-h}^{\eta_0} p dz = \frac{1}{2} \rho g (h^2 - H^2) + \rho g \frac{H \sinh k(h+H)}{k \cosh kh} - \rho g k H^2 (h+H) \tanh kh \quad (4.14)$$

P_0 と実測全波圧 P_e とを比較して、 $(P_0/P_e) > 1$ の領域を衝撃性波圧の発生域と考える。

衝撃性の波圧が発生するかどうかは、波形の安定性に関係しており、(4.9)式の第1項と第2項の大きさの比が発生条件をあらわすパラメーターになるであろう。

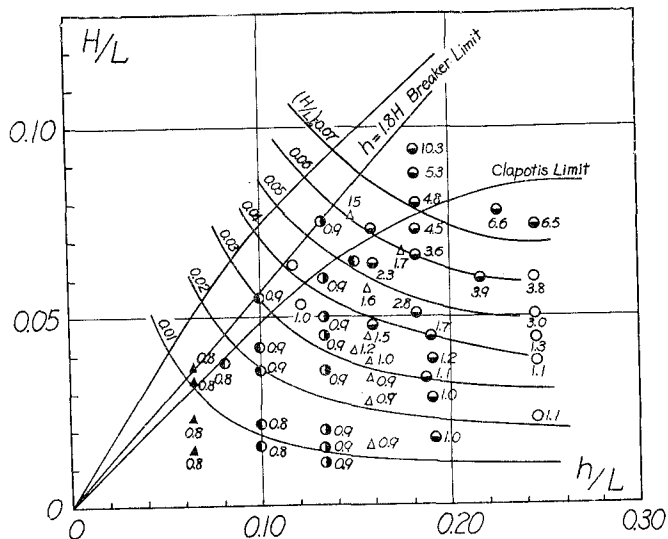
第1項と第2項の比は (η/gT^2) であらわされる。 η を H_0 に、 (gT^2) を L_0 に置きかえると、 (η/gT^2) は (H_0/L_0) でもあらわされる。そこで、図-4.1にパラメーター (H_0/L_0) の等値線を記入すると図-4.2のようになる。図には進行波の砕波限界線と普通重複波の限界として用いられている $h = 1.80H$ の線も記入してある。図によれば、次のような興味ある事実が見い出される。

- 重複波で部分砕波を生ずるのは $(H/L)_0 > 0.03$ の場合である。部分砕波の原因が波形の上昇加速度にあることを考えると、波形こう配にある下限が存在することは理解できるであろう。
- 波の初期波形こう配が大きいほど、部分砕波で生ずる衝撃的な圧力は大きくなる。
- $(h/L) < 0.12$ の場所では、 $h = 1.8H$ を重複波の限界と考えて大体差し支えない。
- $(h/L) > 0.16$ の場所では、部分砕波によって重複波の波圧の数倍にも及ぶ衝撃波性の波圧が生じ得る。入射波高が砕波波高の1/2程度でも、衝撃性の波圧は重複波圧の2～3倍に達し得る。この衝撃性の波圧は、過大の波圧を与える Sainflou の計算値より大きくなり得るので、Sainflou の式が必ずしも安全側の値を与える

* 岸の原論文ではより高次の近似を用いている。ここでは簡便法を示した。

とはいえない。

e) (h/L) が小さい場所では、図からもわかるとおり、重複波型の波圧から直ちに碎波型の衝撃波圧に移行する。これに対し、 (h/L) が大きい場所では重複波型から碎波型に移行するまでに、波形こう配にしてかなりの過渡領域が存在する。この過渡領域に対する波圧の算出式は現在のところ与えられていない。今後の研究が期待される。



図中の測定は永井(1962,1963)の実験値

○ $T=1.12 \text{ sec}$ ● $T=1.34 \text{ sec}$
 △ 1.58 ● 1.79
 ● 2.24 △ 2.70

数字は $[p(\text{実測値})/P(\text{計算値})]$ を示す。

図 - 4.2 重複波理論の適用限界 [Kishi]

参 考 文 献

- Beach Erosion Board [1961]: Shore Protection and Design; Tech. Rept. No. 4.
- Basset, A. B. [1888]: Wilson [1962] の論文中に説明あり。
- Borgan, L. E. and Chappellear, J. E. [1958]: The use of the Stokes-Struik approximation for waves of finite height; Proc. of 6th Conf. on Coastal Eng.
- Boussinesq, J. [1872]: Keulegan-Patterson; Journal of Research, Nat. Bur. of Stand., V. 24, 1940 中に再録されている。佐藤清一「水理学」(森北); 木間-石原編「応用水理学上(林 泰造)」(丸善)にも記述がある。
- Bretschneider, C. L. [1958]: Selection of design wave for offshore structure; Proc. ASCE, V. 84 (WW 2).
- Greenspan, H. P. [1958]: On the breaking of water waves of finite amplitude on a sloping beach; Journal of Fluid Mechanics, V. 4(3).
- Hamada, T. [1951]: Breakers and Beach Erosions; Rept. of Transp., Tech. Res. Inst., Rept. No. 1.
- 浜田徳一 [1953, 1956]: 構造物に作用する波力; 第3回海岸工学講演会講演集, 土木学会。原形は「波の理論に

- ついて、港湾講演集、1953中にみられる。
- 石原藤次郎、岩垣雄一、鈴木雄太 [1955] : 海岸堤防の設計、特にその有効高について ; 第2回海岸工学講演会講演集、土木学会。
- 石原藤次郎、岩垣雄一、三井 宏 [1957] : 海岸堤防の越波防止効果について ; 第4回海岸工学講演会講演集、土木学会。
- Iversen, H. W. [1952] : Waves and breakers in shoaling water ; Proc. of 3rd Conf. on Coastal Eng., 海岸工学委員会訳「海岸工学Ⅱ」(丸善)に邦訳あり。
- 岩垣雄一 [1964] : 表面波および波の変形 ; 水理公式集の解説と例題、土木学会関西支部。
- Johnson-Fuchs-Morison [1951] : Damping action of submerged breakwater ; Trans. Am. Geophys. Union, V. 32(5). 本間 - 石原編「応用水理学 中Ⅱ(田中 清)」に紹介あり。
- Johnson, J. W. and Bermel, K.J. [1949] : Impulsive waves in shallow water as generated by falling weights ; Trans. Am. Geophys. Union, V. 30.
- 岸 力 [1955] : 海岸堤防に関する研究(2) - 有限振幅の浅水重複波 ; 建設省土木研究所報告, 90号。
- Kishi, T. [1962] : Transformation, breaking and run-up of a long wave of finite height ; Proc. of 8th Conf. on Coastal Eng.
- 近藤一郎, 佐藤功 [1963] : 防波堤天端高と越波に関する一研究 ; 技術資料, 土木学会北海道支部, 19号。
- Laitone, E. V. [1960] : The second approximation to cnoidal and solitary waves ; Journal of Fluid Mechanics, V. 9(3).
- Mason, M. A. [1948] : A study of progressive oscillatory waves in water ; B. E. B., Tech. Rept. No. 1, Bretschneider [1958] の論文中に詳細な引用あり。
- Masch, D. F. and Wiegel, R. L. [1961] : Cnoidal waves - Table of Functions ; Council on Wave Research, The Engineering Foundation, Univ. of Calif.
- 永井荘七郎 [1962] : 重複波の発生条件と重複波の波圧 ; 第9回海岸工学講演会講演集, 土木学会。
- 永井荘七郎, 玉井, 西村 [1963] : 深い海中に築造された直立防波堤に働く波圧 ; 第10回海岸工学講演会講演集, 土木学会。
- Prins, J. E. [1958] : Characteristics of waves generated by a local disturbance ; Trans. Am. Geophys. Union, V. 39(5).
- 佐藤清一, 岸 力 [1954] : 海岸堤防に関する研究(1) - 海岸堤防に衝突する波の高さについて ; 建設省土木研究所報告, 88号。
- Skjelbreia, L. and Hendrickson, J. A. [1960] : Fifth order gravity wave theory ; Proc. 7th Conf. on Coastal Eng., V. 1.
- Suquet, F. and Wallet, A. [1953] : Basic experimental wave research ; Proc. Minnesota Internat. Hyd. Conv., I. A. H. R.
- Ursell, F. [1953] : The long wave paradox in the theory of gravity waves ; Proc. Cambr. Phil. Soc., V. 49(4).
- Wiegel, R. L. [1960] : A presentation of cnoidal wave theory for practical application ; Journal of Fluid Mechanics, V. 7(2).
- Wiegel, R. L. [1955] : Laboratory studies of gravity waves generated by the movements of a submerged body ; Trans. Am. Geophys. Union, V. 36(5).
- Wilson, B. W., Webb, L. M. and Hendrickson, J. A. [1962] : The nature of tsunamis, their generation and dispersion in water of finite depth ; NESCO Tech. Rept. No. SN 57-2.

付 録 I 連立偏微分方程式における特性帯の理論

1. 連立偏微分方程式 (A.I-1) 式を考える。

$$\left. \begin{aligned} A_1 u_t + B_1 u_x + C_1 v_t + D_1 v_x + E_1 &= 0 \\ A_2 u_t + B_2 u_x + C_2 v_t + D_2 v_x + E_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.I-1})$$

ただし係数 $A_1, A_2, B_1, B_2, \dots, E_1, E_2$ はすべて独立変数 t, x および従属変数 u, v のみの関数で u, v の t, x に関する導関数を含まないものとする。

u_t, u_x, v_t, v_x を未知量と考えると, (A.I-1)式は4つの未知量に対する2個の条件式である。そこでさらに u, v の t, x に関する全微分の式 (A.I-2)式を考える。

$$\left. \begin{aligned} \delta t u_t + \delta x u_x &= \delta u \\ \delta t v_t + \delta x v_x &= \delta v \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.I-2})$$

(A.I-1), (A.I-2)式は u_t, u_x, v_t, v_x に対する4個の連立一次方程式であるから, これを解いて未知量を求めることができる。係数行列式を Δ , Δ の第 i 列を $-E_1, -E_2, \delta u, \delta v$ で置きかえて得られる行列式を Δ_i とする。すなわち,

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ \delta t & \delta x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta t & \delta x \end{vmatrix} \quad (\text{A.I-3})$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} -E_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ -E_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ \delta u & \delta x & 0 & 0 \\ \delta v & 0 & \delta t & \delta x \end{vmatrix}, & \Delta_2 &= \begin{vmatrix} A_1 & -E_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & -E_2 & C_2 & D_2 \\ \delta t & \delta u & 0 & 0 \\ 0 & \delta v & \delta t & \delta x \end{vmatrix}, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & -E_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & -E_2 & D_2 \\ \delta t & \delta x & \delta u & 0 \\ 0 & 0 & \delta v & \delta x \end{vmatrix}, & \Delta_4 &= \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -E_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -E_2 \\ \delta t & \delta x & 0 & \delta u \\ 0 & 0 & \delta t & \delta v \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.I-4})$$

Δ, Δ_i を用いれば, u_t, u_x, v_t, v_x は (A.I-5)式であらわされる。

$$u_t = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad u_x = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad v_t = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad v_x = \frac{\Delta_4}{\Delta} \quad (\text{A.I-5})$$

ここで一例として, 静止した水域に波が進入する場合を考えると, 波の先端では, (A.I-5)式に与えた諸量は不連続であるから, 0/0 の形の不定形になるであろう。

まず分母を0として, $\Delta=0$ の条件をしらべる。(A.I-3)式を用いて計算すれば (A.I-6)式が得られる。

$$\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} (\delta x)^2 - \left\{ \begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \right\} \delta x \delta t + \begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix} (\delta t)^2 = 0 \quad (\text{A.I-6})$$

計算を簡単にするために新しい記号 (A.I-7)式を用いる。

$$[PQ] = P_1 Q_2 - P_2 Q_1 \quad (\text{A.I-7})$$

(A.I-7)式を用いて (A.I-6)式を書き直すと (A.I-8)式が得られる。

$$a (\delta x / \delta t)^2 - 2b (\delta x / \delta t) + c = 0 \quad (\text{A.I-8})$$

ただし

$$a = [AC], \quad 2b = [AD] + [BC], \quad c = [BD] \quad (\text{A.I-9})$$

(A.I-8)式を $(\delta x / \delta t)$ の2次式とみなし, 2根を λ_+, λ_- と書くと

$$\lambda_{\pm} = \frac{b \pm \sqrt{(b^2 - ac)}}{a}, \quad \lambda_- = \frac{b - \sqrt{(b^2 - ac)}}{a} \quad (\text{A.I-10})$$

すなわち, $\Delta=0$ の条件として (A.I-11) 式が得られる。

$$\delta x - \lambda_{\pm} \delta t = 0 \quad (\text{A.I-11a})$$

$$\delta x - \delta \lambda_- \delta t = 0 \quad (\text{A.I-11b})$$

つぎに分子が0になる場合として $d_4 = 0$ を考える。計算の結果 (A.I-12)式が得られる。

$$[AB] \delta u + \{ [AC] (\delta x / \delta t) - [BC] \} \delta v + \{ [AE] (\delta x / \delta t) - [BE] \} \delta t = 0 \quad (\text{A.I-12})$$

以上をまとめて書くと、例えば $v_x = 0/0$ という条件は (A.I-13) 式となる。

$$\delta x = \lambda_+ \delta t \quad (\text{A.I-13a})$$

$$T \delta u + (a \lambda_+ - S) \delta v + (L \lambda_+ - M) \delta t = 0 \quad (\text{A.I-13b})$$

$$\delta x = \lambda_- \delta t \quad (\text{A.I-13c})$$

$$T \delta u + (a \lambda_- - S) \delta v + (L \lambda_- - M) \delta t = 0 \quad (\text{A.I-13d})$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} T &= [AB], \quad a = [AC], \quad S = [BC] \\ L &= [AE], \quad M = [BE] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.I-14})$$

2. 前節の理論を第2章 (2.3), (2.4)式に適用する。

$$[v(h+\eta)]_x = -\eta_t \quad (2.3)$$

$$v_t + vv_x = -\eta_x \quad (2.4)$$

ここで $c^2 = h + \eta$ とおき (2.3), (2.4)式を書き直すと (A.I-15)式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} 2cc_t + 2vcc_x + c^2 v_x &= 0 \\ 2cc_x + v_t + vv_x &= h_x \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.I-15})$$

(A.I-1)式と比較すると次のようになる。

$$\begin{aligned} A_1 &= 2c, & B_1 &= 2vc, & C_1 &= 0, & D_1 &= c^2, & E_1 &= 0 \\ A_2 &= 0, & B_2 &= 2c, & C_2 &= 1, & D_2 &= v, & E_2 &= -h_x \end{aligned}$$

(A.I-14)式にこれらの値を代入すると

$$\begin{aligned} T &= [AB] = 4c^2, & a &= [AC] = 2c, & S &= [BC] = 2vc \\ L &= [AE] = -2ch_x, & M &= [BE] = -2vch_x \end{aligned}$$

また λ_+ , λ_- を求めるために (A.I-9)式を計算すると

$$\begin{aligned} 2b &= [AD] + [BC] = 4vc, \text{ または } b = 2vc \\ c &= [BD] = 2c(v^2 - c^2) \end{aligned}$$

すなわち (A.I-10)式から

$$\lambda_+ = (v+c), \quad \lambda_- = (v-c) \quad (\text{A.I-16})$$

(A.I-16)式を (A.I-13)式に代入すると第2章 (2.5)~(2.8)式が得られる。

$$\delta x = (v+c) \delta t \quad (2-5)$$

$$\delta(v+2c) - h_x \delta t = 0 \quad (2-6)$$

$$\delta x = (v-c) \delta t \quad (2-7)$$

$$\delta(v-2c) - h_x \delta t = 0 \quad (2-8)$$

3. (2-5)~(2-8)式の連立微分方程式が (2-3), (2-4)式と同等であることは、次のように確かめられる。

全微分の関係 (A.I-2)式を参照して(2-6), (2-8)式を書き直すと (A.I-17), (A.I-18)式が得られる。

$$2cc_t + 2(v+c)c_x + v_t + (v+c)v_x - h_x = 0 \quad (\text{A.I-17})$$

$$-2cc_t - 2(v-c)c_x + v_t + (v-c)v_x - h_x = 0 \quad (\text{A.I-18})$$

(A.I-17)式と (A.I-18)式を加えると, $2cc_x = h_x + \eta_x$ を考慮して

$$v_t + vv_x = -\eta_x \quad (2-4)$$

(A.I-17)式から (A.I-18)式を差引けば, $2cc_t = \eta_t$ であるから

$$[v(h+\eta)]_x = -\eta_t \quad (2-3)$$

それぞれもとの微分方程式が得られる。

参 考 文 献

犬井 鉄郎〔1951〕：応用偏微分方程式論（岩波）

河村 龍馬〔1958〕：高速空気力学（日刊工業新聞）

岸 力〔1953〕：特性曲線法による非定常流の解き方(1)，建設省土木研究所報告，85号。

付 録 II 浅い水域における移動性の波の理論

(Keulegan G. H. and Patterson G. W. [1940] : Mathematical Theory of
Irrotational Translation Waves, Journal of Research, Nat. Bur. of
Stand., V. 24 要約)

1. 水路底に x 軸，鉛直上向きに z 軸をとる。速度ポテンシャルを ϕ とすると

$$u = -\partial\phi/\partial x \quad (\text{A.II-1})$$

$$w = -\partial\phi/\partial z \quad (\text{A.II-2})$$

また ϕ は Laplace の式を満たす。

$$\partial^2\phi/\partial x^2 + \partial^2\phi/\partial z^2 = 0 \quad (\text{A.II-3})$$

任意の深さ z の点の圧力は (A.II-4) 式で与えられる。

$$p/\rho = \partial\phi/\partial t - gz - \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + F(t) \quad (\text{A.II-4})$$

水路の静止水深を h ，静水面から測った波面の高さを η とする。すなわち波の表面を $z = h + \eta$ であらわす。

(A.II-4) 式で $F(t)$ を定めるために，自由表面上の無限遠点に対して次の条件を与える。

$$z = h \text{ で } \partial\phi/\partial t = u = w = \eta = 0$$

$$p = p_a$$

(A.II-4) 式にこの条件を代入すると

$$F(t) = p_a/\rho + gh$$

自由表面では到る処 $p = p_a$ であるから，自由表面の力学的条件は (A.II-5) 式になる。

$$\partial\phi/\partial t - g\eta - \frac{1}{2}(u^2 + w^2) = 0, \quad z = h + \eta \quad (\text{A.II-5})$$

(A.II-5) 式は $z = h$ または $\eta = 0$ の位置で $\partial\phi/\partial t = u = w = 0$ の条件が成り立てばよいのであるから，必ずしも無限遠点で水が静止していなくてもよいのである。

自由表面の運動学的条件は (A.II-6) 式である。

$$w = \partial\eta/\partial t + u\partial\eta/\partial x, \quad z = h + \eta \quad (\text{A.II-6})$$

また水路底では $w = 0$ であるから

$$\partial\phi/\partial z = 0, \quad z = 0 \quad (\text{A.II-7})$$

条件 (A.II-7) 式を考え， ϕ が (A.II-8) 式であらわされると仮定する。

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n z^n, \quad \phi_1 = 0 \quad (\text{A.II-8})$$

ただし ϕ_n は x, t のみの関数である。

(A.II-8) 式を (A.II-3) 式に代入すると (A.II-9) 式が得られる。

$$\phi = \phi_0 - \frac{z^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + \frac{z^4}{4!} \frac{\partial^4 \phi_0}{\partial x^4} - \frac{z^6}{6!} \frac{\partial^6 \phi_0}{\partial x^6} + \dots \quad (\text{A.II-9})$$

(A.II-9) 式から ϕ , $\partial\phi/\partial z$ の第 1 近似値は (A.II-10) 式になる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi_0 \\ -\partial\phi/\partial z &= w = z\partial^2\phi_0/\partial x^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.II-10})$$

(A.II-10) 式を (A.II-5) 式および (A.II-6) 式に代入すると (A.II-11) 式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \partial\phi_0/\partial t - g\eta &= 0 \\ -h(\partial^2\phi_0/\partial x^2) + \partial\eta/\partial t &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.II-11})$$

(A.II-11)式で x の正の方向に進む波だけを考えたと解は (A.II-12)式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \eta/h &= f(x - ct) \\ u/c &= f(x - ct) \\ c &= \sqrt{gh} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.II-12})$$

(A.II-12)式から, x の正の方向に進む波については, 第1近似において (A.II-13)式が成り立つ。

$$u_0 = \sqrt{g/h} \eta \quad (\text{A.II-13})$$

2. つぎに第2次近似に進む前に, 波の伝播速度について考察する。ある点 x に一つの鉛直平面を考え, その平面が常に前面に同一の水量を保ちながら移動するとき, その平面の移動速度を波の伝播速度と定義する。この定義は Boussinesq によるものである。

定義により, 伝播速度を ω と書けば, 次の関係が成り立たねばならない。

$$\eta\omega \, dt = \int_x^\infty \frac{\partial\eta}{\partial t} \, dx \, dt$$

両辺を dt で割り, x で微分すると (A.II-14)式が得られる。

$$\partial\eta/\partial t + \partial(\eta\omega)/\partial x = 0 \quad (\text{A.II-14})$$

もし波が変形せずに伝播するものとすれば, ω は一定値であるから (A.II-14)式は (A.II-15)式になる。

$$\partial\eta/\partial t + \omega\partial\eta/\partial x = 0 \quad (\text{A.II-15})$$

(A.II-14)式と連続の条件を比較すれば

$$\partial Q/\partial x = \partial [U(h+\eta)]/\partial x = \partial(\eta\omega)/\partial x \quad (\text{A.II-16})$$

ここに Q : 任意の鉛直断面の流量

U : 任意の鉛直断面内の平均流速

(A.II-16)式を積分するに当り, $\eta = 0$ の点で $U = 0$ であるならば, (A.II-17), (A.II-18)式が成り立つ。

$$U = \eta\omega/(h+\eta) \quad (\text{A.II-17})$$

$$\omega = Q/\eta \quad (\text{A.II-18})$$

3. 表面条件(A.II-5), (A.II-6)式において w^2 の項を省略し, また u の代りに第1近似値 u_0 すなわち(A.II-13)式を用いればそれぞれ (A.II-19), (A.II-20)式が得られる。

$$g\eta - \partial\phi/\partial t + \frac{1}{2}(g/h)\eta^2 = 0 \quad (\text{A.II-19})$$

$$\partial\phi/\partial z + \partial\eta/\partial t + \sqrt{g/h}\eta(\partial\eta/\partial x) = 0 \quad (\text{A.II-20})$$

(A.II-9)式で初めの2項だけを考え, さらに(A.II-11)式を考慮すれば $\partial\phi/\partial t$ の第2近似値として(A.II-21)式が得られる。

$$\partial\phi/\partial t = \partial\phi_0/\partial t - (h^2g/2)\partial^2\eta/\partial x^2 \quad (\text{A.II-21})$$

つぎに $\partial\phi/\partial z$ の第2近似値を求めるに, x の正の方向にだけ進む波を考えて高次の項に (A.II-13)式を用いれば(A.II-22)式が得られる。

$$\begin{aligned} \partial\phi/\partial z &= -h\partial^2\phi_0/\partial x^2 + \sqrt{g/h}\eta\partial\eta/\partial x \\ &\quad - (h^3/6)\sqrt{g/h}\partial^3\eta/\partial x^3 \end{aligned} \quad (\text{A.II-22})$$

(A.II-21), (A.II-22)式を (A.II-19), (A.II-20)式に代入すると (A.II-23)式および(A.II-24)式が得られる。

$$g\eta - \partial\phi_0/\partial t + (g/2)[(\eta^2/h) + h^2\partial^2\eta/\partial x^2] = 0 \quad (\text{A.II-23})$$

$$\partial\eta/\partial t - h\partial^2\phi_0/\partial x^2 + \sqrt{g/h}\frac{\partial}{\partial x}[(\eta^2/h) - (h^2/6)\partial^2\eta/\partial x^2] = 0 \quad (\text{A.II-24})$$

両式から ϕ_0 を消去するために, (A.II-23)式を x で2回, (A.II-24)式を t で1回微分する。 t に関する微分の代りに近似式 (A.II-25)式を用いる。

$$\partial/\partial t \cong -\sqrt{g/h} \cdot \partial/\partial x \quad (\text{A.II-25})$$

計算の結果 (A.II-26)式が得られる。

$$\partial^2 \eta / \partial t^2 = gh \partial^2 \eta / \partial x^2 + gh \partial^2 / \partial x^2 [(3/2) (\eta^2/h) + (h^2/3) (\partial^2 \eta / \partial x^2)] \quad (\text{A.II-26})$$

この式は第2近似における波の運動の基本式で第1近似の (A.II-11)式と比較すれば、右辺第2項が補正項として加ったことがわかる。補正項には波高と波形の曲率の効果が含まれている。第1章 (1.8)式は (A.II-26)式である。

4. つぎに流速成分 u, w を求める。(A.II-24)式において $\partial \eta / \partial t$ を (A.II-14)式を用いて $\tau - \partial (\eta \omega) / \partial x$ と書き変えると、底面流速 u_0 の式として (A.II-27)式が得られる。

$$u_0 = \sqrt{g/h} [\eta - (\eta^2/4h) + (h^2/3) (\partial^2 \eta / \partial x^2)] \quad (\text{A.II-27})$$

(A.II-9)式に (A.II-27)式を代入すれば、流速成分の第2近似として (A.II-28), (A.II-29)式が得られる。

$$u = \sqrt{g/h} [(\eta/h) - (\eta^2/4h^2) + (h/3 - z^2/2h) (\partial^2 \eta / \partial x^2)] \quad (\text{A.II-28}),$$

$$w = -z \sqrt{g/h} [(1/h - \eta/2h^2) (\partial \eta / \partial x) + (h/3 - z^2/6h) (\partial^3 \eta / \partial x^3)] \quad (\text{A.II-29})$$

5. 第2近似における波の運動の基本式 (A.II-26)式からクノイド波の理論が導かれる。伝播にともない変形しない不変性の波を扱うから、新しい変数 (A.II-30)式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} (x - \omega t) &= \xi h \\ \eta &= \zeta h \\ \left(\frac{\omega^2}{gh} - 1 \right) &= b \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.II-30})$$

(A.II-30)式を (A.II-26)式に代入すると $\partial^2 / \partial t^2 = \omega^2 \partial^2 / \partial x^2$ であるから (A.II-31)式が得られる。

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (6b\zeta - 9\zeta^2 - 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2}) = 0 \quad (\text{A.II-31})$$

(A.II-31)式を2回積分すれば (A.II-32)式が得られる。

$$6b\zeta - 9\zeta^2 - 2\partial^2 \zeta / \partial \xi^2 + c_1 \xi + c_2 = 0 \quad (\text{A.II-32})$$

c_1, c_2 は積分常数であるが、 ξ の如何にかかわらず (A.II-32)式が成立するためには $c_1 = 0$ でなければならない。さらに $\zeta = 0$ の点で $\partial^2 \zeta / \partial \xi^2 = 0$ であるならば $c_2 = 0$ となり、これは孤立波を与える。

ここでは条件をさらに一般化して、 $\zeta = 0$ の点でも $\partial \zeta / \partial \xi, \partial^2 \zeta / \partial \xi^2$ は必ずしも0でない場合を考える。(A.II-32)式で $c_2 \neq 0$ とし、両辺に $(\partial \zeta / \partial \xi) d\xi$ を乗じて積分すると (A.II-33)式が得られる。

$$(d\zeta/d\xi)^2 = 3b\zeta^2 - 3\zeta^3 + 3c_2\zeta + 3c_1 \quad (\text{A.II-33})$$

ただし c_1 は別の積分常数である。

(A.II-33)式において $(d\zeta/d\xi)$ は $\zeta = 0$ で実数であるから c_1 は正である。もし右辺の3次式の根を $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ とすれば次の関係が成り立つ、

$$\zeta_1 \cdot \zeta_2 \cdot \zeta_3 = c_1$$

この関係から、3根は全部正か、一つが正で他の二つは負、あるいは一つが正で他の二つは複素数である。このうち無限の波列を考えている今の問題に適合するのは第二の場合である。すなわち一つの波について $d\zeta/d\xi = 0$ となる ζ の値が3個あり、1個は正、他の2個は負である。この3根をあらためて $\zeta_1, -\zeta_2, -\zeta_3, \zeta_3 \geq \zeta_2$ と書くと (A.II-33)式は (A.II-34), (A.II-35)式のようにあらわされる。

$$(d\zeta/d\xi)^2 = 3(\zeta_1 - \zeta)(\zeta + \zeta_2)(\zeta + \zeta_3) \quad (\text{A.II-34})$$

$$\left. \begin{aligned} b &= \zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3 \\ c_2 &= -\zeta_2\zeta_3 + \zeta_1\zeta_3 + \zeta_1\zeta_2 \\ c_1 &= \zeta_1\zeta_2\zeta_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.II-35})$$

(A.II-34)式から $\zeta_1 \geq \zeta \geq -\zeta_2$ の範囲でだけ ζ が実在し得ることがわかるから、新しい変数 χ を用いて ζ を (A.II-36)式であらわす。

$$\zeta = \zeta_1 \cos^2 \chi - \zeta_2 \sin^2 \chi \quad (\text{A.II-36})$$

(A.II-36)式を (A.II-34)式に代入すると (A.II-37)式となる。

$$\beta (d\chi/d\xi) = \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \chi)} \quad (\text{A.II-37})$$

ただし β, k^2 はそれぞれ (A.II-38), (A.II-39)式で与えられる。

$$\beta = \sqrt{\left[\frac{4}{3(\xi_1 + \xi_3)} \right]} = \sqrt{\left[\frac{4h}{3(\eta_1 + \eta_3)} \right]} \quad (\text{A.II-38})$$

$$k^2 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{\xi_1 + \xi_3} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 + \eta_3} \quad (\text{A.II-39})$$

(A.II-37)式を積分するに当り、波頂の位置を $\xi=0$ にとると、そこでは $\xi=\xi_1$ すなわち $\chi=0$ であるから (A.II-40)式が得られる。

$$\xi = \beta \int_0^x \frac{d\chi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \chi)}} = \beta F(x, k) \quad (\text{A.II-40})$$

ただし F は第1種不完全楕円積分

Jacobi の楕円関数を用いると、次の関係が成り立つから (A.II-36)式は (A.II-41)式になる。

$$\left. \begin{aligned} \cos \chi &= cn(\xi/\beta, k), \quad \sin \chi = sn(\xi/\beta, k) \\ sn^2 \bar{u} + cn^2 \bar{u} &= 1 \\ \xi &= -\xi_2 + (\xi_1 + \xi_2) cn^2(\xi/\beta, k) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.II-41})$$

変数をもとにもどすと (A.II-42)式が得られる。

$$\eta = -\eta_2 + (\eta_1 + \eta_2) cn^2 \left[\sqrt{\left(\frac{3(\eta_1 + \eta_3)}{4h^3} \right)} (x - \omega t), \sqrt{\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 + \eta_3} \right)} \right] \quad (\text{A.II-42})$$

波長は (A.II-40)式を用いれば (A.II-43)式で与えられる。

$$\frac{L}{h} = 2\beta \int_0^{\pi/2} \frac{d\chi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \chi)}} = 2\beta F_1(k) \quad (\text{A.II-43})$$

ただし F_1 は第1種完全楕円積分

水路の初めの水深が h であるから

$$\int_0^{L/h} \xi d\xi = 0$$

この式に (A.II-36), (A.II-37)式を代入すると

$$2 \int_0^{\pi/2} \frac{(\xi_1 \cos^2 \chi - \xi_2 \sin^2 \chi) \beta}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \chi)}} d\chi = 0$$

(A.II-39)式を用いてこれをさらに書き直すと (A.II-44)式が得られる。

$$(\eta_1 + \eta_3) E_1(k) = \eta_3 F_1(k) \quad (\text{A.II-44})$$

ただし E_1 は第2種完全楕円積分

ここに求めた諸式は同一の大きさ、形をもつ無限個数の波列をあらわしている。この不変性の週期波の存在は Boussinesq によって最初に指摘されたものであり、Korteweg & de Vries によってクノイド波 (Cnoidal wave) と名付けられた。

クノイド波の波形を定めるには η_1, η_2, η_3 および k の値が必要である。しかし、これらの4量は互に独立でなく、(A.II-39)式(または (A.II-43)) および (A.II-44)式という関係がある。結局クノイド波では4量のうち2量を与えれば、波形は確定するのである。

最後にこの波の伝播速度を求める。(A.II-30)式 と (A.II-35)式から (A.II-45)式が得られる。

$$\omega = (gh)^{1/2} \left[1 + \frac{\eta_1}{h} - \frac{\eta_2}{h} - \frac{\eta_3}{h} \right]^{1/2} \quad (\text{A.II-45})$$

(A.II-39), (A.II-44)式および $\eta_1 + \eta_2 = H$ の3式を解けば η_1, η_2, η_3 は (A.II-46)式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= (H/k^2) (1 - E_1(k)/F_1(k)) \\ \eta_2 &= (H/k^2) (E_1(k)/F_1(k) - (1 - k^2)) \\ \eta_3 &= (H/k^2) (E_1(k)/F_1(k)) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.II-46})$$

(A.II-46)式を (A.II-45)式に代入すれば (A.II-47)式が得られる。

$$\omega = (gh)^{1/2} \left[1 + \frac{H}{k^2 h} \left(2 - k^2 - 3 \frac{E_1(k)}{F_1(k)} \right) \right]^{1/2} \quad (\text{A.II-47})$$

(A.II-45)式で η_2/h を省略すれば (A.II-48)式となる。

$$\omega \cong (gh)^{1/2} \left[1 + \frac{H}{k^2 h} \left(\frac{1}{2} - \frac{E_1(k)}{F_1(k)} \right) \right] \quad (\text{A.II-48})$$

(A.II-48)式は Korteweg & de Vries が (A.II-49)式から求めた伝播速度 (A.II-50)式と一致している。

$$chL = \int_0^L \int_0^{h+\eta} u dz dx \quad (\text{A.II-49})$$

$$c = (gh)^{1/2} \left[1 + \frac{H}{k^2 h} \left(\frac{1}{2} - \frac{E_1(k)}{F_1(k)} \right) \right] \quad (\text{A.II-50})$$

付 録 III クノイド波理論の実用解

(Wiegel, R.L. [1960] : A Presentation of Cnoidal Wave
(Theory for Practical Application, Journal of Fluid
Mechanics, V.7, Part 2. 要約)

クノイド波の波長 L は (A.III-1)式で与えられる*。

$$\frac{L}{h} = \frac{4}{\sqrt{3}} F_1(k) \left(2\bar{L} + 1 - \frac{z_t}{h} \right)^{-1/2} \quad (\text{A.III-1})$$

ただし h : 静止水深

z_t : 波谷から水底までの深さ

F_1 : 第1種完全楕円積分

また $\bar{L}, k$ は (A.III-2)式および (A.III-3)式の2式で定義される量である。

$$k^2 = \frac{(z_o/h) - (z_t/h)}{2\bar{L} + 1 - (z_t/h)} \quad (\text{A.III-2})$$

$$(2\bar{L} + 1 - (z_t/h)) E_1(k) = (2\bar{L} + 2 - (z_o/h) - (z_t/h)) F_1(k) \quad (\text{A.III-3})$$

ただし E_1 : 第2種完全楕円積分

z_o : 波頂から水底までの深さ

(A.II-34)式で示したように $\zeta_3 \geq \zeta_2$ であるから

$$\left. \begin{aligned} 2\bar{L} + 1 &\geq (z_o/h) > (z_t/h) \\ 0 < k^2 &\leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.III-4})$$

(A.III-2)式を書き変えると

* (A.II) の諸式と (A.III-1)~(A.III-3)式との関係は次のようである。(A.II-43)式と (A.III-1)式とを比較し、 β に (A.II-38)式を用いると。

$$\zeta_1 + \zeta_3 = 2\bar{L} + 1 - (z_t/h) \quad (\text{a})$$

(A.II-39)式と (A.III-2)式を比較すると

$$\zeta_1 + \zeta_2 = (z_o/h) - (z_t/h) = H/h \quad (\text{b})$$

(A.II-44)式と (A.III-3)式を比較すると

$$\zeta_3 = 2\bar{L} + 2 - (z_o/h) - (z_t/h) \quad (\text{c})$$

(a) ~ (c) から (d) の関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= (z_o/h) - 1 \\ \zeta_2 &= (z_t/h) - 1 \\ \zeta_3 &= 2\bar{L} - \zeta_1 + \zeta_2 \text{ または } \zeta_1 - \zeta_2 + \zeta_3 = 2\bar{L} \end{aligned} \right\} \quad (\text{d})$$

$$2\bar{L} + 1 - (z_t/h) = (H/h)/k^2 \quad (\text{A.III-5})$$

(A.III-5)式を (A.III-1)式に代入すると

$$L^2 H/h^3 = (16/3) [kF_1(k)]^2 \quad (\text{A.III-6})$$

(A.III-6)式は波の特性値と楕円積分の母数との関係をあらわす重要な式である。

(A.III-3)式において

$$2\bar{L} + 2 - (z_o/h) - (z_t/h) = [2\bar{L} + 1 - (z_t/h)] + 1 - (z_o/h)$$

であるから, (A.III-3)式は (A.III-7)式と書くことができる。

$$E_1(k) - F_1(k) = \frac{[1 - (z_o/h)]}{[2\bar{L} + 1 - (z_t/h)]} F_1(k) \quad (\text{A.III-7})$$

(A.III-7)式に (A.III-1)式を代入すると

$$\frac{z_o}{h} = \frac{16h^2}{3L^2} \left\{ F_1(k) [F_1(k) - E_1(k)] \right\} + 1 \quad (\text{A.III-8})$$

両辺に h/H を乗じて整理すると

$$\frac{z_o}{H} - \frac{h}{H} = \frac{\eta_o}{H} = \frac{16h^3}{3L^2 H} \left\{ F_1(k) [F_1(k) - E_1(k)] \right\} \quad (\text{A.III-9})$$

これをさらに (A.III-6)式によって書き直すと

$$\frac{\eta_o}{H} = \frac{F_1(k) [F_1(k) - E_1(k)]}{[kF_1(k)]^2} \quad (\text{A.III-10})$$

また z_t は (A.III-8)式から

$$\frac{z_t}{h} = \frac{z_o}{h} - \frac{H}{h} = \frac{16h^2}{3L^2} \left\{ F_1(k) [F_1(k) - E_1(k)] \right\} + 1 - \frac{H}{h} \quad (\text{A.III-11})$$

静水面と z_t との差 δt は (A.III-11)式から

$$\delta t = H - (16h^3/3L^2) \{ F_1(k) [F_1(k) - E_1(k)] \}$$

これに (A.III-6)式を代入すると

$$\delta t = \frac{H}{k^2} \left[\frac{E_1(k)}{F_1(k)} - (1 - k^2) \right] \quad (\text{A.III-12})$$

波形を求めるために (A.II-42)式に (A.III-6)式および (A.II-39)式を代入して整理すると

$$z_s = z_t + Hcn^2 [2F_1(k) \left(\frac{x}{L} - \frac{t}{T} \right), k] \quad (\text{A.III-13})$$

伝播速度として Stokes の第二定義にしたがい, 波の水平運動量を 0 にする 速度を求めると (A.III-14a)式および (A.III-14b)式が得られる。

$$c = (gh)^{1/2} \left[1 + \frac{H}{hk^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{E_1(k)}{F_1(k)} \right) \right] \quad (\text{A.III-14a})$$

(A.III-6)式を代入して書き変えると

$$c = (gh)^{1/2} \left[1 + \frac{16h^2}{3L^2} F_1^2(k) \left(\frac{1}{2} - \frac{E_1(k)}{F_1(k)} \right) \right] \quad (\text{A.III-14b})$$

一つの極限として $k_2 \rightarrow 1$ の場合を考えると, (A.III-14a)式から

$$c = (gh)^{1/2} \left(1 + \frac{H}{2h} \right) \quad (\text{A.III-14c})$$

これは孤立波の伝播速度 (A.III-14d)式と殆んど一致している。

$$c = (gh)^{1/2} \left(1 + \frac{H}{h} \right)^{1/2} \quad (\text{A.III-14d})$$

他の極限として $k^2 \rightarrow 0$ の場合を考える。

$E_1(k)/F_1(k) \rightarrow 1$ であるから (A.III-14b)式は (A.III-14e)式となる。

$$c = (gh)^{1/2} \left(1 - \frac{2\pi^2 h^2}{3L^2} \right) \quad (\text{A.III-14e})$$

これは (A.III-14f) 式の近似式と考えられる。

$$c = \left\{ gh \left(1 - \frac{4\pi^2 h^2}{3L^2} \right) \right\}^{1/2} \quad (\text{A.III-14f})$$

さて小振巾の進行波の伝播速度は (A.III-14g) 式である。

$$c = \left\{ \frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L} \right\}^{1/2} \quad (\text{A.III-14g})$$

(A.III-14g) 式を展開して初めの 2 項を考えると (A.III-14f) 式が得られる。

(A.III-6) 式と (A.III-14a) 式とからクノイド波の週期を求めると (A.III-15) 式が得られる。

$$T \sqrt{g/h} = \sqrt{\left(\frac{16h}{3H} \right)} \left\{ \frac{kF_1(k)}{1 + \frac{H}{hk^2} \left[\frac{1}{2} - \frac{E_1(k)}{F_1(k)} \right]} \right\} \quad (\text{A.III-15})$$

流速の 2 成分 u, w は (A.II-28), (A.II-29) 式に (A.III-13) 式を代入して求められる。

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{gh}} = & \left[-\frac{5}{4} + \frac{3z_t}{2h} - \frac{z_t^2}{4h^2} + \left(\frac{3H}{2h} - \frac{z_t H}{2h^2} \right) cn^2() \right. \\ & - \frac{H^2}{4h^2} cn^4() - \frac{8HF_1^2(k)}{L^2} \left(\frac{h^2}{3} - \frac{Z^2}{2h} \right) \left\{ -k^2 sn^2() cn^2() \right. \\ & \left. \left. + cn^2() dn^2() - sn^2() dn^2() \right\} \right] \quad (\text{A.III-16}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w}{\sqrt{gh}} = & z \frac{2HF_1(k)}{Lh} \left[1 + \frac{z_t}{h} + \frac{H}{h} cn^2() + \frac{32F_1^2(k)}{3L^2} \left(h^2 - \frac{z^2}{2} \right) \times \right. \\ & \left. \left\{ k^2 sn^2() - k^2 cn^2() - dn^2() \right\} \right] sn() cn() dn() \quad (\text{A.III-17}) \end{aligned}$$

ただし $sn()$ などは $sn(2F_1(k)(x/L - t/T), k)$ をあらわす。

(A.III-16), (A.III-17) 式の計算にあたっては次の関係を利用すればよい。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}/k &= 2F_1(k) x/L \\ sn^2(\bar{u}/k) &= 1 - cn^2(\bar{u}/k) \\ dn^2(\bar{u}/k) &= 1 - k^2 [1 - cn^2(\bar{u}/k)] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.III-18})$$

またクノイド波の圧力分布は (A.III-19) 式で与えられる静水圧分布である。

$$p = \rho g (z_s - z) \quad (\text{A.III-19})$$