

水 文 統 計 論

ま え が き

降水量、河川流量その他各種の水文諸量は、自然界における物理的要素と確率的要素に支配される不定量であって、諸般の水工計画に際し、これらをどのように評価し、あるいはいかにして計画の基準を定めるかは、きわめて重要かつむずかしい問題である。これに対し、主としてこれら水文諸量の系列を、ある法則にしたがう確率過程よりの実現値とみなし、その間に内在する統計的法則を追求しようとする接近方法がある。このような応用統計学の一分野を水文統計学と呼んでいる。

すなわち水文統計学とは、水工計画に有用な情報を提供できるような手法を攻究する学問であるが、現在のところ必らずしもその研究が十分な段階に到達しているとはいいがたい。これは i) 対象が自然現象であって測定がやりなおし、あるいはデータの補充が簡単にできない、ii) データの精度が観測組織、方法、器械などによって支配され、過去の観測組織の欠除などもあって、十分長期の資料が得られていない、iii) 水文諸量の分布が正規型でないことが多い。iv) 災害などに関連して発展してきたものであって、本来あまり起らないはずの値の推定が問題になる、そしてこれまでの研究は 1 変数のひん度特性の解析手法の研究に重点がおかれた、などいくつかの特異性によるものと思われる。

水文統計学に課せられた命題は水文諸事象に内在する統計的法則を追求し、実用上十分な精度で水工学上の諸問題を解決することであるが、とくに今後の研究課題をあげると、i) 水文諸量自身ないしは相互間の相関の問題、ii) とくにこれらの経年的傾向の問題とこれらの水工計画への導入方法、iii) OR 的手法の組み合わせによる最適計画の考え方の確立、iv) 水文諸量の時間的、面積的特性の吟味などであろう。

さてここで論述しようとした水文統計論の内容は、i) 1 変数の理論、ii) 2 変数ないし多変数の理論、iii) 時系列論の 3 編の予定であったが、第 3 編だけでも第 1、2 編の合計以上の内容となるので、時間の都合もあってここでは割愛することにした。したがっていかにも中途半端な感じはまぬがれないようである。これについては適当な機会を得て補述したいと考えている。

第1篇 1変数の統計解析

第1章 Return Period

1.1. Return Period の概念

一般に水文学量 x の確率密度関数を $f(x)$ とするとき、 x がある特定の値 x_u をこえる確率、 $Q(x)$ 、あるいは x_l 以下となるような確率 $P(x)$

$$\left. \begin{aligned} Q(x) &= \int_{x_u}^{\infty} f(x) dx \equiv 1 - F(x_u) \\ P(x) &= \int_{-\infty}^{x_l} f(x) dx \equiv F(x_l) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

をそれぞれ x_u の超過確率、 x_l の非超過確率と呼ぶ。また x が x_u 以上または x_l 以下となるようなことが平均的にみて T 年に1度の割合で期待されるとき、この T 年を x_u または x_l の return period と呼んでいる。すなわち return period T は次式で定義される。

$$T = \frac{1}{nQ(x)} \quad \text{または} \quad T = \frac{1}{nP(x)} \quad (1.2)$$

ここに n は水文学量 x の年平均生起回数である。水文学量 x として年最大値、年最小値などを考えた場合は当然 $n=1$ であるが、この場合の return period は T 年に1年という定義をとるはずである。式(1.2)を満足する x_u, x_l を T 年確率水文学量と呼んでいる。

以上の定義によれば、水文学量 x のしたがう $f(x)$ が既知であれば、 x と T との対応関係は容易に知ることができるが、実際に $f(x)$ としてどのようなものがとられるべきであるか、ということについてはいまのところ定説はない。これまでに知られていること

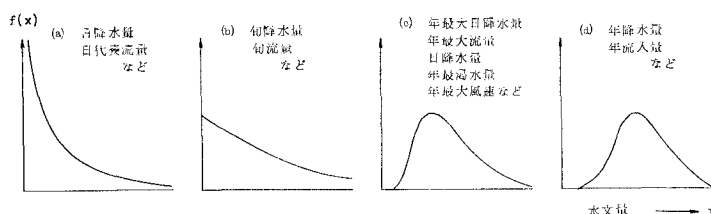


図-1.1. 水文諸量の非対称分布

は、一般に水工計画の対象となる水文諸量のひん度曲線は図-1.1のような非対称分布を示すことが多いという事実だけである。したがって水文統計では、このような水文諸量の非対称分布をうまく表現するような $f(x)$ をいかに見出し、超過または非超過の確率の小さい値をいかに推定するかが1つの眼目となっている。

分布のあてはめに関するこれまでの数多くの研究は、なんらかの方法で正規化を行ない、正規分布の特性を利用する方法と、直接非対称分布関数をあてはめる方法に大別される。前者の方法には対数正規、 n 乗根正規、経験的分布関数の直接正規化などの方法、後者に属するものとしては指数型分布、ガンマ分布、極値分布などのあてはめが試みられ、また両者をうまく組み合わせた小河原の方法などもある。本稿ではこれらの研究のすべてを述べることはできないが、代表的と思われるものを、なるべく理論的に関連づけて述べるつもりである。

1.2. 確率紙利用による簡略推定

return period ないし確率水文学量を簡単に推定するには確率紙を利用すると便利である。確率紙には各種のものが考えられているが、要は縦軸に非超過ないし超過確率の目盛が一定の法則によって目盛られ、横軸に変量の目盛が算術、対数、平方根、立方根などの目盛にとられ、これにデータを plot した場合、各点になるべく直線状に配列して直線または曲線平分線を容易に挿入できるようなものであれば、どのようなものであってもよい。図-1.2に代表的なものを示してあるが、図-1.1で(c)状を示すものには対数正規、立方根正規、平方根正規、極値確率紙、(d)状を示すものには普通(正規)確率紙が利用され、また(a)状のものには半対数、両対数方眼紙などの利用が考えられる。なお図-1.3に確率紙による分布形状の判定法の1例を示しておく¹⁾。

確率紙上におけるデータの plot の位置すなわち plotting position²⁾ としては経験的分布関数 P_N が用い

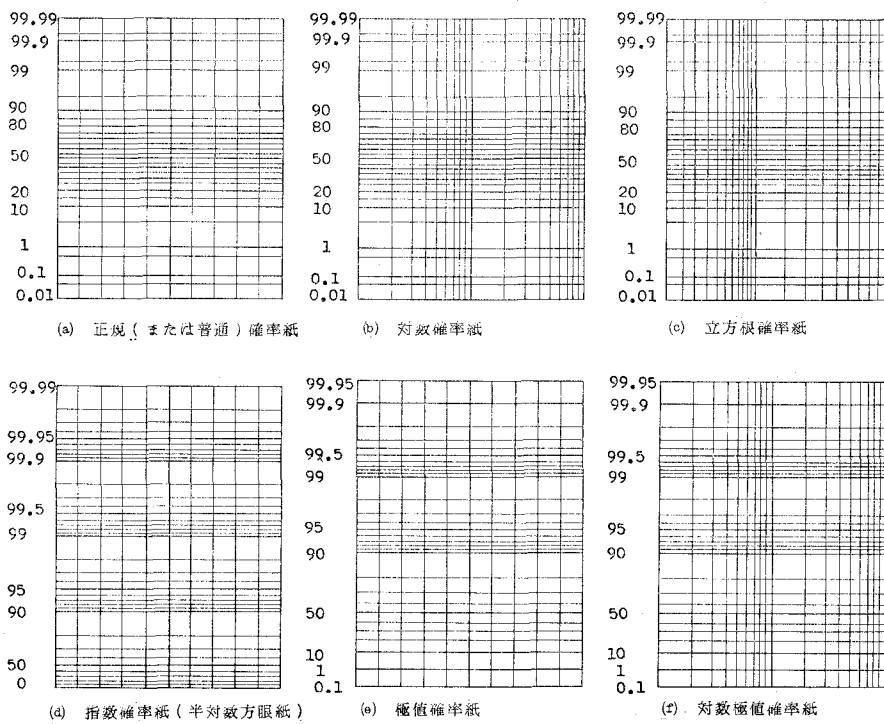


図-1.2. 確率紙の例

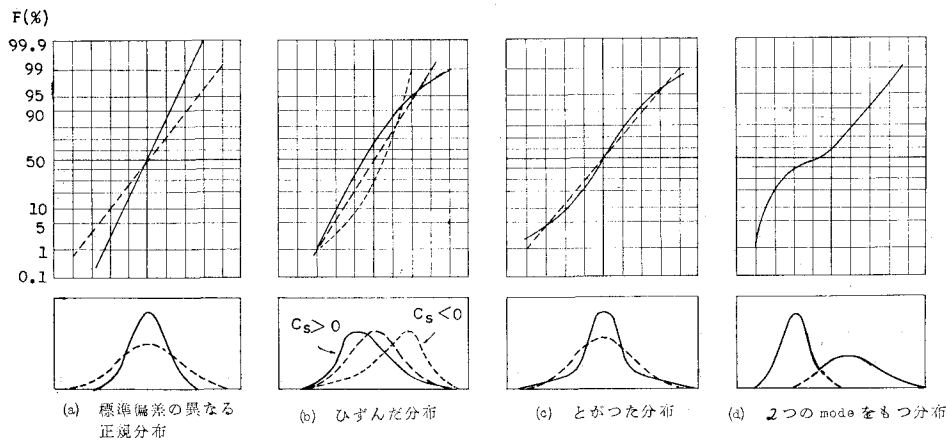


図-1.3. 確率紙による分布形の判定例

られる。

$$\left. \begin{aligned} P_N &= 0 && x < x_1 \\ &= i/N && x_i \leq x < x_{i+1}, \quad i=1,2,\dots,N-1 \\ &= 1 && x_N \leq x \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

ここに x_i は N 箇のデータを大きさの順序に並べたときの小さい方より i 番目の値である。

上式よりわかるように、この方法では x_N の値が plot できない。そこで通常次式が採用されることが多い。

$$\text{Thomas plot}^{3-5)} \quad P_N = i/(N+1) \quad (1.4)$$

$$\text{Hazen plot}^{6)} \quad P_N = (2i-1)/2N \quad (1.5)$$

この2式のどちらが採用されるべきかについては定説がないが、式(1.4)は経験的分布関数の期待値に、また式(1.5)は中央値に相当する。したがって経験的分布関数の推定という観点よりは前者が用いられるべきであるが、理論的分布関数の推定には後者がよい近似を与えるようである。またこうした問題について Gringorten⁷⁾ などの最近の論義もあるが、なお本質的なものとはいえない。

1.3. 非母数法 (Non-parametric Method)³⁾

return period ないし確率水文量についての parametric な手法を述べる前に、non-parametric の問題を少し考えておこう。

一般に観測によって得られた n 個のデータを、ある母集団より得られた1組の標本と考え、これを大きさの順序に $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ と並べた場合、これらを標本の大きさ (sample size) n の順序統計量 (order statistics), i 番目の値を i 番目順序統計量 (i -th order statistics) と呼ぶ。ところでこの i 番目順序統計量の (真の) 非超過確率を F_i と書くと、 x_i 以上の値が N 回の sampling 中に t 回起こる確率は次式で与えられる。

$$P = \frac{N!}{t!(N-t)!} F_i^{N-t} (1-F_i)^t \quad (1.6)$$

あるいは少なくとも t 回起こるような確率は次式で与えられる。

$$P = \sum_{j=t}^N \frac{N!}{j!(N-j)!} F_i^{N-j} (1-F_i)^j \quad (1.7)$$

$$= 1 - \sum_{j=0}^{t-1} \frac{N!}{j!(N-j)!} F_i^{N-j} (1-F_i)^j \quad (1.7')$$

一方 i 番目順序統計量 x_i そのものは sampling ごとにいろいろな値をとるであろうから、その確率素分 (probability element) を求めると

$$\left. \begin{aligned} dP_i &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} F_i^{i-1} (1-F_i)^{n-i} dF_i, \\ F_i &= \int_{-\infty}^{x_i} f(x) dx, \quad dF_i = f(x_i) dx_i \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

したがって i 番目順序統計量がある特定の値 x_* (その非超過確率を F_* とする) をこえないであろう確率は

$$P_* = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \int_0^{F_*} F_i^{i-1} (1-F_i)^{n-i} dF_i \quad (1.9)$$

とくに最大値に対しては $i=n$ において

$$\begin{aligned} dP &= n F_n^{n-1} dF_n \\ P_* &= n \int_0^{F_*} F_n^{n-1} dF_n = F_*^n \end{aligned} \quad (1.10)$$

式(1.8)は i 番目順序統計量 x_i したがってまたその非超過確率 F_i の分布を示す式であるから、その期待値 $E(F_i)$ を考えることができる。

$$\begin{aligned} E(F_i) &= \int_0^1 F_i dP_i = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \int_0^1 F_i^i (1-F_i)^{n-i} dF_i \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} B(i+1, n-i+1) \\ &= \frac{i}{n+1} \end{aligned} \quad (1.11)$$

これが式(1.4)で示した Thomas plot の意味である。

さきに i 番目順序統計量の非超過確率を簡単に F_i と書いたが、実はこれは経験的分布関数としては i/n , あるいは期待値としては $i/(n+1)$ で与えられるということ以外、一般には未知である。したがってこの範囲を推定

することも確率の問題である。たとえば年最大値のデータが 25 年得られた場合その最大値の return period が 20~100 年 ($P=0.95\sim0.99$) であるような確率を求めると

$$\beta = P_{0.99} - P_{0.95} = (0.99)^{25} - (0.95)^{25} = 0.504$$

ここに β は信頼係数と呼ばれるものである。

つぎに年最大値の系列について、過去 n 年中にある値以上の値が r 回生じているというその値 (x_{n-r+1}) が、将来 N 年間に t 回起こる確率を考えてみよう。この値の真の確率 F は不変であるから、これが将来 N 年間に t 回起こるような確率は式(1.6)で与えられるはずである。しかもこれは過去 n 年中に r 回生じたという実績をもつから、そのような値は式(1.8) (において $i=n-r+1$ とした形) で示される確率素分をもっている。したがって求める確率 $W(n, r, N, t)$ は

$$\begin{aligned} W(n, r, N, t) &= \frac{N!}{t!(N-t)!} \cdot \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^1 F^{N-t}(1-F)^t F^{n-r}(1-F)^r dF \\ &= \frac{N!}{t!(N-t)!} \cdot \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \cdot \frac{(n+N-r-t)!(r+t-1)!}{(n+N)!} \end{aligned} \quad (1.12)$$

第2章 指数型分布

2.1. 概 説

日雨量や日流量など比較的短時(期)間の水文量の総ひん度曲線は図-1.1(a)のような性状を示すことが多いが、これらは指数型分布やガンマ分布で表現できることが多いようである。指数型分布は本来気体分子の自由路程、電気火花、脆性材料の割目数、放射性物質の原子崩壊時間の分布など、物理現象における諸問題の解明にかなり利用されてきているが⁸⁾、水文諸量の解析にもかなり有用である。その根拠としては一応つぎのような説明が考えられる⁹⁾。

いま単位時間水文量 x が $x, x+dx$ の間の値をとる確率は、この事象を a priori には偶発的とすれば dx に比例すると考えなければならないから、これを adx としよう。一方水文量 x がある値 x 以上の値をとる確率を $q(x)$ とすると、 x がちょうど指定された $x, x+dx$ の間の値を示す確率は $q(x)adx$ であって、これは $-dq(x)$ に等しいはずであるから次式が成立する。

$$\begin{aligned} q(x)adx &= -dq(x) \\ q(x) &= e^{-ax+c} \end{aligned} \quad (2.1)$$

ただし c は積分常数である。

また上式では x が $x, x+dx$ に含まれる確率は dx に比例すると考えたが、 x が大きくなるほどこの区間に含まれる確率は小さくなると考えた方が自然的かも知れない。そこで常数 a のかわりに、あらためて k, b なる常数を用いて $a=k/(x+b)$ とおくと、 k または b が十分大きい場合には式(2.1)に漸近するような次式が得られる。

$$\begin{aligned} q(x)k/(x+b) &= -dq(x) \\ q(x) &= c(x+b)^{-k} \end{aligned} \quad (2.2)$$

ここに c は積分常数である。

これら式(2.1), (2.2)はそれぞれ式(2.3), (2.6)に対応するものである。なおガンマ分布は式(2.1)で表わされる x の数個の和の分布として得られるが^{10), 11)}、本章ではこれらについての論義は省略する。

2.2. 指数型分布の特性

2.2.1. 指数分布

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= 1 - e^{-a(x-v)} \\ f(x) &= ae^{-a(x-v)} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

ここに a は常数 (実は分散の程度を示す parameter), v は分布の不連続点(下限値)を示す parameter である。この分布には mode は存在せず、median $\tilde{x}$ は

$$\tilde{x} = \frac{1}{a} \lg 2 + v = 0.69315(1/a) + v \quad (2.4)^*$$

この分布の積率特性を知るには、 t を補助変数とする積率母関数 (moment generating function) $Q(t)$ を考えればよい。

$$Q(t) = \int_v^{\infty} e^{tx} f(x) dx = e^{tv} \left(1 - \frac{t}{a}\right)^{-1}, \quad |t| < 1$$

$$\lg Q(t) = tv - \lg \left(1 - \frac{t}{a}\right) = \left(-\frac{1}{a} + v\right)t + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{a}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{t}{a}\right)^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{t}{a}\right)^4 + \dots$$

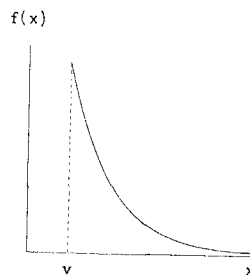


図-2.1. 指数型分布

一般に積率母関数 $Q(t)$ が

$$\lg Q(t) = \lambda_1 t + \lambda_2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \lambda_i \frac{t^i}{i!} + \dots$$

の形に展開できるときは、原点のまわりの i 次の積率 ν_i 、あるいは平均値のまわりの i 次の積率 μ_i と λ_i の間には次のような関係が成立する。

$$\lambda_1 = \nu_1, \quad \lambda_2 = \mu_2, \quad \lambda_3 = \mu_3, \quad \lambda_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2, \dots$$

これを利用すると平均値 m_x 、分散 σ_x^2 、ひずみ係数 C_s 、過剰係数 C_e は

$$\left. \begin{aligned} m_x &= 1/a + v \\ \sigma_x^2 &= \mu_2 = 1/a^2 \\ C_s &= \mu_3/\mu_2^{3/2} = \frac{2}{a^3} / \frac{1}{a^3} = 2 \\ C_e &= \mu_4/\mu_2^2 - 3 = \frac{9}{a^4} / \frac{1}{a^4} - 3 = 6 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

実際のデータにこの分布が適用できるかどうかを判定するには、図-2.2(a)のように半対数方眼紙にデータを plot してその直線性を調べればよい。

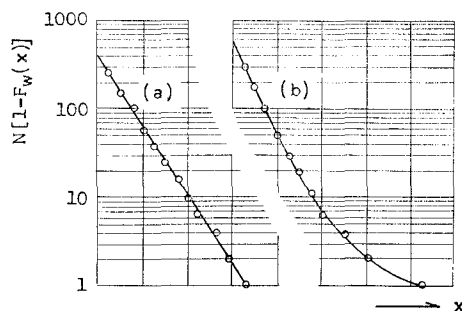


図-2.2. 指数型分布の適応性の判定法

2.2.2. 双曲線型指数分布

次式で示される分布を双曲線型指数分布と呼ぶことにする。

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= 1 - \left(\frac{x+b}{v+b}\right)^{-k} \equiv 1 - \exp(-a \log \frac{x+b}{v+b}) \\ f(x) &= \frac{k}{x+b} \left(\frac{x+b}{v+b}\right)^{-k} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

ここに $k = a \log e = 0.4343a$ は常数、 v は分布の不連続点(下限値)を示す parameter、 b は分布の適応性をよくするための付加常数である。この分布に mode の存在しないことは指数分布と同様であり、median $\tilde{x}$ は

$$\tilde{x} = 2^{1/k}(v+b) - b \quad (2.7)$$

$(x+b)$ の原点のまわりの i 次の moment ν_i は $i < k$ の範囲で

$$\nu_i = \int_v^{\infty} (x+b)^i f(x) dx = \frac{k}{k-i} (v+b)^i$$

したがって平均値 m_x 、分散 σ_x^2 、ひずみ係数 C_s は

$$\left. \begin{aligned} m_x &= \frac{k}{k-1} (v+b) - b \\ \sigma_x^2 &= \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = \frac{k}{(k-2)(k-1)^2} (v+b)^2 \\ C_s &= \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3}{(\nu_2 - \nu_1^2)^{3/2}} = \frac{2(k+1)}{k-3} \sqrt{\frac{k-2}{k}} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

*以下 $\lg$, $\log$ をそれぞれ自然対数, 常用対数の記号とする。

簡単な吟味によって $C_s \geq 2$, すなわち前述指数分布よりさらにひずんだ分布であることがわかる。また C_s が k のみの関数であることより, k はこの分布のひずみの程度を示す parameter であることもわかる。

実際のデータにこの分布が適用できるかどうかは, 図-2.2 (b) のように, 半対数方眼紙にデータを plot した場合, その傾向線が大きな値の方に尾を引く曲線状であるかどうかをみればよい。

2.3. 指数型分布の解法^{10,12)}

2.3.1. 指数分布の解法

式(2.3)に含まれる常数 a, v と母平均 m_x , 母分散 σ_x^2 の間には式(2.5)の関係が成立するから, これを用いると

$$\left. \begin{aligned} 1/a &= \sigma_x \\ v &= m_x - \sigma_x \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

一般にこの指数型分布をあてはめるような場合はデータ数がかなり多いのが通例であるので, m_x, σ_x をそれぞれ標本平均 $\bar{x}$, 標本標準偏差 s_x でおきかえて実用上十分である。すなわち a, v は次式で推定すればよい。

$$\left. \begin{aligned} 1/a &= s_x \\ v &= \bar{x} - s_x \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

この $\bar{x}, s_x$ は, 通常データを適当に級別して, 各階級中央値を以てその級の代表値とみなし, 適当な代表値に番号 0, それより小さい方へ-, 大きい方へ+の番号 y_i を付すとき次式の成立することを利用すると簡単に計算できる。

$$\left. \begin{aligned} x_i &= h y_i + x_a \\ \bar{x} &= h \bar{y} + x_a \\ s_x &= h s_y = h \sqrt{\bar{y}^2 - \bar{y}^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

ただし $\bar{y} = \frac{1}{\sum f_i} \sum f_i y_i$

$$\bar{y}^2 = \frac{1}{\sum f_i} \sum f_i y_i^2$$

式中 h は級の大きさ, x_a は $y_i = 0$ に対応する級代表値, f_i は各級の生起度数である。なお級別してその中央値を級代表値とする方法をとらず, h 単位に 4 捨 5 入して纏めてもよい。

たとえば日雨量などのひん度曲線にこの分布をあてはめる場合のように, 非常に数多くのデータがあってそのデータ整理に多大の労力を必要とし, また現実には比較的大きい値だけを問題にすればよいときには, たとえば 30 mm/day あるいは 50 mm/day など特定値 w_* 以上のデータだけを整理することも考えられる。そしてこの場合に式(2.3) すなわち

$$F_w(x) = 1 - e^{-a(x-w)} \quad (2.12)$$

をあてはめるものとする, 常数は式(2.10) 同様

$$\left. \begin{aligned} 1/a &= s_x \\ w &= \bar{x} - s_x \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

によって推定できる。むろんこのときの $\bar{x}$ は式(2.10)のその値とは違うはずであり, またこれによって推定された w は必ずしも w_* とは一致しない。

いま統計年数を N 年, w_* 以上の値の年間生起回数を r とすると式(2.12)は拾い上げられたデータ数 Nr に対する分布関数である。これを全データ数 Nn に対する分布関数に換算するには次のようにすればよい。

$$\left. \begin{aligned} 1 - F(x) &= e^{-a(x-w)} \\ &= \frac{r}{n} \left[1 - F_w(x) \right] \\ \therefore v &= w + \frac{1}{a} \lg \frac{r}{n} = w + \frac{1}{k} \lg \frac{r}{n} \\ 1/k &= 1/a \log e = 2.3026(1/a) \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

2.3.2. 双曲線型指数分布の解法

式(2.6)に含まれる3常数 k または a と v, b を推定するには式(2.8)の関係を利用すればよいはずであるが、この場合ひずみ係数まで考えねばならず、ひずみ係数の推定に若干の問題もあるので、実用的にはある特定値 w_* 以上の値をとり扱うことにして、

$$F_w(x) = 1 - \left(\frac{x+b}{w+b} \right)^{-k} \quad (2.15)$$

を推定することにしよう。そして3常数のうち w を w_* で近似することになると、実用上の常数推定式はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} w &= w_* \\ k &= \frac{2s_x^2}{s_x^2 - (\bar{x} - w)^2} \\ b &= k(\bar{x} - w) - \bar{x} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

むろん式(2.15)は拾い上げられたデータ数 Nr に対応する分布関数であって、これより前同様式(2.6)の推定には次の関係を利用すればよい。

$$\left. \begin{aligned} 1 - F(x) &= \left(\frac{x+b}{v+b} \right)^{-k} \\ &= \frac{r}{n} [1 - F_w(x)] \\ \therefore \log(v+b) &= \log(w+b) + \frac{1}{k} \log \frac{r}{n} \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

2.4. 確率水文量の推定⁹⁾

式(2.3), (2.6)または(2.12), (2.15)を用いて1年間に平均的に t 回起こるような値を推定するには、それぞれの式で

$$\left. \begin{aligned} 1 - F(x) &= t/n \\ 1 - F_w(x) &= t/r \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

を満足する値を求めればよい。すなわちこのような値は次式で求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} \text{指数分布} \quad x &= v + \frac{1}{a} \lg \frac{n}{t} = v + \frac{1}{k} \log \frac{n}{t} \\ &= w + \frac{1}{a} \lg \frac{r}{t} = w + \frac{1}{k} \log \frac{r}{t} \\ 1/k &= 1/a \log e = 2.3026(1/a) \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{双曲線型指数分布} \quad \log(x+b) &= \log(v+b) + \frac{1}{k} \log \frac{n}{t} \\ &= \log(w+b) + \frac{1}{k} \log \frac{r}{t} \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

これらの式で $t=1$ を満足する x の値を x_0 とすると

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= v + (1/a) \lg n = w + (1/a) \lg r = w + (1/k) \log r \\ \log(x_0+b) &= \log(v+b) + (1/k) \log n = \log(w+b) + (1/k) \log r \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

式(2.19), (2.20)は次のように書ける。

$$\text{指数分布} \quad x = x_0 - (1/a) \lg t = x_0 - (1/k) \log t \quad (2.22)$$

$$\text{双曲線型指数分布} \quad \log(x+b) = \log(x_0+b) - (1/k) \log t \quad (2.23)$$

上述諸式は $t \leq 1$ の場合でも成立することはいうまでもない。すなわち $t=1/T$ とすれば return period T に対する確率水文量は次式で求めることができる。

$$\text{指数分布} \quad x = x_0 + (1/a) \lg T = x_0 + (1/k) \log T \quad (2.24)$$

$$\text{双曲線型指数分布} \quad \log(x+b) = \log(x_0+b) + (1/k) \log T \quad (2.25)$$

第3章 極値(最大値)分布

3.1. 概 説

sample size n の i 番目順序統計量の分布が式(1.8)で表わされることを既述したが、とくに $i=n, 1$ すなわち最大値 x_n , 最小値 x_1 の分布は、母集団分布 $f(x)dx$ あるいは $F(x)$ がある条件を満足するとき、 $n \rightarrow \infty$ にしたがって特定の極限形式に漸近することが知られている。通常極値分布 (extreme value distribution) とはこの極限形式 (limiting form) を意味する。こうした問題については、関数方程式を巧妙に解いて極値極限分布に3つの形式の存在することを示した Fisher-Tippett¹³⁾ の研究をはじめ数多くの研究があるが¹⁴⁾、これが実際面への応用は Weibull, Gumbel などに負うところが大きい。

とくに Gumbel¹⁵⁻¹⁷⁾ は最大値分布の第1形式が年最大洪水量の分布関数として有用であることをたびたび指摘しており、Powell¹⁸⁾ による確率紙の考案もあって、今日この形式は Gumbel 分布として広く実用化されている。その後角屋^{19, 20)} は最大値分布の第2, 第3形式をそれぞれ対数極値分布A型, B型と名付けてその実用法を示している。さらに Gumbel²¹⁾ は渇水量の分布関数として最小値分布の第3形式の有用性を示している。本章ではまず最大値分布の実用法について述べる。

なお水工計画上要求される return period ないし確率水文量の論義に際し、年最大、最小値のみをデータとして扱うことが多いが、このような扱いかたでは、たとえばその年の最大値でないために他の年の最大値より大きいにかかわらず拾い上げられないデータがかなり多く、不都合ではないかとの論義もある。こうした問題に対する解答準備の意味その他、諸般の便宜上、特定の母集団より得られた標本最大値の極限分布を導びく直接法をここで示しておこう⁹⁾。

一般にある $f(x)$ または $F(x)$ をもつ母集団より得られた n 箇の標本の最大値 x (添字は省略) の分布は次式で示される。{式(1.10)参照}

$$\left. \begin{aligned} dP(x) &= n[F(x)]^{n-1}f(x)dx \\ P(x) &= [F(x)]^n \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

いま n の値が十分大きく、かつ標本最大値を問題にしているから $F(x)$ は1に近いとすると

$$\lg F(x) = [F(x)-1] + O[F(x)-1]$$

とすることができるから、式(3.1)は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(x) = \exp\{-n[1-F(x)]\} \quad (3.2)$$

水文量の母集団分布関数 $F(x)$ が指数分布式(2.3)で表わされるものとする、最大値の分布関数は

$$\left. \begin{aligned} P(x) &= \exp\{-ne^{-a(x-x_0)}\} \equiv \exp(-e^{-y}) \\ y &= a(x-x_0) \\ x_0 &= v + (1/a)\lg n \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

また $F(x)$ が双曲線型指数分布式(2.6)で表わされるものとする、最大値の分布関数として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} P(x) &= \exp\left\{-n\left(\frac{x+b}{v+b}\right)^{-k}\right\} \equiv \exp(-e^{-y}) \\ y &= a \log \frac{x+b}{x_0+b} \equiv k \lg \frac{x+b}{x_0+b} \\ \log(x_0+b) &= \log(v+b) + (1/k) \log n \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

これら式中の記号は式(2.3), (2.6)のそれと同じであり、とくに常数とおいた x_0 の意味は式(2.21)と同じである。

3.2. 極値(最大値)分布の実用形式と特性

3.2.1. 最大値分布の実用形式

一般に最大値の極限形式は次のように表わされる。

$$\left. \begin{array}{lll} \text{case 1} & P(z) = \exp(-e^{-z}), & -\infty < z < \infty \\ \text{case 2} & P(z) = \exp(-z^{-k}), & k > 0, \quad 0 < z < \infty \\ \text{case 3} & P(z) = \exp[-(-z)^k], & k > 0, \quad -\infty < z < 0 \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

$$z = A(x-B)$$

式中 z は変量 x の線形変換変量 (linear reduced variate), A, B, k は常数である。いま case 2, 3 において

$$y = k[\lg(x-B) + \lg A],$$

$$y = -k[\lg(B-x) + \lg A]$$

とくと、結局 case 1 と同形の次式に帰結する

$$P(x) = \exp(-e^{-y})$$

そこで実用的にはこの 3 形式をつぎのようにまとめることにする。

$$\left. \begin{array}{lll} F(x) = \exp(-e^{-y}) \\ \text{Gumbel 分布} & y = a(x-x_0), & -\infty < x < \infty \\ \text{対数極値分布 A 型} & y = k \lg \frac{x+b}{x_0+b} = a \log \frac{x+b}{x_0+b}, & k, a > 0, \quad -b < x < \infty \\ \text{対数極値分布 B 型} & y = k \lg \frac{u-x_0}{u-x} = a \log \frac{u-x_0}{u-x}, & k, a > 0, \quad -\infty < x < u \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

ここに y は一般に規準極値変量と呼ばれ、 $a, k = a \log e \doteq 0.4343 a$, x_0, b, u は常数である。

3.2.2. 規準形の特性

$$\left. \begin{array}{l} F(y) = \exp(-e^{-y}) \\ f(y) = \exp(-y-e^{-y}) \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

この分布の median $\hat{y}$, mode $\hat{y}$ は

$$\left. \begin{array}{l} \hat{y} = -\lg(\lg 2) \doteq 0.3665 \\ \hat{y} = 0 \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

この分布の特性を知るには、 t を補助変数とする積率母関数を考え

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} \exp(-y-e^{-y}) dy, \quad |t| < 1$$

$e^{-y} = u$ とおくと

$$Q(t) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-t} du = \Gamma(1-t)$$

$$\lg Q(t) = \gamma t + s(2) \frac{t^2}{2} + s(3) \frac{t^3}{3} + \dots + s(i) \frac{t^i}{i}$$

ただし $\gamma = \text{Euler const.} = \lim_{r \rightarrow \infty} (1+2^{-1}+3^{-1}+\dots-\lg r) = 0.5772\dots$

$$s(i) = \lim_{r \rightarrow \infty} (1+2^{-i}+3^{-i}+\dots-\gamma^{-i}), \quad i \geq 2$$

したがって y の平均値 m_y , 分散 σ_y^2 , 変動係数 C_v , ひずみ係数 C_s , 過剰係数 C_e は

$$\left. \begin{array}{l} m_y = \gamma = 0.5772\dots \\ \sigma_y^2 = \mu_2 = s(2) = \pi^2/6 = 1.6449 \\ C_v = \frac{\sigma_y}{m} = \pi/\sqrt{6} \gamma = 2.2219 \\ C_s = \mu_3/\mu_2^{3/2} = 2s(3)/s^{3/2}(2) = 1.1395 \\ C_e = \mu_4/\mu_2^2 - 3 = \frac{6s(4)+3s^2(2)}{s(2)^2} - 3 = \frac{3\pi^4/20}{\pi^4/36} - 3 = 2.4 \end{array} \right\} \quad (3.9)$$

ここに μ_i は平均値のまわりの i 次の積率である。正規分布の場合は $C_s=0$, $C_e=0$ であるから、この分布はさらにひずんで、とがった分布形を示すことがわかる。正規分布との比較を図-3.1に示す。

3.2.3. Gumbel 分布の特性

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \exp(-e^{-y}) \\ f(x) &= a \exp(-y - e^{-y}) \\ y &= a(x - x_0), \\ -\infty < x < \infty \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

ただし a, x_0 : 常数

この分布は, x と y とは線形であるから, この分布の median $\tilde{x}$, mode $\hat{x}$, 平均値 m_x , 分散 σ_x^2 などの諸特性はあきらかに次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} &= -\lg(\lg 2)/a + x_0 \\ &\quad \div 0.3665(1/a) + x_0 \\ \hat{x} &= x_0 \\ m_x &= m_y/a + x_0 = \gamma/a + x_0 \\ &\quad \div 0.5772(1/a) + x_0 \\ \sigma_x^2 &= \sigma_y^2/a^2 = \pi^2/6a^2 \\ &\quad \div 1.6449(1/a)^2 \\ C_s &= 2s(3)/s(2)^{3/2} \div 1.1395 \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

また, 各特性値の間には一般に次の大小関係が成立する。

$$\hat{x} = x_0 < \tilde{x} < m_x \quad (3.12)$$

3.2.4. 対数極値分布A型の特性

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \exp(-e^{-y}) \\ f(x) &= \frac{k}{x+b} \exp(-y - e^{-y}) \\ y &= a \log \frac{x+b}{x_0+b} = k \lg \frac{x+b}{x_0+b}, \quad -b < x < \infty \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

ここに $k = a \log e = 0.4343a$ および x_0, b は常数である。

この分布の median $\tilde{x}$, mode $\hat{x}$ は

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} &= (x_0 + b)(\lg 2)^{-1/k} - b \\ \hat{x} &= (x_0 + b)(1 + 1/k)^{-1/k} - b \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

式(3.16)をも考慮すると, 各特性値の間に次の関係が成立する。

$$\hat{x} < x_0 < \tilde{x} < m_x \quad (3.15)$$

この分布の特性を知るため, $(x+b)$ の原点のまわりの i 次の積率 ν_i を考えると

$$\nu_i = \int_{-b}^{\infty} (x+b)^i f(x) dx = (x_0+b)^i \Gamma(1-i/k)$$

したがって平均値 m_x , 分散 σ_x^2 , ひずみ係数 C_s などは次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} m_x &= \nu_1 - b = (x_0 + b) \Gamma(1-1/k) - b \\ \sigma_x^2 &= \mu_2 - \nu_2 - \nu_1^2 = (x_0 + b)^2 [\Gamma(1-2/k) - \Gamma^2(1-1/k)] \\ C_s &= \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3}{(\nu_2 - \nu_1^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\Gamma(1-3/k) - 3\Gamma(1-2/k)\Gamma(1-1/k) + 2\Gamma^3(1-1/k)}{[\Gamma(1-2/k) - \Gamma^2(1-1/k)]^{3/2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

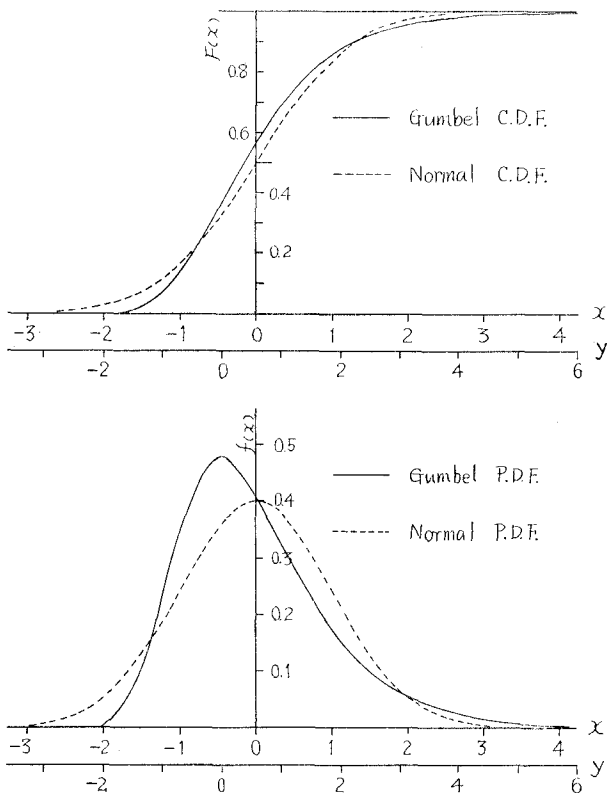


図-3.1. 極値分布と正規分布の比較 ($m_x = 0, \sigma_x = 1$)

C_s より高次の係数は $1/k$ のみの関数であって、結局 k がこの分布のひずみの程度を表わす parameter であることがわかる。ところでこの C_s について若干の吟味を行なうと $dC_s/d(1/k) > 0$ すなわち C_s は $1/k$ について単調増加関数であって、

$$\left. \begin{aligned} \lim_{1/k \rightarrow 0} C_s &= 2s(3)/s(2)^{3/2} = 1.1395 \\ C_s &\geq 1.1395 \end{aligned} \right\} (3.1)$$

Gumbel 分布は $C_s = 1.1395 \dots$ であったが、この分布は Gumbel 分布よりさらにひずんだ分布形を示すこと、そして $1/k \rightarrow 0$ にしたがい Gumbel 分布に近づくことがわかる。これらの関係を図-3.2, 3.3 に示す。

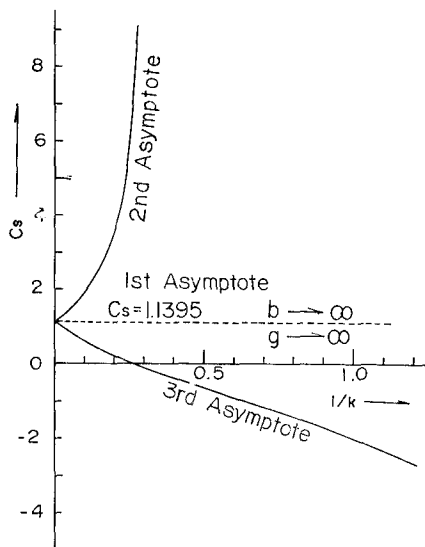


図-3.2. 最大値分布の $1/k \sim C_s$ の関係

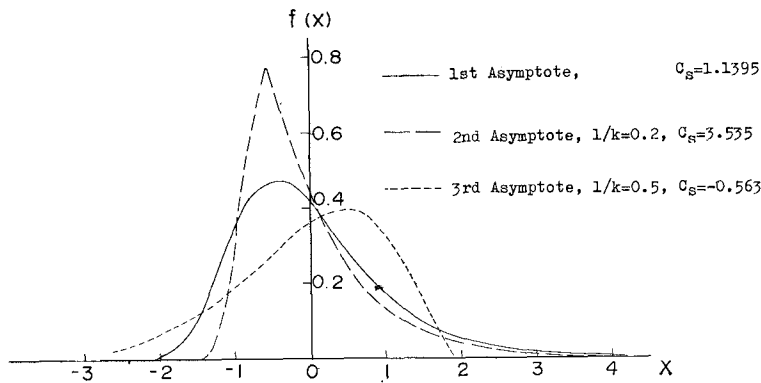


図-3.3. 最大値分布3形式の1例 ($m_x=0, \sigma_x=1$)

3.2.5. 対数極値分布 B 型の特性

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \exp(-e^{-y}) \\ f(x) &= \frac{k}{u-x} \exp(-y - e^{-y}) \\ y &= a \log \frac{u-x_0}{u-x} = k \lg \frac{u-x_0}{u-x}, \quad -\infty < x < u \end{aligned} \right\} (3.18)$$

ここに $k = a \log e = 0.4343a$ および x_0, u は常数である。

この分布の median $\tilde{x}$, mode $\hat{x}$ は

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} &= u - (u-x_0)(\lg 2)^{1/k} \\ \hat{x} &= u - (u-x_0)(1-1/k)^{1/k} \end{aligned} \right\} (3.19)$$

であって、式(3.21)をも考慮すると、特性値の間の大小関係は

$$\left. \begin{aligned} 0 < 1/k \leq 0.294; & \quad m_x \geq \tilde{x} > \hat{x} > x_0 \\ 0.294 < 1/k \leq 1 - \lg 2; & \quad \tilde{x} \geq m_x \geq \hat{x} > x_0 \\ 1 - \lg 2 < 1/k \leq 1; & \quad \tilde{x} > \hat{x} > m_x \geq x_0 \\ 1 < 1/k; & \quad \tilde{x} > x_0 > m_x, \hat{x} \text{ は存在せず} \end{aligned} \right\} (3.20)$$

また x の u のまわり i 次の積率 v_i は

$$v_i = \int_{-\infty}^u (x-u)^i f(x) dx = (-1)^i (u-x_0)^i \Gamma(1+i/k)$$

したがって平均 m_x , 分散 σ_x^2 , ひずみ係数 C_s などは

$$\left. \begin{aligned} m_x &= u - (u-x_0)\Gamma(1+1/k) \\ \sigma_x^2 &= (x_0+b)^2 [\Gamma(1+2/k) - \Gamma(1+1/k)^2] \\ C_s &= -\frac{\Gamma(1+3/k) - 3\Gamma(1+2/k)\Gamma(1+1/k) + 2\Gamma^3(1+1/k)}{[\Gamma(1+2/k) - \Gamma^2(1+1/k)]^{3/2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

すなわちこの分布も, k がひずみの程度を表わす parameter であって,

$$C_s < 1.1395 \quad (3.22)$$

であることが示される。(図-3.2, 3.3参照)。

3.2.6. 実用上の問題

以上最大値分布の諸特性を述べ, とくにこの分布がそのひずみ係数 C_s によって特徴づけられ, $C_s=1.1395$ の Gumbel 分布を基本形として, 対数極値分布 A 型が $C_s > 1.1395$, B 型が $C_s < 1.1395$ の分布であることを示した。しかしこれら諸特性はあくまでも最大値の極限分布として得られる母集団分布についての論議であって, これらの母集団より得られた(と考える)標本の標本分布について必ずしもそのままあてはまるものではない。

一般に標本論の立場よりすれば, たとえば, $C_s=1.1395$ の Gumbel 型母集団より得られた標本の分布についての標本ひずみ係数 C'_s は必ずしも $C'_s=C_s=1.1395$ になるとは限らない。一方実用上の立場よりすると, 一般に最大値の mark をそなえた水文量のひん度特性が問題になるのは, とくに防災的観点より, 超過確率のかなり小さいような値が問題になるときであって, たとえば Gumbel 型母集団よりの標本に対数極値分布 B 型が適用されるとなると, 超過確率の小さい所では, 真の値より小さな値を推定する, すなわち危険側の答を出すことになって不都合である。

そこで実用的には極値確率紙を用いて, これに plot された点群が図-3.4の曲線 A の性状を示すときは対数極値分布 A 型, 直線 G または曲線 B の傾向を示すものには Gumbel 分布を適用することにする。なお Gumbel 型母集団より得られた標本値は直線 G 状に配列するはずであるが, このようなものについて標本ひずみ係数 C'_s を調べると, 一般に $C'_s < 1.1395$ であって, sample size N が $N \rightarrow \infty$ につれて $C'_s \rightarrow C_s=1.1395$ となる。

なおここで最大値分布の上, 下限常数 u, b について付言すると, これはあくまでも式の上での上, 下限常数であって必ずしも物理的な意義をもつものではない。たとえば原母集団分布として指数型分布を想定して得られた最大値分布の誘導結果の式(3.3), (3.4) よりみてもわかるように, 実用上の下限値 v はその誘導過程で消失し, 対数極値分布 A 型では単なる付加的常数であった b が下限常数となっていることに気付かれる。

3.3. 極値(最大値)分布の解法

3.3.1. Gumbel 分布の解法

$$F(x) = \exp(-e^{-y})$$

$$y = a(x-x_0)$$

この式に含まれる常数 a, x_0 は式(3.11)より

$$\left. \begin{aligned} a &= \sigma_y / \sigma_x \\ x_0 &= m_x - m_y / a \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

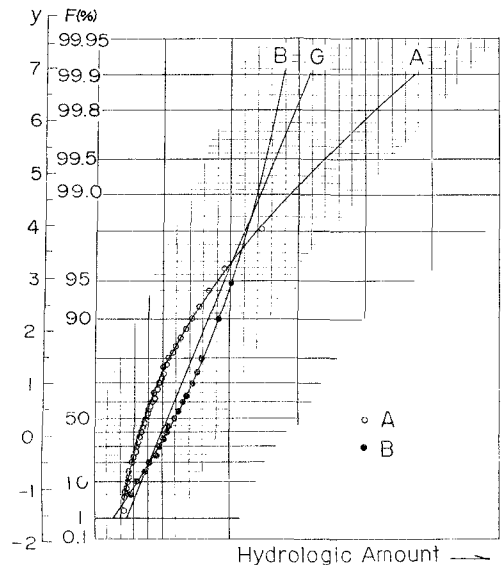


図-3.4. 適用形式の判定

と表わされる。sample size N が十分大きければ、 m_x, σ_x をそれぞれ標本平均 $\bar{x}$ 、標本標準偏差 s_x でおきかえ、式(3.11) で示したように $m_y = \gamma$ 、 $\sigma_y = \pi/\sqrt{6}$ を用いて

$$\left. \begin{aligned} 1/a &= \sigma_x/(\sqrt{6}/\pi) = 0.7797 \sigma_x \\ x_0 &= m_x - \gamma/a = m_x - 0.4500 \sigma_x \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

とすればよい。これは Gumbel が最初に示した方法である。しかし水文統計で扱うデータは有限かつたかだか 10^4 の order であって、 $m_y \leq \gamma$ 、 $\sigma_y \leq \pi/\sqrt{6}$ と考えざるを得ない。したがって統計量 $\bar{x}$ 、 s_x を用いる限り、sample size N に対応する $\bar{y}$ 、 s_y を考える必要がある。これを用いると未知常数 a 、 x_0 は次式より推定できるはずである。

表-3.1 Gumbel 分布あてはめのための数表 (Gumbel)

$$1/a = s_x/s_y, \quad x_0 = \bar{x} + (1/a)\bar{y}$$

N	$\bar{y}$	s_y	N	$\bar{y}$	s_y	N	$\bar{y}$	s_y
15	0.5128	1.0206	40	0.5436	1.1413	70	0.5548	1.1854
6	57	316	1	42	436	2	52	873
7	81	411	2	48	458	4	57	890
8	0.5202	493	3	53	480	6	61	906
9	20	565	4	58	499	8	65	923
20	0.5236	1.0628	5	63	519	80	0.5569	1.1938
1	52	696	6	68	538	2	72	953
2	68	754	7	73	557	4	76	967
3	83	811	8	77	574	6	80	980
4	96	864	9	81	590	8	83	994
5	0.5309	915	50	0.5485	1.1607	90	0.5586	1.2007
6	20	961	1	89	623	2	89	020
7	32	1.1004	2	93	638	4	92	032
8	43	047	3	97	653	6	95	044
9	53	086	4	0.5501	667	8	98	055
30	0.5362	1.1124	5	04	681	100	0.5600	065
1	71	159	6	08	696			
2	80	193	7	11	708			
3	88	226	8	15	721			
4	96	255	9	18	734			
5	0.5403	285	60	0.5521	1.1747			
6	10	313	2	27	770			
7	18	339	4	33	793			
8	24	363	6	38	814			
9	30	388	8	43	834			

表-3.2 Gumbel 分布あてはめのための数表 (角屋)

$$1/a = s_x/s_y, \quad x_0 = \bar{x} - (1/a)\bar{y}$$

N	$\bar{y}$	s_y	N	$\bar{y}$	s_y	N	$\bar{y}$	s_y
20	0.5692	1.1825	40	0.5717	1.2244	60	0.5729	1.2402
2	96	895	2	18	266	2	30	413
4	99	956	4	20	287	4	31	423
6	0.5702	1.2009	6	21	306	6	32	433
8	05	055	8	23	323	8	33	442
30	0.5707	1.2095	50	0.5724	1.2338	70	0.5734	1.2451
2	09	130	2	25	352	75	36	472
4	11	162	4	26	366	80	37	490
6	13	192	6	27	379	85	39	506
8	15	219	8	28	391	90	40	520
						95	41	532
						100	42	542

$$\left. \begin{aligned} 1/a &= s_x/s_y \\ x_0 &= \bar{x} - (1/a)\bar{y} \end{aligned} \right\} (3.25)$$

Gumbelは若干の経緯の後^{15-17,22)}, Thomas plot を用いて

$$F(y_i) \equiv \exp(-e^{-y_i}) = i/(N+1)$$

とすると y_i が N と i のみの関数で表わされることを利用して $\bar{y}$, s_y を求め, 表-3.1を提示した²¹⁾。

また角屋²⁾は, 常数の推定誤差を最小にするには

$$\sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \min.$$

$$y = a(x - x_0)$$

なる $\hat{y}_i$ すなわち $E(y_i)$ を考えるべきであるとして $F\{w(y_i)\}$ を近似的に求め, これより $\bar{y}$, s_y の値として 表-3.2を提示した²⁰⁾。なお彼はこの $E(y_i)$ を plotting value と名付けている。

Lieblein^{23,24)} は Gumbel 分布の解には充足統計量の存在しないことを示すとともに, 最小分散不偏順序統計量による興味ある解法を提示し, Kimball^{25,26)}, Thom²⁷⁾ は最尤解を試みている。また Chow²⁸⁾ は Gumbel の当初の解を用いてこの分布の場合の frequency factor を求めた。Jenkinson²⁹⁾ は最大値分布3形式の解を総括的に求め, Gumbel 分布の場合には Gumbel の初期の提案と一致する解法を示しているが, これについては後述する。

なお水文量の繰ひん度分布に指数型分布をあてはめ, 間接的に最大値分布の常数を推定することもできる⁹⁾。

すなわち式(3.3)より了察されるように, 特定値 w_* 以上の値の分布に指数分布

$$F_w(x) = 1 - e^{-a(x-w)} \quad (3.26)$$

をあてはめ, これより Gumbel 分布の常数を推定するには, a はそのまま変らず, x_0 は次式より推定する。

$$x_0 = w + (1/a) \lg r \quad (3.27)$$

ここに r は w 以上の値の年間平均生起数である。逆にこの関係を用いれば Gumbel 分布より原分布たる指数分布を推定することもできる。

3.3.2. 対数極値分布 A 型の解法²⁰⁾

$$F(x) = \exp(-e^{-y})$$

$$y = a \log \frac{x+b}{x_0+b} = k \lg \frac{x+b}{x_0+b}$$

この式に含まれる3常数 $k = a \log e = 0.4343$ および x_0 , b は式(3.16)の関係を用いると次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} C_s &= \frac{\Gamma(1-3/k) - 3\Gamma(1-2/k)\Gamma(1-1/k) + 2\Gamma^3(1-1/k)}{[\Gamma(1-2/k) - \Gamma^2(1-1/k)]^{3/2}} \\ b &= \frac{\Gamma(1-1/k)}{[\Gamma(1-2/k) - \Gamma^2(1-1/k)]^{1/2}} \sigma_x - m_x \equiv A_2 \sigma_x - m_x \\ x_0 &= m_x - \frac{\Gamma(1-1/k) - 1}{[\Gamma(1-2/k) - \Gamma^2(1-1/k)]^{1/2}} \sigma_x \equiv m_x - B_2 \sigma_x \\ x_0 + b &= \frac{1}{[\Gamma(1-2/k) - \Gamma^2(1-1/k)]^{1/2}} \sigma_x \equiv C_2 \sigma_x \end{aligned} \right\} (3.28)$$

表-3.3 は C_s, A_2, B_2, C_2 がすべて $1/k$ のみの関数であることに着目して, $1/k$ を parameter として示したものである。したがって母ひずみ係数 C_s に関するよい推定法があれば, 同表を利用して式(3.28) より各常数が推定できるはずであるが, 標本ひずみ係数 C_s' を以て C_s の推定値とするには, sample size N が十分大きくない限りあまり適合性がよくないようである。

すなわちこの場合においても $m_x, \sigma_x^2, C_s(z)$ を N の関数としてそれぞれの対応値を考えなければならないが, こうした非対称分布では Hazen⁶⁾ も指摘しているようにまず $C_s(z)$ の良好な推定値が得られれば他は大きな問題ではなさそうである。そこで角屋は Gumbel 分布の場合と同様, 変数 x の線形変換変数 $z = (x+b)/(x_0+b)$ の期待値すなわち plotting value $E(z_i)$ を考え, それぞれの標本ひずみ係数が

$$C_s'(x) = C_s'(z)$$

表 - 3.3 対数極値分布 A 型あてはめのための数表 (角屋)

$$b = A_2\sigma_x - m_x, \quad x_0 = m_x - B_2\sigma_x, \quad x_0 + b = C_2\sigma_x$$

$1/k$	C_s	A_2	B_2	C_2	$1/k$	C_s	A_2	B_2	C_2
0.010	1.201	77.39	0.452	76.94	0.182	3.105	3.585	0.453	3.132
15	232	51.40	453	50.95	4	148	536	3	084
20	264	38.40	453	37.95	6	193	489	2	037
25	297	30.60	454	30.15	8	238	443	2	2.991
					190	284	397	1	946
0.030	1.331	25.40	0.455	24.95	0.192	3.332	3.353	0.451	2.902
35	365	21.69	456	21.23	4	381	309	0	859
40	401	18.90	456	18.44	6	431	266	0	816
45	437	16.73	457	16.27	8	482	224	449	775
50	474	14.99	457	14.54	200	535	183	9	734
0.055	1.512	13.57	0.458	13.11	0.201	3.562	3.163	0.449	2.714
60	551	12.39	458	11.93	2	589	143	8	694
65	592	11.38	459	10.93	3	617	123	8	675
70	633	10.52	459	10.07	4	645	103	8	655
75	676	9.779	459	9.319	5	674	084	8	636
0.080	1.720	9.125	0.459	8.666	0.206	3.703	3.064	0.448	2.617
85	765	8.549	460	8.089	7	732	045	7	598
90	812	8.036	460	7.576	8	762	026	7	579
95	860	7.576	460	7.116	9	792	007	7	560
100	910	7.162	460	6.702	10	823	2.988	6	542
0.102	1.931	7.008	0.460	6.548	0.211	3.854	2.970	0.446	2.524
4	952	6.859	460	6.399	2	885	951	6	505
6	973	6.716	460	6.256	3	918	933	6	488
8	994	6.579	460	6.119	4	950	915	5	470
10	2.016	6.446	460	5.986	5	983	897	5	452
0.112	2.038	6.318	0.460	5.858	0.216	4.017	2.880	0.445	2.435
4	060	6.194	460	5.735	7	051	862	4	418
6	083	6.075	460	5.615	8	086	845	4	400
8	106	5.960	460	5.500	9	121	827	4	383
20	129	5.848	460	5.388	20	157	810	4	366
0.122	2.153	5.740	0.460	5.280	0.221	4.193	2.793	0.443	2.350
4	177	635	460	176	2	230	776	3	333
6	202	534	459	075	3	268	760	3	317
8	226	436	459	4.977	4	307	743	2	301
130	252	341	459	881	5	346	727	2	284
0.132	2.277	5.248	0.459	4.789	0.226	4.385	2.710	0.442	2.268
4	304	158	459	700	7	426	694	1	253
6	330	071	459	613	8	467	678	1	237
8	357	4.987	459	528	9	509	662	1	221
140	385	904	458	446	30	551	646	0	206
0.142	2.413	4.824	0.458	4.366	0.231	4.595	2.631	0.440	2.190
4	441	747	458	289	2	639	615	0	175
6	470	671	458	213	3	684	600	0.439	160
8	500	597	458	139	4	730	584	9	145
150	530	525	458	068	5	776	569	9	130
0.152	2.561	4.455	0.457	3.998	0.236	4.824	2.554	0.438	2.116
4	592	387	457	930	7	873	539	8	101
6	614	321	457	864	8	922	524	8	087
8	657	256	457	799	9	973	510	7	072
160	690	192	456	736	40	5.024	495	7	058
0.162	2.724	4.130	0.456	3.674	0.241	5.077	2.481	0.437	2.044
4	758	070	456	614	2	131	466	6	030
6	794	011	456	556	3	186	452	6	016
8	830	3.954	455	498	4	242	438	5	002
170	866	897	455	442	5	299	424	5	1.989
0.172	2.904	8.842	0.455	3.388	0.246	5.358	2.410	0.435	1.975
4	943	789	454	334	7	418	396	4	961
6	982	736	454	282	8	479	382	4	948
8	3.022	684	454	231	9	541	368	4	935
180	063	634	453	181	50	605	355	3	922

(次頁へ続く)

$1/k$	C_s	A_2	B_2	C_2	$1/k$	C_s	A_2	B_2	C_2
0.251	5.671	2.341	0.433	1.908	0.281	8.749	1.976	0.419	1.557
2	738	328	2	895	2	912	965	8	547
3	806	315	2	883	3	9.081	954	8	537
4	876	301	1	870	4	257	944	7	526
5	948	288	1	857	5	440	933	7	516
0.256	6.022	2.275	0.431	1.845	0.286	9.631	1.922	0.416	1.506
7	098	262	0	832	7	830	911	6	496
8	176	250	0	820	8	10.037	901	5	486
9	255	237	0.429	807	9	254	890	5	475
60	337	224	9	795	90	481	880	4	466
0.261	6.421	2.212	0.428	1.783	0.291	10.717	1.869	0.413	1.456
2	507	199	8	771	2	965	859	3	446
3	595	187	7	759	3	11.226	848	2	436
4	686	174	7	747	4	499	838	2	426
5	780	162	7	735	5	786	828	1	417
0.266	6.876	2.150	0.426	1.724	0.296	12.089	1.818	0.411	1.407
7	975	138	6	712	7	409	808	0	398
8	7.077	126	5	700	8	747	798	0.409	388
9	183	114	5	689	9	13.104	788	9	379
70	291	102	4	678	0.300	484	778	8	369
0.271	7.403	2.090	0.424	1.666	0.310		1.681	0.402	1.279
2	518	079	3	655	0.320		1.589	0.395	1.194
3	637	067	3	644	0.330		1.501	0.388	1.114
4	760	055	2	633					
5	887	044	2	622					
0.276	8.018	2.032	0.421	1.611					
7	154	021	1	600					
8	295	010	0	589					
9	441	1.999	0	579					
80	592	987	0.419	568					

となることを利用して、 $1/k$ を既知としたときの $C'_s(z)$ を 図-3.5 のように求めた。同図を用いれば標本ひずみ係数 $C'_s(x)$ より直接 $1/k$ の値が推定できるが、さらに

$$C_s = C'_s(1 + \beta_s)$$

とおいたときの β_s の値を 図-3.6 のように与えている。これらを用いると、この分布の各常数の実用的推定法はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} 1/k &\leftarrow C_s = C'_s(1 + \beta_s) \\ 1/a &\doteq 0.4343 (1/k) \\ b &= A_2\sigma_x - m_x \\ x_0 &= m_x - B_2\sigma_x \end{aligned} \right\} (3.29)$$

$$\left. \begin{aligned} C_s &= \frac{1}{N} \sum (x - \bar{x})^3 \\ &= \frac{\bar{x}^3 - 3\bar{x}^2\bar{x} + 2\bar{x}^3}{S_x^3} \\ \sigma_x &= \sqrt{N/(N-1)} s_x \\ m_x &= \bar{x} \\ s_x &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum (x - \bar{x})^2} \\ &= \sqrt{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} \\ \bar{x} &= \frac{1}{N} \sum x^j \end{aligned} \right\} (3.30)$$

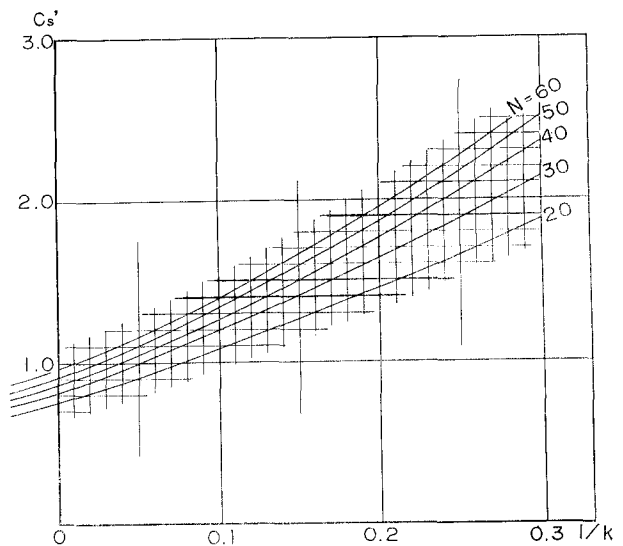


図-3.5. $C'_s(x) = C'_s(z) \sim 1/k$ の関係

なおこの場合にも前項同様、式 (3.4) よ

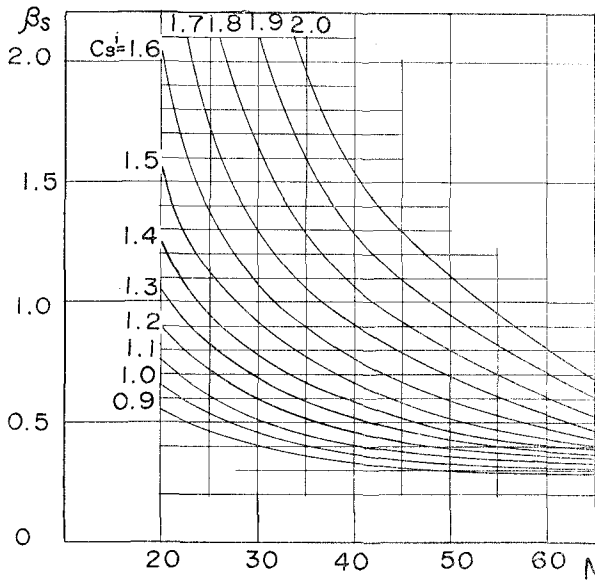


図-3.6. 標本ひずみ係数 C_s の補正係数 β_s の値 $C_s = C'_s(1 + \beta_s)$

ここに c, h, x_0 は常数で常に $ch > 0$, また x_0, y は前項までの形式のそれと同等である。これまでの3形式とは h の正負に応じて次のような対応関係がある。

$$\left. \begin{aligned} h > 0; \text{ Gumbel 分布, } & ch = 1/a \\ h < 0; \text{ 対数極値分布 A 型, } & h = -1/k \\ & c = -(x_0 + b) \\ h > 0; \text{ 対数極値分布 B 型, } & h = 1/k \\ & c = u - x_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

Jenkinson は h の推定に C_s を介するかわりに、年最大値および2年最大値の標準偏差 σ_1, σ_2 を用いて次式より推定する方法を採用した。

$$\sigma_1/\sigma_2 = 2^h \quad (3.35)$$

この関係式の妥当性は、たとえば式(3.16)の σ_x^2 の右辺の $(x_0 + b)$ を式(3.4)のそれでおきかえ、 $n = n, 2n$ として比較すれば容易に了解できるはずである。また他の常数については

$$c = \frac{\sigma_1}{[(2h)! - (h!)^2]^{1/2}} \quad (3.36)$$

$$\frac{x - m_1}{\sigma_1} = \frac{h! - [\lg T / (T - 1)]^h}{\pm [(2h)! - (h!)^2]^{1/2}} \quad (3.37)$$

これは式(3.16)あるいは(3.21)と同等である。実際には式(3.35)によって h がわかれば、式(3.36)はとくに考える必要がなく、式(3.37)によって x の表示式が得られる。

年最大値標本より2年最大値の標準偏差 σ_2 を求めるには、次式によればよい。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 = s_2 &= \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (2i-1)(x_i - m_2)^2} \\ m_2 = \bar{x}_2 &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N (2i-1)x_i \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

ここに x_i は小さい方より i 番目の値である。

なお $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$ は標本値について得られるそれらで代用するわけであるが、とくに σ_2 の計算はかなり

り了察されるように、特定値 ω_* 以上の水文量の総ひん度分布に双曲線型指数分布

$$F_\omega(x) = 1 - \left(\frac{x+b}{\omega+b} \right)^{-k} \quad (3.31)$$

をあてはめ、これより間接的に対数極値分布 A 型 (の常数) を推定することができる。すなわちこの場合 k, b の値は不変で、 x_0 は次式より推定できる。

$$\log(x_0 + b) = \log(\omega + b) + (1/k) \log r \quad (3.32)$$

ここに r は ω 以上の値の年間平均生起回数である。これを逆に利用すれば、最大値分布より原分布の推定もできる。

3.3.3. Jenkinson の方法

Jenkinson²⁹⁾ は最大値分布にしたがう変数 x は、その分布の形式のいかんによらずつぎの形に表わせることを示した。

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \exp(-e^{-y}) \\ x &= x_0 + c(1 - e^{-hy}) \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

表-3.4 $\frac{x-m_1}{\sigma_1}$ の値 (Jenkinson)

σ_1/σ_2	$T=1.58$ $y=0$	5 1.50	10 2.25	25 3.20	50 3.90	100 4.61	250 5.52
0.85	-0.44	0.48	1.05	1.95	2.76	3.72	5.52
0.90	-0.45	0.58	1.18	2.06	2.78	3.60	4.79
0.95	-0.46	0.66	1.26	2.07	2.71	3.38	4.31
1.00	-0.45	0.72	1.31	2.04	2.59	3.14	3.85
1.05	-0.44	0.75	1.34	2.00	2.47	2.91	3.45
1.10	-0.42	0.77	1.34	1.93	2.32	2.67	3.09
1.15	-0.39	0.79	1.34	1.85	2.19	2.47	2.78
1.20	-0.36	0.81	1.33	1.79	2.08	2.30	2.52
Normal	-0.34	0.84	1.27	1.75	2.06	2.33	2.65

表-3.5 おもな T に対する y の値

T	$1-F(x)$	y	T	$1-F(x)$	y
2000	0.00050	7.60065	40	0.02500	3.67625
1000	100	6.90725	30	3333	3.38429
500	200	6.21361	25	4000	3.19853
400	250	5.99021	20	5000	2.97020
300	0.00333	5.70212	10	0.10000	2.25037
250	400	5.51946	8	12500	2.01342
200	500	5.29581	7	14286	1.86982
150	667	5.00730	6	16667	1.70199
100	0.01000	4.60015	5	0.20000	1.49994
80	1250	4.37574	4	25000	1.24590
60	1667	4.08596	3	33333	0.90273
50	2000	3.90194	2	50000	0.36651
				63212	0

面倒となるので、実際はデータを適当に級別ないしは4捨5入法によって纏めたものを用いてよい。式(3.37)の値を表-3.4に示すが、これは後述の式(3.39)の表現に相当するので、後述異常値の論義などをするためには、式(3.35)によって h を求め、 $h < 0$ ならば $h = -1/k$ として式(3.29)を、 $h \geq 0$ ならばGumbel分布として式(3.25)を利用する方がよい。

3.4. 確率水文量の推定³⁰⁾

3.4.1. 基本推定値

最大値分布に含まれる常数が推定されて後、return period T あるいは確率水文量を推定するためには次式によればよい。

T 年確率水文量

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gumbel 分布} \quad x = x_0 + (1/a)y \\ \text{対数極値分布A型} \quad \log(x+b) = \log(x_0+b) + (1/a)y \end{array} \right\} \quad (3.39)$$

ここに y は通常次式

$$y = -\lg[-\lg F(x)] = -\lg[\lg T/(T-1)] \quad (3.40)$$

で表わされるものを用いるが、この場合の return period T は、 T 年に1年という定義であって、 T 年に1度

ではない。\$T\$ 年に1度という定義にしたがうならば、上式のかわりに式(2.24), (2.25)の表現によらなければならない。この場合上式との混同を防ぐ意味で後者を \$t=1/T\$ 回確率水文量と名付けると、

\$t\$ 回確率水文量

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gumbel 分布} \quad x = x_0 - (1/a) \lg t = x_0 - (1/k) \log t \\ \text{対数極値分布 A 型} \quad \log(x+b) = \log(x_0+b) - (1/k) \log t \end{array} \right\} \quad (3.41)$$

もつとも式(3.40)は \$T \gg\$ ならば、

$$y = \lg T - \frac{1}{2} \frac{1}{T} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{T} \right)^2 - \dots$$

となるので、大体 \$T > 10\$ ならば両者はほとんど同じ結果を与える。

計算の便宜上、おもな \$T\$ に対する規準極値変数 \$y\$ の値を表-3.5に示す。また巻末付表に \$y \rightarrow F(y) = \exp.(-e^{-y})\$ の表をかかげておく。

3.4.2. 異常確率水文量

確率水文量に関する前述の論義は sample size \$N\$ が十分大きい場合はともかく、\$N\$ が小さい場合には若干の問題がある。一般に標本論の立場よりすると、ある特定の母集団より得られた有限個 \$N\$ の標本に、\$1-F(x_e)\$ または \$F(x_e)\$ の小さい、すなわち本来稀にしか起らないはずのとくに大きな値 \$x_e\$ あるいは小さな値 \$x_e\$ が含まれることがしばしばあり、かつそのような確率 \$\epsilon\$ は、一般に \$N\$ が小さいほど大きい。

$$\epsilon = P_N(x \geq x_e) \geq 1 - F(x_e)$$

$$\epsilon = P_N(x \leq x_e) \geq F(x_e)$$

いまこのような値 \$x_e\$ を異常値、その生起確率 \$\epsilon\$ を異常率と名付けると、確率水文量の値としては前項で定義されるようなものより、むしろ異常値こそ論義されなければならない。

そこで \$x_e\$ と \$\epsilon\$ の関係を表わす理論式が必要であるが、ここでは近似的に正規標本に関する Thompson の意味での棄却限界論³¹⁾を準用する実用的方法を述べる。これは基本的には後述第6章の小河原の思想と同じものである。

いまある正規母集団より得られた \$N\$ 箇の標本についての標本平均、分散をそれぞれ \$\bar{\eta}\$, \$s_\eta^2\$ とし、これらの標本と無関係な1つの標本を \$\eta_e\$ とすると、これがさきの \$N\$ 箇の標本と同一母集団に属するとみなされる場合には

$$F = \frac{N-1}{N+1} \frac{(\eta_e - \bar{\eta})^2}{s_\eta^2}$$

なる統計量は自由度 1, \$N-1\$ の \$F\$-分布にしたがうはずである。そこで \$F\$ の値として片側異常率 \$\epsilon\$ を指定した \$F\$-分布の値を採用すると、\$\eta_e\$ の棄却限界が得られる。

$$\left. \begin{array}{l} \eta_{eu} \\ \eta_{el} \end{array} \right\} = \bar{\eta} \pm s_\eta \sqrt{\frac{N+1}{N-1} F_{N-1}^{-1}(2\epsilon)} \quad (3.42)$$

そして一般に

$$\left. \begin{array}{l} \Phi(\eta_{eu}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s_\eta} \int_{\eta_{eu}}^{\infty} \exp \left[-\frac{(\eta - \bar{\eta})^2}{2s_\eta^2} \right] d\eta \leq \epsilon \\ \Phi(\eta_{el}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s_\eta} \int_{-\infty}^{\eta_{el}} \exp \left[-\frac{(\eta - \bar{\eta})^2}{2s_\eta^2} \right] d\eta \leq \epsilon \end{array} \right\} \quad (3.43)$$

であるが \$\Phi(\eta_e)\$ と \$\epsilon\$ の間には \$N\$ の値に応じて常に 1:1 の関係が成立する。この関係を極値分布に準用し、

$$\left. \begin{array}{l} F(y_{eu}) = \exp(-e^{-y_{eu}}) = 1 - \Phi(\eta_{eu}) \\ F(y_{el}) = \exp(-e^{-y_{el}}) = \Phi(\eta_{el}) \end{array} \right\} \quad (3.44)$$

なる変換によって異常率 \$\epsilon\$ に対応する規準極値変数 \$\eta_e\$ を示したものが表-3.6, 3.7である。

\$T=1/\epsilon\$ 年異常確率水文量は式(3.39)の \$y\$ の値として表-3.6, 3.7の \$y_e\$ を用いた次式によって推定できる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gumbel 分布} \quad x_e = x_0 + (1/a)y_e \\ \text{対数極値分布 A 型} \quad \log(x_e+b) = \log(x_0+b) + (1/a)y_e \end{array} \right\} \quad (3.45)$$

表-3.6 上尾側異常率 ε に対する規準極値変量 y_{ε} (角屋)

N-1	upper singular level ε							
	25%	12.5%	5%	2.5%	1.25%	0.5%	0.25%	0.05%
20	1.314	2.179	3.328	4.237	5.200	6.557	7.666	10.5
22	308	163	294	182	113	425	483	10.2
24	303	150	265	137	047	319	342	9.94
26	298	140	241	098	4.991	230	224	72
28	294	130	220	067	943	155	124	56
30	291	122	203	039	903	091	039	40
32	1.289	2.116	3.188	4.015	4.867	6.038	6.969	9.27
34	286	110	175	3.994	836	5.991	904	16
36	284	104	163	976	808	950	849	08
38	282	099	153	959	785	913	799	01
40	280	095	143	944	763	880	755	8.94
42	1.278	2.091	3.135	3.931	4.742	5.850	6.715	8.86
44	277	087	127	919	726	824	680	80
46	275	084	120	908	711	801	650	74
48	274	081	113	898	695	778	620	68
50	273	079	108	889	682	756	593	63
52	1.272	2.076	3.103	3.879	4.670	5.740	6.568	8.58
54	271	073	098	873	658	721	544	54
56	270	071	093	865	647	706	523	50
58	269	069	088	859	638	690	503	46
60	268	066	084	852	628	676	486	43
65	1.267	2.063	3.076	3.839	4.610	5.645	6.443	8.36
70	265	060	068	827	592	620	410	30
75	264	057	061	817	577	598	382	25
80	263	054	056	807	565	579	359	20

表-3.7 下尾側異常率 ε に対する規準極値変量 y_{ε} (角屋)

N-1	lower singular levels ε .							
	25%	12.5%	5%	2.5%	1.25%	0.5%	0.25%	0.05%
20	-0.3688	-0.8042	-1.208	-1.446	-1.649	-1.881	-2.036	-2.350
22	647	-0.7971	197	433	632	860	012	320
24	615	921	189	422	619	844	-1.993	298
26	589	875	182	413	608	830	977	277
28	567	835	176	405	599	817	964	257
30	547	801	171	398	590	807	952	240
32	-0.3529	-0.7772	-1.166	-1.392	-1.583	-1.798	-1.941	-2.227
34	513	746	162	387	577	791	932	214
36	499	722	158	382	571	784	924	204
38	487	701	155	378	566	778	917	195
40	476	682	152	375	562	772	910	187
42	-0.3466	-0.7665	-1.149	-1.371	-1.557	-1.767	-1.905	-2.178
44	457	649	147	369	554	762	899	171
46	449	633	145	366	551	758	895	165
48	441	621	143	363	548	754	890	159
50	434	610	141	361	545	751	886	153
52	-0.3428	-0.7598	-1.139	-1.358	-1.542	-1.747	-1.882	-2.148
54	422	587	138	357	540	744	879	144
56	416	577	136	355	537	741	876	139
58	410	568	135	353	535	739	873	136
60	406	560	134	351	533	736	870	132
65	-0.3396	-0.7542	-1.131	-1.348	-1.529	-1.731	-1.863	-2.124
70	387	527	129	345	525	727	858	117
75	379	514	127	342	522	723	854	111
80	371	502	125	340	519	719	850	105

3.5. 信頼限界

3.5.1. 変動域

極値確率紙の上にデータを plot し、推定線を挿入した場合、plot された各点は必ずしもこの推定線上にはなく、かなりのばらつきをするが、これは実は i 番目順序統計量の分布法則にしたがって最確推定値のまわりに分布しているものと考え、推定線の両側にある幅をもった信頼区間を定義しようとする試みが当初 Gumbel^{17,32)} によって提案された。以下ではたとえば対数極値分布 A 型の場合は $X = \log(x+b)$ なる変換によって基準化されたものとして、すべて

$$\left. \begin{aligned} F(X) &= \exp(-e^{-y}) \\ y &= a(X-X_0) \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

の形式で考える。

上述の考え方にしたがうと、 i 番目順序統計量 X_i は $F(X_i)$ が 0.5 に近いある範囲では、最確値 $\hat{X}_i$ を平均値

$$V_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sqrt{F(\hat{X}_i)[1-F(\hat{X}_i)]}}{f(\hat{X}_i)} \quad (3.47)$$

を標準偏差とするような正規分布に漸近するはずである。そこでこの V_i なる幅を以て変動域 (control interval) を規定するならば

$$Pr(\hat{X}_i - V_i \leq X_i \leq \hat{X}_i + V_i) = 0.68269$$

このような近似は $0.1 < F(X) < 0.9$ なる範囲に限り、最大値については最大値分布にしたがうと考えなければならぬ。 X_i の変動域に含まれる確率と等確率となるような最大値分布の幅 l を考えると

$$\begin{aligned} P(l) - P(-l) &= 0.68269 \\ l &= 1.1407 \end{aligned}$$

ただし $P(l) = \exp(-e^{-l})$

$$l = Nf(\hat{X}_N)(X_N - \hat{X}_N)$$

したがって変動域の幅 V_N は

$$V_N = \frac{1.1407}{Nf(\hat{X}_N)} \quad (3.48)$$

極値分布の場合について V_i, V_N を具体的に求めると

$$\left. \begin{aligned} V_i &= \frac{1}{a\sqrt{N}} C_y \\ V_N &= \frac{1.1407}{a} \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

表 - 3.8 極値分布の変動域係数 C_y

y	C_y
-0.5	1.2686
0	1.3109
0.5	1.5057
1.0	1.8127
1.5	2.2406
2.0	2.8104

ここに C_y は標準極値変量 y のみの関数であって表 - 3.8 のような値をとる。実際には表 - 3.8 の y の位置および最大値の plotting position の所で推定線のまわりに V_i, V_N をとり、途中は直線で結べばよく、また観測最大値より大きな値の部分については常に V_N の幅で外挿すればよい。なおこの概念は通常の信頼限界の概念とは若干異なること、かつ大標本論的手法であることを付記しておく。

3.5.2. 信頼限界 (省略)

3.6. データの棄却検定³⁰⁾

データの中にとくに大き (小さ) な値が含まれるとき、これを計算に入れるかどうかによってその結果がかなり異なることが多い。この場合 Thompson 流の考え方そのものでは、 $\varepsilon = 0.01$ などの値を問題にする水文統計の本質上不都合である。これに対し次のような 2 項分布的な考え方が有用である。1.3. でも示したように、いま要検定値 x_0 の異常率を ε とするとき、 $x \geq x_0$ あるいは $x \leq x_0$ なる x が N 箇の標本中に少なくとも r 箇含まれるような確率は次式で示される。

$$P_r[NPr(x \geq x_\epsilon) \geq r \text{ or } NPr(x \leq x_\epsilon) \geq r] \\ = 1 - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{N!}{j!(N-j)!} (1-\epsilon)^{N-j} \epsilon^j \quad (3.50)$$

この確率がある危険率 β より小さければ、 $x \geq x_\epsilon$ あるいは $x \leq x_\epsilon$ を棄却することの危険率はたかだか $100\beta\%$ であるといえる。

実際問題としては、データ中に異常と思われる値が片側に 2 箇以上含まれるときは、その事象自体何か別の法則ないし原因が内在するものと考えなければならないから、棄却検定を行なうべき値は実用上最大(小)第 1 位の値のみと考えるべきである。すなわち上式で $r=1$ とおき、かつ ϵ について書きかえると、適当に指定された危険率 β_0 に対する棄却限界 ϵ_0 の値が得られる。

$$\epsilon_0 = 1 - (1 - \beta_0)^{1/N} \quad (3.51)$$

要検定値の異常率 ϵ がこの ϵ_0 より小さくない限り、 x_ϵ を棄却することができない。表-3.9 に β_0 として 10%, 5%, 1% を与えたときの棄却限界 ϵ_0 の値を示してある。

実際の計算では、まず要検定値を除いた残りの $N-1$ 箇のデータより x_ϵ の ϵ を推定し、これを表-3.9 の ϵ_0 と比較して検定する。棄却できないときは、あらためて x_ϵ を含めて確率水文量の推定を行なうべきである。 β_0 としては通常 5% を採用すればよいであろう。また最大値分布のあてはめでは、下尾側すなわち小さな値の棄却の結果にあまり大きな影響を与えないようである。

表-3.9 棄却限界 ϵ_0 の値

$N \backslash \beta_0$	10%	5%	1%	$N \backslash \beta_0$	10%	5%	1%
	%	%	%		%	%	%
18	0.584	0.285	0.056	42	0.251	0.122	0.024
20	525	256	049	44	239	117	023
22	478	233	046	46	229	111	022
24	438	214	042	48	219	107	021
26	404	197	039	50	210	103	020
28	376	183	036	55	0.191	0.093	0.018
30	351	171	034	60	175	085	017
32	0.329	0.160	0.032	65	162	079	016
34	309	151	030	70	150	073	014
36	292	142	028	75	140	068	013
38	276	135	027	80	132	064	013
40	263	128	025				

第 4 章 極値（最小値）分布

4.1. 概 説

極値（最小値）分布とは、最大値分布の場合と同様、順序統計量の最小値の分布の極限形式として得られるものであって、3つの形式がある。

$$\left. \begin{aligned} G(x) &= \exp(-e^x) \\ \text{case 1} \quad \xi &= a(x-x_0), \quad -\infty < x < \infty \\ \text{case 2} \quad \xi &= a \log \frac{u-x_0}{u-x} = k \lg \frac{u-x_0}{u-x}, \quad -\infty < x < u, \quad a, k > \\ \text{case 3} \quad \xi &= a \log \frac{x+b}{x_0+b} = k \lg \frac{x+b}{x_0+b}, \quad -b < x < \infty, \quad a, k > 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

ここに $G(x)$ は x の超過確率を意味し、 $a, k = a \log e, x_0, u$ および b は常数である。

これらの式を見ればわかるように、規準形式は $\xi = -\gamma$ とおけば最大値分布と同じ形式になり、各 case とも最大値分布のそれらと類似の形をとっている。すなわちこれら最小値分布はそれぞれ最大値分布の対応形式を裏返しにした分布形を示し、したがってまた水文統計の分野では case 3 のほかはまず実用に供しがたいようである。case 3 の分布関数の水文統計への導入は Gumbel²¹⁾ によるもので、彼は年最小渇水量の分布関数としての有用性をいくつかの実例を用いて示している。

4.2. 極値（最小値）分布の特性

これらの分布形が最大値分布のそれらを裏返しにした分布形を示すことより、これらの特性について多くの説明を必要としないであろう。これらの分布の特性は、最大値分布と同様ひずみ係数 C_s によって特徴づけられるのであって、結論のみを述べると

$$\left. \begin{array}{l} \text{case 2)} \\ \text{case 1)} \\ \text{case 3)} \end{array} \right\} ; C_s \cong -1.1395 \quad (4.2)$$

水文量の非対称分布のほとんどのものは $C_s > 0$ と考えられるので、結局 case 3 の実用を考えれば十分なようである。以下でこの case を実に最小値分布と呼ぶことにし、この特性を簡単にまとめておこう。

$$\left. \begin{aligned} G(x) &= \exp(-e^\xi) \\ g(x) &= \frac{k}{x+b} \exp(\xi - e^\xi) \\ \xi &= a \log \frac{x+b}{x_0+b} = k \lg \frac{x+b}{x_0+b}, \quad -b < x < \infty \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

ただし $k = a \log e = 0.4343 a > 0$ および x_0, b は常数である。この分布の median $\tilde{x}$, mode $\hat{x}$ は

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} &= (x_0+b)(\lg 2)^{1/k} - b \\ \hat{x} &= (x_0+b)(1-1/k)^{1/k} - b \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

$(x+b)$ の原点のまわりの i 次の積率 ν_i , 平均値 m_x , 分散 σ_x^2 , ひずみ係数 C_s などは

$$\left. \begin{aligned} \nu_i &= \int_{-b}^{\infty} (x+b)^i g(x) dx = (x_0+b)^i \Gamma(1+i/k) \\ m_x &= (x_0+b) \Gamma(1+1/k) - b \\ \sigma_x^2 &= (x_0+b)^2 [\Gamma(1+2/k) - \Gamma^2(1+1/k)] \\ C_s &= \frac{\Gamma(1+3/k) - 3\Gamma(1+2/k)\Gamma(1+1/k) + 2\Gamma^3(1+1/k)}{[\Gamma(1+2/k) - \Gamma^2(1+1/k)]^{3/2}} \geq -1.1395 \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

また各特性値の大小関係はつぎのようである。

$$\left. \begin{aligned} 0 < 1/k \leq 0.29 : & \quad m_x \leq \tilde{x} < \hat{x} < x_0 \\ 0.294 < 1/k \leq 1 - \lg 2 : & \quad \tilde{x} \geq m_x \geq \hat{x} < x_0 \\ 1 - \lg 2 < 1/k \leq 1 : & \quad \hat{x} < \tilde{x} < m_x \leq x_0 \\ 1 < 1/k : & \quad \tilde{x} < x_0 < m_x, \quad \hat{x} \text{ は存在せず} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

4.3. 極値（最小値）分布の解法

式 (4.3) に含まれる 3 常数は式 (4.5) を考慮すると次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} 1/k; C_s &= \frac{\Gamma(1+3/k) - 3\Gamma(1+2/k)\Gamma(1+1/k) + 2\Gamma^3(1+1/k)}{[\Gamma(1+2/k) - \Gamma^2(1+1/k)]^{3/2}} \\ x_0 &= \frac{1 - \Gamma(1+1/k)}{[\Gamma(1+2/k) - \Gamma^2(1+1/k)]^{1/2}} \sigma_x + m_x \equiv B_1 \sigma_x + m_x \\ b &= \frac{\sigma_x}{[\Gamma(1+2/k) - \Gamma^2(1+1/k)]^{1/2}} - x_0 \equiv C_1 \sigma_x - x_0 \\ &\quad \equiv (C_1 - B_1) \sigma_x - m_x \\ x_0 + b &= C_1 \sigma_x \\ 1/a &= (1/k) \log e \equiv 0.4343(1/k) \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

ここに C_s, B_1, C_1 はすべて $1/k$ のみの関数であって表-4.1に示される。同表を利用すれば、 C_s, σ_x, m_x に関

表-4.1 最小値分布あてはめのための数表 (Gumbel)

$$x_0 = B_1 \sigma_x + m_x, \quad b = (C_1 - B_1) \sigma_x - m_x$$

1/k	C ₁	B ₁	C _s	1/k	C ₁	B ₁	C _s
.01	78.981714	.448164	-1.081272	.61	1.785897	.188090	.922408
.02	39.989044	.446110	-1.024853	.62	1.757128	.182875	.948772
.03	26.986212	.443926	-.970702	.63	1.729045	.177669	.975143
.04	20.480808	.441603	-.918459	.64	1.701620	.172473	1.001527
.05	16.574350	.439150	-.867967	.65	1.674824	.167287	1.027929
.06	13.967343	.436568	-.819101	.66	1.648631	.162113	1.054354
.07	12.102862	.433863	-.771740	.67	1.623017	.156951	1.080808
.08	10.702446	.431038	-.725772	.68	1.597958	.151804	1.107296
.09	9.611395	.428096	-.681102	.69	1.573432	.146672	1.133822
.10	8.736889	.425043	-.637637	.70	1.549420	.141557	1.160393
.11	8.019861	.421881	-.595296	.71	1.525901	.136459	1.187012
.12	7.420934	.418614	-.554002	.72	1.502857	.131379	1.213685
.13	6.912848	.415245	-.513687	.73	1.480272	.126318	1.240415
.14	6.476131	.411778	-.474287	.74	1.458130	.121278	1.267209
.15	6.096505	.408216	-.435743	.75	1.436413	.116260	1.294070
.16	5.763261	.404563	-.398002	.76	1.415109	.111263	1.321004
.17	5.468210	.400822	-.361012	.77	1.394204	.106290	1.348013
.18	5.204984	.396996	-.324729	.78	1.373683	.101340	1.375104
.19	4.968556	.393087	-.289108	.79	1.353536	.096416	1.402280
.20	4.754903	.389100	-.254110	.80	1.333750	.091517	1.429545
.21	4.560770	.385036	-.219697	.81	1.314314	.086644	1.456904
.22	4.383495	.380900	-.185835	.82	1.295217	.081799	1.484362
.23	4.220878	.376693	-.152490	.83	1.276450	.076982	1.511921
.24	4.071085	.372419	-.119634	.84	1.258002	.072194	1.539587
.25	3.932577	.368079	-.087237	.85	1.239865	.067435	1.567363
.26	3.804052	.363678	-.055272	.86	1.222031	.062706	1.595254
.27	3.684400	.359218	-.023715	.87	1.204489	.058008	1.623264
.28	3.572672	.354700	+.007458	.88	1.187234	.053341	1.651396
.29	3.468048	.350129	+.038270	.89	1.170256	.048707	1.679655
.30	3.369818	.345505	+.068742	.90	1.153550	.044105	1.708045
.31	3.277364	.340832	+.098893	.91	1.137107	.039537	1.736570
.32	3.190146	.336112	+.128743	.92	1.120922	.035002	1.765232
.33	3.107688	.331348	+.158308	.93	1.104988	.030501	1.794038
.34	3.029573	.326541	+.187606	.94	1.089299	.026035	1.822990
.35	2.955428	.321694	+.216653	.95	1.073849	.021605	1.852093
.36	2.884924	.316809	.245465	.96	1.058632	.017211	1.881350
.37	2.817768	.311889	.274055	.97	1.043644	.012852	1.910765
.38	2.753697	.306935	.302437	.98	1.028880	.008531	1.940343
.39	2.692475	.301949	.330625	.99	1.014333	.004247	1.970086
.40	2.633890	.296935	.358632	1.00	1.0	0.0	2.0
.41	2.577752	.291893	.386468	1.0	1.	0.	2.
.42	2.523887	.286825	.414147	1.1	.867491	-.040326	2.309348
.43	2.472138	.281734	.441678	1.2	.752233	-.076579	2.640035
.44	2.422364	.276622	.469072	1.3	.651524	-.108817	2.996146
.45	2.375535	.271490	.496340	1.4	.563330	-.136421	3.382013
.46	2.328232	.266340	.523491	1.5	.486053	-.160077	3.802311
.47	2.283647	.261174	.550535	1.6	.418382	-.179747	4.262142
.48	2.240583	.255993	.577481	1.7	.369209	-.195656	4.767125
.49	2.198946	.250801	.604336	1.8	.307573	-.208071	5.323478
.50	2.158655	.245597	.631111	1.9	.262625	-.217284	5.938118
.51	2.119632	.240384	.657812	2.0	.223607	-.223607	6.618761
.52	2.081807	.235163	.684448	3.0	.038236	-.191180	19.584859
.53	2.045114	.229937	.711026	4.0	.005016	-.115370	66.091733
.54	2.009492	.224706	.737553	5.0	.000526	-.062593	190.113240
.55	1.974885	.219472	.764038				
.56	1.941242	.214237	.790486				
.57	1.908514	.209002	.816904				
.58	1.876656	.203768	.843299				
.59	1.845626	.198537	.869677				
.60	1.815385	.193311	.896045				

するよい推定値が得られれば、式 (4.7) によって各常数が推定できる。Gumbel²¹⁾ はこれら母特性値を標本ひずみ係数 C_s' 、標本標準偏差 s_x 、標本平均 $\bar{x}$ でそのまま置きかえる方法を提案している。

$$\left. \begin{aligned} C_s &= C_s' \\ \sigma_x &= s_x \\ m_x &= \bar{x} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

なお Gumbel は下限値 $-b$ は $-b \geq 0$ のはずであるから、 $b > 0$ のときは $b=0$ としてよいとしている。またとくに $b=0$ すなわち観測によって得られたデータを対数極値確率紙に plot した場合、これらが 図-4.1 のようにほぼ直線状に配列するときは、式 (4.3) の特別形式

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a(\log x - \log x_0) \\ &= a(X - X_0) \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

になるから、前章式 (3.25) と同様な解法、すなわち

$$\left. \begin{aligned} 1/a &= s_x/s_y \equiv s_{\log x}/s_y \\ X_0 &\equiv \log x_0 = \overline{\log x} + (1/a)\bar{y} \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

を提案している。ここに

$$\left. \begin{aligned} s_{\log x} &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum (\log x - \overline{\log x})^2} = \sqrt{(\overline{(\log x)^2}) - (\overline{\log x})^2} \\ \overline{\log x} &= \frac{1}{N} \sum \log x, \quad (\overline{\log x})^2 = \frac{1}{N} \sum (\log x)^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

また $s_y, \bar{y}$ は表 3.1, 3.2 を用いればよい。

4.4. 確率水文量の推定

return period T 、あるいは確率水文量の推定は、基本的には

$$T = \frac{1}{1 - G(x)} \quad (4.12)$$

の形で行なえばよい。すなわち確率水文量の推定式は

T 年確率水文量

$$\left. \begin{aligned} \log(x+b) &= \log(x_0+b) + (1/a)\xi \\ &= \log(x_0+b) - (1/a)y \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

ここに ξ または y の値は

$$\left. \begin{aligned} y &= -\xi = -\lg[-\lg G(x)] \\ &= -\lg[\lg T/(T-1)] \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

であって、前章表 3.5 の値がそのまま利用できる。この場合の return period T は、 T 年に1年という定義であって、 T 年に1度の定義にしたがうときは、上式と区別するため $t=1/T$ を用いると Y のかわりに

$$y = \lg(1/t) \quad (4.15)$$

を用いた次式によればよい。

t 回確率水文量

$$\log(x+b) = \log(x_0+b) + (1/k)\log t \quad (4.16)$$

この t は通常 $t=1/T$ の意味で用いることが多いから $t < 1$ であるが、 $t \geq 1$ の場合も成立し、このときは1年に t 回起こる値ということになる。

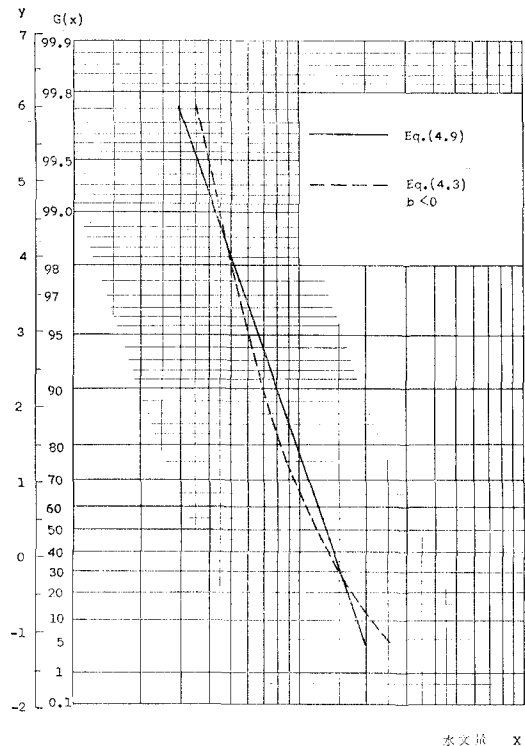


図-4.1. 対数極値確率紙上の形状

さて上述の論義は sample size N が十分大きいとしたときの論義であって、 N が小さいときは、前章で述べたような、異常確率水文学の概念にしたがうべきものと考えられる。

$$\text{異常確率水文学} \quad \log(x+b) = \log(x_0+b) - (1/a)y_e \quad (4.17)$$

この場合の y_e は、下尾側すなわち $x < x_0$ の部分の推定には、表 3.6 の y_e の値を用いる。(上尾側、下尾側の意味が最大値分布の場合と逆になっている)

4.5. 信頼限界，データの棄却検定

最大値分布の場合と扱えるから、ここではとくに述べない。

第5章 対数正規分布

5.1. 概 説

一般に水文諸量のひん度曲線は図-1.1のような非対称分布を示すことが多いが、とくに同図(c)のようなものに対しては、「変数の対数変換を行なうと近似的に正規分布とみなしうる」場合の多いことが経験的に知られている。このような分布形式を一般に対数正規分布(logarithmic normal distribution)と呼び、経済統計、写真工学などの分野では古くから用いられていたようである。この分布形式の水文学への導入は Hazen⁶⁾ に負うところが大きいといわれるが、1930 年前後、Gibrat, Grassberger, Hazen などによってほとんど同時に研究され、以来今日に至るまで多くの研究成果が示されている³³⁾。

Gibrat, Grassberger などは広く適応性をもたせるように半図式的ないし級数展開などを試みたが³⁴⁾、対数の中に常数をいくつか含ませることによって適応性を高めようとした Slade³⁵⁾ の研究以来、今日では対数正規分布とはもっぱら Slade 型のものを意味するまでに至っている。岩井^{36~38)} の研究もこの流れを汲むもので、Kimball の方針、すなわち順序統計学概念を利用して、とくに両尾部の適合性を重視するよう工夫したものであった。

対数正規分布は変数のかわりにその対数変換値が正規分布にしたがうという著名な特徴があり、正規分布に関する多くの研究成果が利用できる点で非常に有用な分布といえるはずである。

なお対数正規分布は本来経験的に利用されだしたものであって、これであらう表現できるものでありさえすれば、とくにどのような mark をもつ水文学に適用されるべきかという制限ないし根拠はない。ただその発生根拠についての説明を試みたものは2, 3ないでもない。たとえば Chow²⁸⁾ は次のように説明した。一般に水文学 x は多くの気象的要因、地形的要素などによって支配されるから、その構成諸要素を z_r とすると

$$\left. \begin{aligned} x &= z_1 z_2 z_3 \cdots z_r \\ y &= \lg x = \sum_{r=1}^r \lg z_r \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

と考えてよい、ところで z_r は一応互いに独立、かつ $r \gg 1$ と考えてよいであろうから、中央極限定理によって $y = \lg x$ は漸近的に正規分布にしたがうはずである。

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} \exp \left[-\frac{(y - y_m)^2}{2\sigma_y^2} \right] \quad (5.2)$$

このような漸近的な考え方が許されるとしても、 x が常に各要素 z_r の積の形で表わされるかどうかは問題であろう。一般に説明されている対数正規分布の由来は次のようである。時刻 t および $t+dt$ における x の差 $dx = x(t+dt) - x(t)$ が次の形に表わされるものとする。

$$dx = h(x) dz(t) \quad (5.3)$$

そしてこの dz は母平均および、母数も有限であるような分布にしたがうものとし、かつ $dz(t)$ と $dz(s)$ が $t \neq s$ である限り互いに独立であるとすると、この dz を t について加えたもの

$$\sum_t \{dx/h(x)\} = \sum_t dz \quad (5.4)$$

は項数を増すにしたがい正規分布に漸近する。したがってその極限を考えると

$$\int \frac{dx}{h(x)} = z \quad (5.5)$$

が正規型になる。ここで $h(x)$ が k, b を常数として

$$h(x) = (1/k)(x+b) \quad (5.5)$$

で表わされるならば

$$\int \frac{dx}{h(x)} = k \lg(x+b) \quad (5.7)$$

が正規型に、また c_0, c_1, c_2 を常数として $h(x)$ が

$$h(x) = c_0 x^2 + c_1 x + c_2 \quad (5.8)$$

の形で表わされるならば、 b, u を常数として $\lg\{(x+b)/(u-x)\}$ が正規型に漸近することになる。

5.2. 対数正規分布の実用形式と特性

5.2.1. 対数正規分布の実用形式

ここで対数正規分布とは、対数形の中にいくつかの常数を含ませる、いわゆる Slade 型の分布と定義すると、実用上考えられる形式はつぎのようなものであろう。

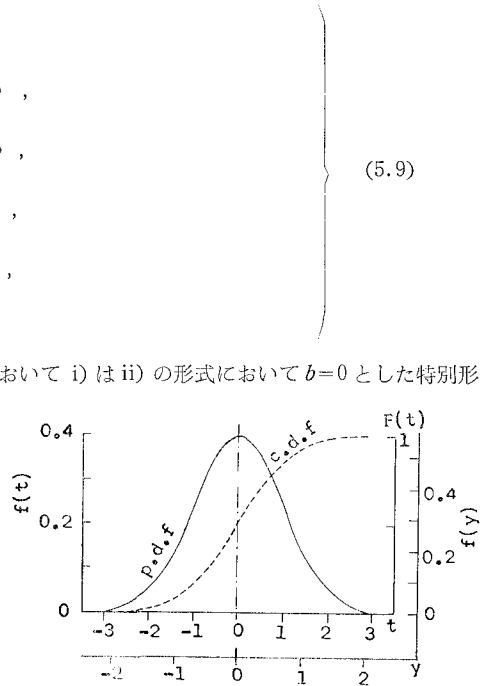
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-v^2} dy, \quad \left. \begin{array}{l} \text{i) } y = a \log \frac{x}{x_0} \quad 0 < x < \infty, \\ \text{ii) } y = a \log \frac{x+b}{x_0+b} \quad -b < x < \infty, \\ \text{iii) } y = a \log \frac{u-x_0}{u-x} \quad -\infty < x < u, \\ \text{iv) } y = a \log \frac{x}{x_0} \frac{u-x_0}{u-x} \quad 0 < x < u, \\ \text{v) } y = a \log \frac{x+b}{x_0+b} \frac{u-x_0}{u-x} \quad -b < x < u \end{array} \right\} \quad (5.9)$$

ここに a, x_0, b, u はすべて常数である。これらの諸形式において i) は ii) の形式において $b=0$ とした特別形式である。また iv) は v) の特別形式であるが v) は常数の数が4箇となっている。一般に分布特性の記述には常数の数が多いほど適合性をよくすることができるように思われるが、これが実用上の問題となると、常数が多いほど高次の特性値を考えなければならず、偏倚の問題などもあって必ずしも得策ではない。そこでここでは3常数を含む形式 ii), iii), iv) を考えることにする。

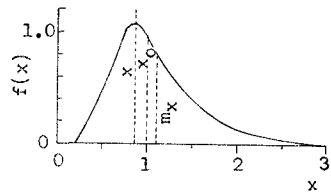
5.2.2 $\log(x+b)$ が正規型の形式の特性

(a) 母分布の特性 $\log(x+b)$ が正規型であるような対数正規分布は図-5.1(b)に示されるような分布であって、現今最も主用されている形式である。

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-v^2} dy \\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{k}{x+b} e^{-y^2} \\ y = a \log \frac{x+b}{x_0+b} = k \lg \frac{x+b}{x_0+b}, \quad -b < x < \infty \end{array} \right\} \quad (5.10)$$



(a) 正規分布



(b) 対数正規分布

図-5.1. 正規分布と対数正規分布

ここに a または $k = a \log e = 0.4343a$ および x_0, b は常数である。この分布の $(x+b)$ の原点のまわりの i 次の積率 ν_i は

$$\left. \begin{aligned} \nu_i &= \int_{-b}^{\infty} (x+b)^i f(x) dx = (x_0+b)^i \lambda^{i^2}, \\ \lambda &= \exp(1/4k^2) \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

したがって平均値 m_x , 分散 σ_x^2 あるいは変動係数 C_v , ひずみ係数 C_s はつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} m_x &= \nu_1 - b = (x_0+b)\lambda - b, \\ \sigma_x^2 &= \mu_2 - \nu_1^2 = (x_0+b)^2 \lambda^2 (\lambda^2 - 1), \\ C_v &= \frac{\sigma_x}{m_x} = \sqrt{\lambda^2 - 1} \left(1 + \frac{b}{m_x}\right), \\ C_s &= \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3}{\sigma_x^3} = \sqrt{\lambda^2 - 1} (\lambda^2 + 2) \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

ここに μ_i は平均値 m_x のまわりの i 次の積率である。

さて a または k は、本来この分布を $\log(x+b)$ の分布とみるとときにはその分散の程度を表わす parameter であるが、上式よりわかるように x を変量とする分布では、この分布のひずみの程度を表わす parameter である。また簡単な吟味によって、 C_s は $1/k$ に関して単調増加関数でありかつ

$$\lim_{1/k \rightarrow 0} C_s = 0$$

$$\text{すなわち} \quad C_s > 0 \quad (5.13)$$

の分布であることがわかる。また C_v, C_s の両式より λ を消去すると

$$\left. \begin{aligned} C_s &= \left(\frac{C_v}{\varphi}\right)^3 + 3\left(\frac{C_v}{\varphi}\right) > 0 \\ \varphi &= 1 + \frac{b}{m_x} \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

これは岩井³⁹⁾によって示された式であるが、これを利用すると下限常数 $(-b)$ の正負に関して興味ある次式が得られる⁴⁰⁾。

$$b \leq 0; \quad C_s \leq C_v^3 + 3C_v, \quad (\text{複号同順}) \quad (5.15)$$

ただし $b < 0$ のときは $|b| < m_x$

すなわち b の正負はこの分布の分布性状と密接な関連をもつことがわかる。

次に分布の中心位置に関する諸特性値 mode $\hat{x}$, median $\tilde{x}$, 平均値 m_x および幾何平均値 g_x の大小関係を総括するとつぎのようである。

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= (x_0+b) \exp(-1/2k^2) - b \\ \tilde{x} &= x_0 \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} m_x &= (x_0+b) \exp(1/4k^2) - b \\ \hat{x} \leq \tilde{x} = x_0 \leq m_x, \quad g_x &< m_x \end{aligned} \quad (5.17)$$

とくに g_x と x_0 の大小関係は b の正負と密接な関係があつて、 $\log(x_0+b)$ が $\log(x+b)$ の平均値になっていることに着目するとあきらかにつぎのようになる。

$$b \leq 0; \quad G_x \leq x_0 \quad (5.18)$$

(b) 確率紙による実用問題の考察⁴⁰⁾ この分布は本質的に $C_s > 0$ であるので、普通確率紙に plot されたデータが図-5.2の曲線の B ような性状を示すものに適用される。われわれが通常扱う水文量の場合はほとんどこのような性状を示すが、さらにデータを対数確率紙に plot すると、図-5.3の曲線 B_1 また直線 B_0 の性状を示すものが比較的多いようである。この場合対数確率紙に plot されたデータの傾向線と b の正負の関係はどのようなものであるかを少し調べてみよう。

いまデータを大きさの順序に並べ $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$ とし、小さい方より i 番目および $r = N - i + 1$ 番目の

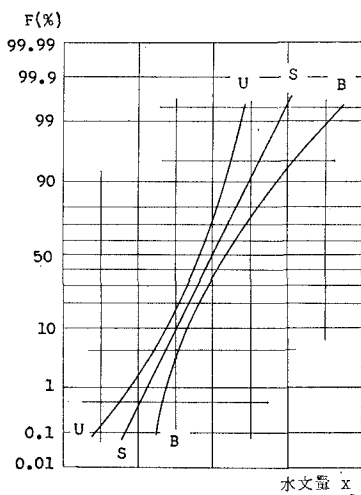


図-5.2. 正規確率紙上の形状

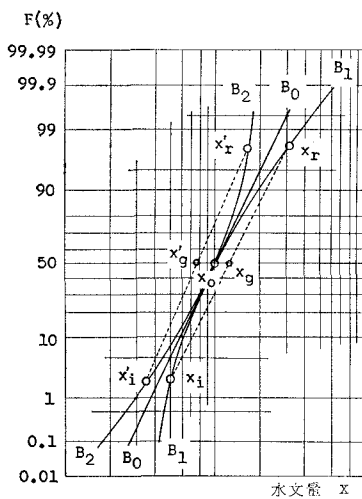


図-5.3. 対数確率紙上の形状

値をそれぞれ x_i , x_r とし、これらのデータの分布に式 (5.10) の形式が適用できるものとする、経験的分布の上では次式が成立する。

$$-y_i = y_r ; \quad \frac{x_0 + b}{x_i + b} = \frac{x_r + b}{x_0 + b}$$

$$\therefore b = \frac{x_i x_r - x_0^2}{2x_0 - (x_i + x_r)} \quad (5.19)$$

x_0 は確率紙に plot されたデータの傾向線が $F = 50\%$ の線を切る点にほとんど等しいはずであるから、一般に $2x_0 - (x_i + x_r) < 0$ 、したがって b の正負は分子の負正により定まる。ところで対数確率紙上で x_i と x_r を結ぶ直線が 50% の線を切る点を x_g とすると、 $x_0^2 = x_i x_r$ 、図-5.3 より明らかなように、対数確率紙上に plot されたデータ群が

$$\left. \begin{array}{l} \text{曲線 } B_1 \\ \text{直線 } B_0 \\ \text{曲線 } B_2 \end{array} \right\} \text{の性状を示すならば} \quad x_i x_r \cong x_0^2 ; \quad b \cong 0 \quad (5.20)$$

すなわち $(-b)$ は式の上でその分布の下限値を示す parameter であるが、その正負は水文諸量の分布性状によって決まるものであって、必ずしも物理的な意味の下限値ではないことがわかる。

なおこうした確率紙を用いた論義は本質的に式 (5.15), (5.18) などと同じことである。

5.2.3. $\log(u-x)$ が正規型の形式の特性

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-v^2} dv \\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{k}{u-x} e^{-v^2} \\ y = a \log \frac{u-x_0}{u-x} = k \lg \frac{u-x_0}{u-x}, \quad -\infty < x < u \end{array} \right\} \quad (5.21)$$

ここに a , $k = a \log e$, x_0 , u は常数である。この分布における x の u のまわりの i 次の積率 ν_i は

$$\left. \begin{array}{l} \nu_i = (-1)^i \int_{-\infty}^u (u-x)^i f(x) dx = (-1)^i (u-x_0)^i \lambda^{i^2} \\ \lambda = \exp(1/4k^2) \end{array} \right\} \quad (5.22)$$

したがって平均値 m_x , 分散 σ_x^2 , ひずみ係数 C_s などは

$$\left. \begin{aligned} m_x &= u - (u - x_0)\lambda \\ \sigma_x^2 &= (u - x_0)^2 \lambda^2 (\lambda^2 - 1) \\ C_s &= -\sqrt{\lambda^2 - 1} (\lambda^2 + 1) \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

容易にわかるように a または k がこの分布のひずみの程度を表わす parameter であって

$$\left. \begin{aligned} C_s &< 0 \\ \lim_{1/k \rightarrow 0} C_s &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

したがってこの分布は、普通確率紙の上に plot されたデータ群が、図-5.2の曲線 U 状を示すようなものに適用される。一般にわれわれが扱う水文量のそれは、ほとんど同図曲線 B 状を示すことより、水文統計ではあまり価値ある分布形式とは考えられないようである。

5.2.4 $\log [x/(u-x)]$ が正規型の特性⁴⁰⁾

(a) 母分布の特性

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-y^2} dy, \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{k u}{x(u-x)} e^{-y^2}, \\ y &= a \log \frac{x}{x_0} \frac{u-x_0}{u-x} = k \lg \frac{x}{x_0} \frac{u-x_0}{u-x}, \quad 0 < x < g \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

この分布形式は下限が0，上限が有限である点よりあたかも実際的と考えられ、ときには推奨されることもあるが、水文統計ではあまり適応性があるとは考えにくいようである。こうした問題を吟味するにはその積率特性を調べればよいはずであるが、対数の中が x について線形でないため簡単でなく、これについて岩井⁴¹⁾の研究もあるが、implicit な形であるためすぐには利用しがたいようである。ところで上式は

$$y = k \lg \frac{z_0 - 1/u}{z - 1/u} \quad (5.26)$$

ただし $z = 1/x$, $z_0 = 1/x_0$

と変形すると、対数内が z について線形となるから、 z の $1/u$ のまわりの reciprocal moment ν_t は考えることができる。これを用いることにすると、

$$\left. \begin{aligned} \nu_t &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{1/u}^{\infty} (z - 1/u)^t f(z) dz = (z_0 - 1/u)^t \lambda^t, \\ \lambda &= \exp(1/4k^2) \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

したがって平均値 m_x ，分散 σ_x^2 ，変動係数 $C_v(z)$ ，ひずみ係数 $C_s(z)$ はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} m_x &= (z_0 - 1/u)\lambda + 1/u, \\ \sigma_x^2 &= (z_0 - 1/u)^2 \lambda^2 (\lambda^2 - 1), \\ C_v(z) &= \sqrt{\lambda^2 - 1} \left(1 - \frac{1}{m_x u}\right), \\ C_s(z) &= \sqrt{\lambda^2 - 1} (\lambda^2 + 2) \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

そして $C_v(z)$ と $C_s(z)$ の関係は

$$\left. \begin{aligned} C_s(z) &= \left[\frac{C_v(z)}{\varphi} \right]^3 + 3 \left[\frac{C_v(z)}{\varphi} \right] > 0 \\ \varphi &= 1 - \frac{1}{m_x u} \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

ここで $u > 0$ であることを考慮すると

$$C_s(z) > C_v^3(z) + 3C_v(z) \quad (5.30)$$

これから x についての変動係数 C_v とひずみ係数 C_s の間の関係は

$$C_s < C_v^3 + 3C_v \quad (5.31)$$

であることが予想される。

(b) 確率紙による実用問題の考察 reciprocal moment では直接的な積率特性がはっきりしないので、確

率紙を用いて実用的な考察をしてみよう。5.2.2. (b) と同様、データを大きさの順序に並べて小さい方より i 番目および $r=N-i+1$ 番目の値を x_i, x_r とすると、経験的確率の上で次の関係が得られる。

$$-y_i = y_r ; \quad \frac{x_0}{x_i} \frac{u-x_i}{u-x_0} = \frac{x_r}{x_0} \frac{u-x_0}{u-x_r}$$

したがって

$$1 - \frac{u}{x_0} = \frac{(x_0-x_i)(x_r-x_0)}{x_i x_r - x_0^2} \quad (5.32)$$

この分布が成立する限り $u > x_0$ であり、かつ上式分子は一般に正であるから、この分布が成立するのは

$$x_i x_r - x_0^2 < 0 \quad (5.33)$$

の場合に限られる。これはデータを対数確率紙上に plot した場合、データ群全体としての傾向線が図-5.3 曲線 B_2 状になる場合、したがってまた式 (5.31) の成立する場合に相当することがわかる。なおこの分布は式 (5.31) が成立する限り、図-5.2 曲線 U のような性状を示すデータにも適用可能なようである。

5.2.5. 実用上の問題

以上の吟味によって、 $\log(x+b)$ および $\log(u-x)$ が正規型であるような対数正規分布は、 $C_s=0$ の正規分布を基本形とするそれぞれ $C_s > 0$, $C_s < 0$ の分布であること、したがって後者の形式は、水文統計では、実用上の価値が小さいであろうことがわかった。

また $\log[x/(u-x)]$ が正規型となる対数正規分布は本質的に $C_s < C_0^3 + 3C_0$ の形式であって、確率紙上に plot されたデータ群の性状が図-5.3 曲線 B_2 ないし図-5.2 曲線 U 状を示すようなものに適用できることがわかった。

一般にわれわれが扱う水文データは図-5.2の曲線 B 状を示すものがほとんどであり、かつ図-5.3の曲線 B_1 状を示すものが大半を占めるようである。そして図-5.3 曲線 B_2 状を示すものには、 $\log(x+b)$ が正規型の対数正規分布において $b > 0$ としたものが適用できることをあわせ考えると、結局 $\log(x+b)$ が正規型の形式が、下限常数 ($-b$) の正負を問わなければ、最も有用な形式といえることができる。したがって以下ではこの形式のみを考える。

5.3. 対数正規分布の解法

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-y^2} dy$$

$$y = a \log \frac{x+b}{x_0+b} = k \lg \frac{x+b}{x_0+b}$$

この分布に含まれる3常数 a または $k=a \log e$ および x_0, b の推定法としては、この分布の積率特性を利用する orthodox な方法、順序統計量の概念と正規分布の特性を利用する方法、最尤法などいくつかの方法が考えられているが、ここでも簡単な実用的方法を述べる。

5.3.1. 積率法 (石原・高瀬の方法)⁴²⁾

この分布の積率特性を示した式 (5.12) を各常数についてまとめるとつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} 1/a &= 0.4343(1/k) \\ 1/k ; C_s &= \sqrt{\lambda^2 - 1} (\lambda^2 + 2) \\ \lambda &= \exp(1/4k^2) \\ b &= \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \sigma_x - m_x \equiv A_3 \sigma_x - m_x \\ x_0 &= m_x - \frac{\lambda - 1}{\lambda \sqrt{\lambda^2 - 1}} \sigma_x \equiv m_x - B_3 \sigma_x \\ x_0 + b &= \frac{1}{\lambda \sqrt{\lambda^2 - 1}} \sigma_x \equiv C_3 \sigma_x \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

上式中 C_s, A_3, B_3 または C_3 はすべて $1/k$ のみの関数であって、表-5.1 に示される。同表は石原・高瀬によるもので、Slade などが示した解も本質的にはこれと同等であるが、実用的には上式のような表現の方が有用である。

表-5.1 対数正規分布積率解の数表(石原・高瀬)

$$b = A_3\sigma_x - m_x, x_0 = m_x - B_3\sigma_x, x_0 + b = C_3\sigma_x$$

$1/k$	C_s	A_3	B_3	C_3	$1/k$	C_s	A_3	B_3	C_3
0.010	0.021	141.421	0.004	141.417	0.50	1.144	2.741	0.166	2.575
15	31	94.277	6	94.271	1	171	683	169	514
20	42	70.707	7	70.700	2	198	628	172	456
25	53	56.563	9	56.554	3	225	575	175	400
30	63	47.135	10	47.125	4	252	524	178	346
35	0.073	40.400	0.013	40.387	0.55	1.279	2.475	0.181	2.294
40	84	35.348	14	35.334	6	307	427	184	243
45	95	31.186	16	31.170	7	335	381	187	194
50	106	28.275	17	28.258	8	363	336	189	147
55	116	25.703	19	25.684	9	391	293	191	102
60	0.127	23.560	0.021	23.539	0.60	1.420	2.252	0.193	2.059
65	138	21.747	23	21.724	1	449	212	195	017
70	149	20.191	25	20.166	2	479	173	197	1.976
75	159	18.843	26	18.817	3	509	135	199	936
80	170	17.664	28	17.692	4	539	098	201	897
85	0.180	16.623	0.030	16.653	0.65	1.569	2.062	0.203	1.859
90	191	15.698	32	15.666	6	600	027	205	822
95	202	14.869	33	14.836	7	631	1.993	208	785
					8	663	961	211	750
					9	695	929	214	715
0.10	0.213	14.125	0.035	14.090	0.70	1.727	1.898	0.217	1.681
1	234	12.837	38	12.799	1	760	868	220	648
2	256	11.764	42	11.722	2	793	838	223	615
3	277	10.856	46	10.810	3	827	809	225	584
4	298	10.077	49	10.028	4	861	781	227	554
0.15	0.320	9.402	0.053	9.349	0.75	1.895	1.754	0.229	1.525
6	342	8.811	56	8.755	6	930	728	232	496
7	364	8.289	60	8.229	7	965	702	234	468
8	385	7.825	64	7.761	8	2.001	677	237	440
9	407	7.410	67	7.343	9	037	652	239	413
0.20	0.429	7.036	0.069	6.967	0.80	2.074	1.628	0.241	1.387
1	450	6.704	73	6.631	1	112	605	243	362
2	471	6.389	77	6.312	2	150	582	245	337
3	492	6.108	80	6.028	3	188	559	247	312
4	515	5.853	84	5.769	4	226	537	249	288
0.25	0.538	5.613	0.087	5.526	0.85	2.266	1.516	0.251	1.265
6	561	5.378	91	5.287	6	306	495	253	242
7	584	5.194	94	5.100	7	347	474	255	219
8	607	5.001	97	4.904	8	388	454	256	198
9	630	4.826	101	4.725	9	430	434	258	176
0.30	0.653	4.661	0.104	4.557	0.90	2.473	1.415	0.260	1.155
1	676	507	107	400	1	516	396	262	134
2	699	363	110	253	2	560	378	263	115
3	722	227	113	114	3	605	360	265	095
4	745	099	116	3.983	4	650	342	267	075
0.35	0.769	3.979	0.120	3.859	0.95	696	1.324	0.268	1.056
6	793	865	123	742	6	743	307	269	038
7	817	757	127	630	7	791	290	271	019
8	841	655	130	525	8	839	274	273	001
9	865	557	133	424	9	889	258	274	0.984
0.40	0.890	3.465	0.136	3.329	1.00	2.939	1.242	0.275	0.967
1	915	377	139	238	1	990	226	276	950
2	940	293	142	151	2	3.042	210	277	933
3	965	213	145	068	3	095	195	279	916
4	990	137	148	2.989	4	149	180	280	900
0.45	1.015	3.063	0.151	2.912	1.05	3.203	1.166	0.281	0885
6	040	2.993	154	839	6	259	152	282	870
7	065	926	157	769	7	316	138	283	855
8	091	862	160	702	8	374	124	284	840
9	117	800	163	637	9	433	110	285	825

(次頁へ続く)

$1/k$	C_s	A_3	B_3	C_3	$1/k$	C_s	A_3	B_3	C_3
1.10	3.493	1.097	0.286	0.811	1.30	4.988	0.868	0.301	0.567
1	554	084	87	797	1	5.081	858	01	557
2	617	071	88	783	2	176	848	01	547
3	680	058	89	769	3	273	838	00	538
4	745	045	90	755	4	372	829	00	529
1.15	3.812	1.033	0.291	0.742	1.35	5.473	0.820	0.301	0.519
6	880	021	92	729	6	576	811	01	510
7	949	009	93	717	7	682	802	01	501
8	4.019	0.997	94	703	8	791	793	01	492
9	090	985	95	690	9	903	784	01	483
1.20	4.163	0.973	0.296	0.677	1.40	6.018	0.775	0.301	0.474
1	238	962	97	665	1	135	766	00	466
2	314	951	98	653	2	255	758	00	458
3	392	940	99	641	3	378	749	00	449
4	472	930	0.300	630	4	503	741	00	441
1.25	4.553	0.919	0.301	0.618	1.45	6.631	0.733	0.300	0.433
6	636	908	02	606	6	763	725	00	425
7	721	898	02	596	7	898	717	00	417
8	808	888	02	586	8	7.038	709	00	409
9	897	878	02	576	9	181	701	0.299	402
					1.50	327	693	98	395

さて実用上の問題となると、 C_s を直接標本ひずみ係数 C_s' で置きかえる方法では、あまりデータとの適合性がよくない。このような難点を解決する便法として、水文統計では plotting position の概念を利用することが多い。すなわち式 (5.10) において

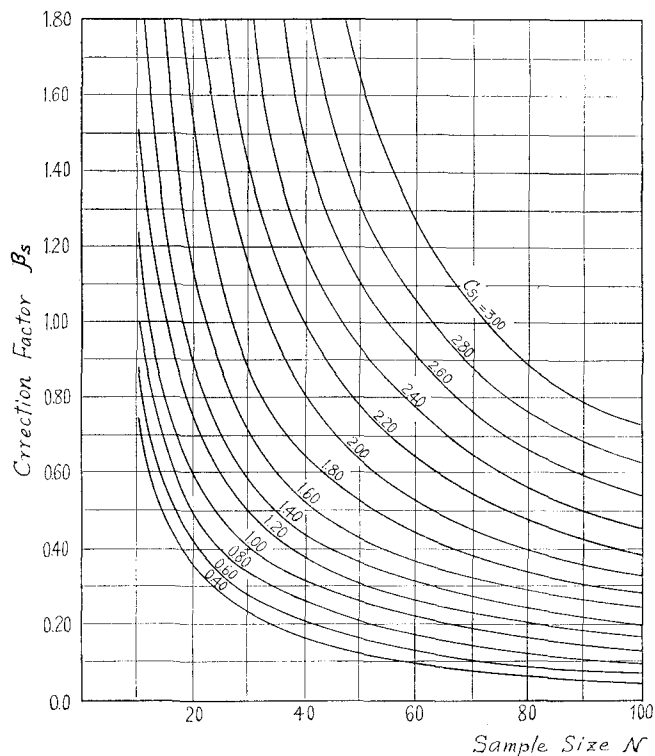


図 - 5.4. 標本ひずみ係数 C_{s1} の補正係数 β_s (石原・高瀬)

$$\left. \begin{aligned} y &= k \lg z \\ z &= e^{y/k} = \frac{x+b}{x_0+b} \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

とおくと、 z は x の線形変換変量であって、とくにその標本ひずみ係数の間には次の関係が成立する。

$$C_s'(x) = C_s'(z)$$

そこで厳密には z の分布を理論的に考えなければならないが、石原・高瀬は z_t の推定に Hazen plot を利用した。

$$F(x_t) = \frac{2i-1}{2N} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{y_t} e^{-y^2} dy \rightarrow y_t \rightarrow z_t = e^{y_t/k} \quad (5.36)$$

こうすると $C_s'(z)$ の値は sample size N と $1/k$ のみの関数として求められ、一方母ひずみ係数 C_s は $1/k$ のみの関数として表わされているから、結局 C_s と $C_s'(x) \equiv C_s'(z)$ の関係を N の関数として表わすことができる。石原・高瀬が示した具体的な手法は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} 1/k \leftarrow \hat{C}_s &= C_{s1}(1+\beta_s) = C_s' \sqrt{\frac{N-1}{N}} (1+\beta_s) \\ 1/a &= 0.4343(1/k) \\ \hat{b} &= A_3 \hat{\sigma}_x - \hat{m}_x \\ \hat{x} &= \hat{m}_x - B_3 \hat{\sigma}_x \\ C_{s1} &= \frac{1}{N-1} \frac{\Sigma(x-\bar{x})^3}{\sigma_x^3} = \sqrt{\frac{N-1}{N}} C_s', \quad C_s' = \frac{\bar{x}^3 - 3\bar{x}^2\bar{x} + 2\bar{x}}{s_x^3} \\ \hat{\sigma}_x &= \sqrt{\frac{N}{N-1}} s_x \quad s_x = \sqrt{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} \\ m_x &= \bar{x} \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

ここに β_s は標本ひずみ係数 C_s' の補正係数であって、図-5.4 に示されるようなものである。

5.3.2. 岩井法

わが国で広く知られている岩井法^{36~38)}とは、 b の推定に両端部の経験上の確率を利用し、他の常数は正規分布における手法を利用したものである。なおここでは当初の提案を若干変えたもの⁴⁰⁾を示しておく。

$$\left. \begin{aligned} x_g ; \log x_g &= \frac{1}{N} \sum_i \log x_i \\ b ; b_t &= \frac{x_t x_r - x_g^2}{2x_g - (x_t + x_r)} \\ \hat{b} &= \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j b_i, \quad j \div N/10 \\ x_0 ; \log(x_0+b) &= \frac{1}{N} \sum_i \log(x_i+b) \equiv \frac{1}{N} \sum_i X_i \\ 1/a &= \sqrt{\frac{2N}{N-1}} s_x, \quad s_x = \sqrt{\bar{X}^2 - \bar{X}^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

ここに $\bar{X}$, s_x^2 はそれぞれ $X = \log(x+b)$ の標本平均および標本標準偏差である。

5.3.3. 順序確率法

岩井が Kimball の方針にしたがって採用した b の推定法は、順序統計量の概念にしたがったものであり、石原・高瀬の採用した C_s の推定法も同様な概念を利用したものであった。これらの解法に対し、すべての常数を順序統計学的に考え経験的分布関数を推定しようとする方法が角屋³²⁾、高瀬⁴³⁾などによって示されている。

いま X を b なる補正操作および対数変換によって正規化された変数

$$X = \log(x+b)$$

とすると、つぎの関係が成立する

表-5.2 順序確率法の s_y -Thomas Plot-(高瀬)

N	s_y	N	s_y	N	s_y	N	s_y	N	s_y	N	s_y
10	0.5575	25	0.6279	40	0.6510	55	0.6629	70	0.6704	85	0.6754
1	668	6	301	1	21	6	35	1	08	6	57
2	747	7	322	2	30	7	41	2	12	7	59
3	818	8	342	3	39	8	47	3	16	8	61
4	880	9	361	4	47	9	52	4	20	9	63
15	0.5935	30	0.6379	45	0.6555	60	0.6658	75	0.6724	90	0.6766
6	985	1	396	6	63	1	63	6	27	1	69
7	0.6030	2	412	7	71	2	68	7	30	2	72
8	070	3	427	8	80	3	73	8	33	3	75
9	108	4	441	9	89	4	78	9	37	4	78
20	0.6142	35	0.6454	50	0.6597	65	0.6682	80	0.6740	96	0.6781
1	174	6	467	1	0.6605	66	85	1	43	6	84
2	203	7	479	2	11	7	91	2	46	7	86
3	251	8	489	3	17	8	95	3	48	8	88
4	256	9	500	4	23	9	0.6700	4	51	9	90
5	279	40	510	5	29	70	04	5	54	100	92

表-5.3 順序確率法の s_y -Hazen Plot-(高瀬)

N	s_y	N	s_y	N	s_y	N	s_y	N	s_y	N	s_y
10	0.6632	25	0.6894	40	0.6960	55	0.6992	70	0.7007	85	0.7018
1	672	6	0.6901	1	62	6	94	1	08	6	19
2	705	7	08	2	64	7	95	2	09	7	19
3	733	8	13	3	67	8	96	3	09	8	20
4	757	9	18	4	69	9	97	4	10	9	20
15	0.6778	30	0.6923	45	0.6971	60	0.6998	75	0.7011	90	0.7021
6	796	1	28	6	74	1	99	6	12	1	22
7	812	2	32	7	76	2	0.7000	7	13	2	22
8	826	3	37	8	78	3	01	8	13	3	23
9	839	4	41	9	80	4	02	9	14	4	24
20	0.6851	35	0.6944	50	0.6982	65	0.7003	80	0.7015	95	0.7024
1	61	6	48	1	84	6	04	1	16	6	25
2	70	7	51	2	86	7	04	2	16	7	25
3	79	8	54	3	88	8	05	3	17	8	26
4	87	9	57	4	90	9	06	4	18	9	26
5	94	40	60	5	92	70	07	5	18	100	27

$$X = X_0 + (1/a)y$$

$$\bar{X} = X_0$$

$$s_x^2 = (1/a)^2 s_y^2$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} X_0 &\equiv \log(x_0 + b) = \bar{X} \\ 1/a &= s_x/s_y \end{aligned} \right\} (5.39)$$

$X_i = \log(x_i + b)$ に対応する y_i は経験的分布関数の推定を前提とするならば Thomas plot より算定すればよいが、この場合の s_y の値が表-5.2 に示されている。これらの表は高瀬⁴³⁾ に負うものであって、彼は Hazen plot にもとづく s_y の値も表-5.3のように示している。この2法と岩井法の s_y を図-5.5に比較しておく。

5.4. 確率水文学量の推定

return period T は式(1.2)の定義による。

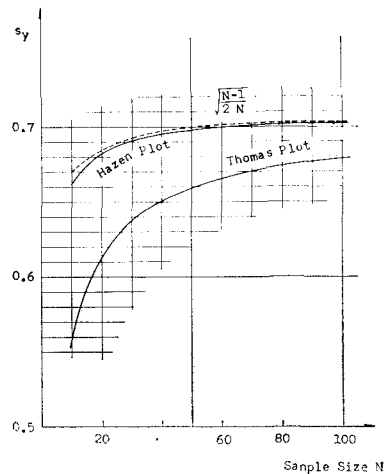


図-5.5. 対数正規分布のあてはめについての3法の s_y 比較

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{n[1-F(x)]} ; & x > x_0 \\ T &= \frac{1}{nF(x)} ; & x < x_0 \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

ここに n は計算に使用したデータの年間平均生起数である。一般には年最大値または年最小値などを扱うことが多く、この場合は $n=1$ とする。また T 年に 1 年の割合で期待されるような値を推定するには次式による。

$$\log(x+b) = \log(x_0+b) \pm (1/a)y \quad (5.41)$$

ここに y は式 (5.40) を満足する正規変数であって、 $n=1$ の場合のおもな T に対する $\sqrt{2}y$, y の値を表-5.4 に示す。また複号のうち+は洪水量など大きな値が、-は渇水量など小さな値の場合である。

表-5.4 おもな T に対する正規変数 $\sqrt{2}y$, y の値

T	$F(x)$ または $1-F(x)$	$\sqrt{2}y$	y	T	$F(x)$ または $1-F(x)$	$\sqrt{2}y$	y
500	0.00200	2.8782	2.0352	40	0.02500	1.9600	1.3859
400	250	8058	1.9840	30	3333	8344	2971
300	333	7191	9227	25	4000	7507	2379
250	400	6521	8753	20	5000	6449	1631
200	500	5758	8214	15	6667	5011	0614
150	0.00667	2.4747	1.7499	10	0.10000	1.2816	0.9062
100	1000	3263	6450	8	12500	1503	8134
80	1250	2417	5851	5	20000	0.8416	5951
60	1667	1282	5049	4	25000	6745	4769
50	2000	0537	4522	3	33333	4307	3045
				2	50000	0.	0.

さてわれわれが扱うデータは一般に小標本であって、上述のような表現で確率水文量を論議してよいかどうかは問題である。一般に標本論の立場よりすれば、3章でも述べたように、本来稀にしか起こらないような値が標本内に含まれる確率はかなり大きいことが知られている。したがって確率水文量の論議にも、このような理論的結果を一応考慮しておく必要があると考えられる。

いま X を $\log(x+b)$ などによって正規化された変量としてこれについて考えてみよう。 $X_1, X_2, \dots, X_N$ を母平均 m , 母分散 σ^2 なる正規母集団より得られた sample size N の標本とし、その標本平均を $\bar{X}$, 標本分散を s_x とする。

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum X, \quad s_x^2 = \frac{1}{N} \sum (X - \bar{X})^2$$

いまこれらとは無関係な標本 X_e を、上述標本と同一母集団より得られた 1 箇の標本と仮定 (null-hypothesis) すると

$$E(X_e - \bar{X}) = 0, \quad E(X_e - \bar{X})^2 = \frac{N+1}{N} \sigma^2$$

そこでいま

$$\chi_N = \frac{Ns_x^2}{\sigma^2}, \quad \chi_e^2 = \frac{N}{N+1} \frac{(X_e - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$

なる統計量を作ると、これらはそれぞれ自由度 $N-1$, 1 の χ^2 分布にしたがうはずであるから

$$F = \frac{\chi_e^2}{1} \bigg/ \frac{\chi_N}{N-1} = \frac{N-1}{N+1} \frac{(X_e - \bar{X})^2}{s_x^2}$$

なる統計量は自由度 1, $N-1$ の F 分布にしたがうはずである。この関係を利用すると、自由度 1, $N-1$ の F 分布で片側異常率 ε に対応する値 $F'_{N-1}(2\varepsilon)$ を用いて

$$\left. \begin{aligned} X_{eu} \\ X_{el} \end{aligned} \right\} = \bar{X} \pm s_x \sqrt{\frac{N+1}{N-1} F'_{N-1}(2\varepsilon)} \quad (5.42)$$

表 - 5.5 異常率 $\varepsilon=1/T$ に対する正規変量 $\gamma_\varepsilon = \sqrt{2} y_\varepsilon = \sqrt{\frac{N+1}{N-1}} F'_{N-1}(2\varepsilon)$

N-1	片 側 異 常 率 ε							
	25%	12.5%	5%	2.5%	1.25%	0.5%	0.25%	0.05%
20	0.7205	1.243	1.809	2.188	2.543	2.984	3.307	4.038
22	7162	234	794	166	512	944	257	3.961
24	7128	227	781	148	489	911	217	898
26	7099	221	770	133	469	884	183	847
28	7073	216	761	120	452	860	154	803
30	7052	212	753	109	437	840	129	766
32	0.7033	1.208	1.746	2.100	2.424	2.823	3.108	3.734
34	7015	204	740	091	413	808	089	705
36	7000	201	735	084	403	794	073	681
38	6987	199	730	077	395	782	058	659
40	6975	196	725	071	386	771	045	639
42	0.6963	1.194	1.722	2.066	2.379	2.762	3.033	3.621
44	6953	192	718	061	373	753	022	605
46	6945	190	715	056	367	745	013	591
48	6936	189	712	052	362	738	004	577
50	6929	187	709	049	357	731	2.996	565
52	0.6922	1.185	1.707	2.045	2.352	2.725	2.988	3.554
54	6916	184	704	042	348	719	981	544
56	6909	183	702	039	344	714	974	534
58	6904	182	700	036	340	709	969	525
60	6898	181	698	033	337	704	963	517
65	0.6887	1.178	1.694	2.028	2.330	2.694	2.951	3.499
70	6876	177	691	023	323	686	940	483
75	6868	175	688	019	318	678	930	471
80	6860	173	685	015	313	672	923	458

X_ε がこの限界値に比して $X_\varepsilon \geq X_{eu}$, $X_\varepsilon \leq X_{el}$ でない限り先の仮定をすてるわけにはいかない。これを異常率 ε に対する異常（確率）値と定義³⁰⁾する。

表 - 5.5 に

$$\gamma_\varepsilon = \sqrt{2} y_\varepsilon = \sqrt{\frac{N+1}{N-1}} F'_{N-1}(2\varepsilon) \quad (5.43)$$

の値を示すがこれを用いると異常率 $\varepsilon = 1/T$ に対応する異常確率水文量 $X_\varepsilon = \log(x_\varepsilon + b)$ は次式で求められる。

$$\begin{aligned} X_\varepsilon &= \bar{X} \pm \gamma_\varepsilon s_X \\ \log(x_\varepsilon + b) &= \log(x_0 + b) \pm \gamma_\varepsilon s_X \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$s_X = s_{\log(x+b)}$$

岩井法，順序確率法では s_X の値が直接求められるが，これが直接得られない場合は次式を利用すればよい。

$$s_X = \sqrt{\frac{N-1}{2N}} (1/a) \quad (5.45)$$

なお表 - 5.5 の値は sample size $N \rightarrow \infty$ にしたがい表 - 5.4 の $\sqrt{2} y$ の値に漸近する。また同表にない $\varepsilon = 1/T$ に対する γ_ε の値は確率紙などを用いて内挿的に求めればよい。

5.5. 変 動 域

母分布の信頼限界を推定することも重要な問題であるが，ここではこれにかわる近似的な方法を示すに止める。ここに変動域（control interval）とは3章のそれと同じ概念によるものであって，確率紙などを用いて，理論曲線の両側にある確率 - 通常標準偏差の幅 - で信頼限界のようなものを構成しようとするものである^{32,44)}。

$F(x_0)$ が 0.5 に近いある範囲では， i 番目順序統計量 X_i は理論値 $\hat{X}_i$ を平均値，次式で示される V_i を標準偏差とするような正規分布に漸近する。

$$V_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sqrt{F(\hat{X}_i)[1-F(\hat{X}_i)]}}{f(\hat{X}_i)} = \frac{1}{a\sqrt{N}} C_y \quad (5.46)$$

$$\left. \begin{aligned} C_y &= \sqrt{\pi} e^{-y^2} \sqrt{\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^y e^{-y^2} dy \right] \left[\int_y^{\infty} e^{-y^2} dy \right]} \\ \text{ex. } y &= 0 \quad C_y = 0.8862 \\ y &= \pm 0.5 \quad C_y = 0.9718 \end{aligned} \right\} \quad (5.47)$$

ここに $X = \log(x+b)$ など正規変量である。

したがってこのような幅 V_i で変動域を構成すると

$$P_r(\hat{X}_i - V_i \leq X_i \leq \hat{X}_i + V_i) \doteq 0.68269$$

これは X_i が近似的に正規分布にしたがうとみなしうる範囲に限って成立するが、実用上 $0.9 \leq F(X_i)$, $0.1 \geq F(X_i)$ の範囲では近似的にも正規分布にしたがうとはみなし得ない。そこで最大値 X_N 以上、最小値 X_1 以下の領域では極値分布にしたがうとみなし

$$\exp(-e^{-l}) - \exp(-e^l) = 0.68269$$

$$\therefore l = 1.1407$$

$$V_{N,1} = \frac{l}{Nf(\hat{X}_{N,1})} = \frac{l}{2a\sqrt{\lg(N/2\sqrt{\pi})}} = \frac{1.1407}{3.035a\sqrt{\lg(N/2\sqrt{\pi})}} \quad (5.48)$$

$X_N, (X_1)$ が $\bar{X}$ に比して十分大きい (小さい) とみなしうるときは上式の第1近似である次の値を採用してもよい。

$$V_{N,1} = \frac{1.1407}{2a} \quad (5.49)$$

このような $V_{N,1}$ を用いれば

$$P_r(\hat{X}_{N,1} - V_{N,1} \leq X_{N,1} \leq \hat{X}_{N,1} + V_{N,1}) = 0.68269$$

変動域幅として50%幅を規定するときは $V_i' \rightarrow 0.6745V_i$, $l = 1.1407 \rightarrow 0.7443$ とすればよい。実際にこの変動域を図示するには、いうまでもなく

$$\log(x+b) = \hat{X}_i \pm V_i$$

を解いて x を求めればよい。

5.6. データの棄却検定

対数正規分布を適用する場合のデータの棄却検定の方法³⁰⁾は、 ε の値が表-5.5にもとづいて推定されるのは、第3章の場合と全く同じであるからここでは省略する。

第6章 その他の統計的方法

6.1. 概 説

水文量の非対称分布の数式的表現法については上述のもののほかにいくつかのものがある。古典的手法については省略するとしても、たとえば n 乗根正規法とかガンマ型分布のあてはめなどはかなり有用なようである。

n 乗根正規法には平方根正規、立方根正規、4乗根正規などが考えられるが、いずれもまったく経験的なものであって、実用的には図-1.2(a)の正規確率紙の横軸を、同図(c)のように立方根その他 n 乗根目盛にしたものを使用し、その直線性のよいものを使えばよい。この場合計算によって常数を推定するには、 $y = n\sqrt[n]{x}$ が正規変量として、通常の正規分布の場合のそれに準じればよいから、ここでとくにとりあげるまででないであろう。

ガンマ型分布は一般に次式で表わされる形式

$$f(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} e^{-bx} x^{a-1}$$

ただし、 $a, b > 0$; 常数,

であって、岡本・鈴木によると降水量の分布形としてかなりの範囲の適応性をもつようである。これは本質的に Foster の第1方法と呼ばれ、多くの書物に紹介されているから、ここでは省略する。

このように水文量の分布のあてはめにいろいろのものが提案されているわけであるが、本質的にどの形式をあてはめるべきだとする理論的根拠が明確でなく、結局は当面の基礎データに最もうまく適合する形式を適用する方針によらざるを得ないのかも知れない。このような意味で最後に小河原の方法を次節で述べることにする。

6.2. 小河原の方法⁴⁵⁾

小河原の方法は、両端値を除いた中間部の値には特定の分布関数をあてはめずに経験的分布関数そのものを採用してこれを正規変数に変換し、両端値および未観測部には極値分布を適用して変換曲線を外挿した後、正規変数について指定された異常率 $\varepsilon=1/T$ に対応する異常値を推定の上、これを原変数に変換しようとするものである。以下計算手順にしたがって内容を説明する。

6.2.1. 経験的変換曲線の推定

年最大水文量 x を扱うものとして統計年数を N とする。これらの変域は $(0, \infty)$ であるとして x をつぎのような X に変換する。

$$X = \log x \quad (6.1)$$

これを正規変数 ξ に変換するには次の関係を用いればよい。

$$F(X) = \Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2}\right] d\xi \quad (6.2)$$

ここに $F(X)$ は X の母分布関数であるが、直接これを知ることができないので、経験的分布関数 $F_N(X)$ を用いる。いま階級の大きさ $4X$ を適当にとって

$$X'_i = X'_0 + i4X, \quad i=1,2,3,\dots,k, \quad (6.3)$$

とし、各区間 $X'_{i-1} < X \leq X'_i$ 内のデータ数を f_i とすると次式で求められる。

$$F_N(X'_i) = \frac{1}{N} (f_1 + f_2 + \dots + f_i), \quad i=1,2,\dots,k-1, \quad (6.4)$$

式(6.2)の $F(x)$ のかわりに $F_N(X'_i)$ を用いると、 X'_i に対応する正規変数 ξ'_i が求められるから、これを図-6.1のように図示すると経験的変換曲線が得られる。 $4X$ の値はデータの種別によって適当にとればよいが、年最大日雨量の場合では $4X = 0.05$ ぐらいが適当とされている。

6.2.2. 変換曲線の外挿

前述の経験的変換曲線は ξ'_0 および ξ'_k の部分は経験的分布関数 F_N がそれぞれ 0, 1 となるため $X'_0 \sim X'_1, X'_{k-1} \sim X'_k$ およびそれらの外側の部分では変換曲線が不明となる。そこでこれらの部分では X は極値分布にしたがうものとして変換曲線を外挿する。この外挿曲線は上尾側または下尾側について端部の各2点 (ξ'_{k-1}, X'_{k-1}) , (ξ'_{k-2}, X'_{k-2}) または (ξ'_1, X'_1) , (ξ'_2, X'_2) を通るように定める。たとえば上尾側については

$$\left. \begin{aligned} F_N(X'_{k-1}) &= P(y_{k-1}), \quad F_N(X'_{k-2}) = P(y_{k-2}) \\ P(y) &= \exp(-e^{-y}) \\ y &= a(X-b) \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

を満足する y_{k-1} , y_{k-2} の値を付表より求め、次式を解いて常数 a, b を定める。

$$y_{k-1} = a(X'_{k-1} - b), \quad y_{k-2} = a(X'_{k-1} - b) \quad (6.6)$$

a, b が決定すれば $X'_{k+i} = X'_k + i4X$, $i=0,1,2, \dots$ に対する $P(y_{k+i})$ が付表より求められるから

$$\Phi(\xi'_{k+i}) = P(y_{k+i}) \quad (6.7)$$

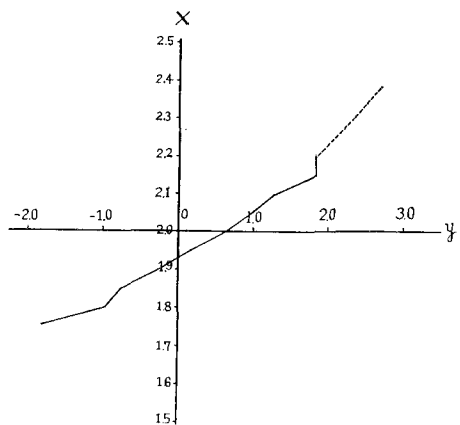


図-6.1. 経験的変換曲線

の関係を用いれば ξ'_{k+i} の値が求められる。 (ξ'_{k+i}, X'_{k+i}) を漸次結んでいけば変換曲線を任意の点まで外挿できる。下尾側についても同様である。

なおデータ中に飛び離れて大きな（あるいは小さな値）が含まれるときは次のようなことがありうる。

$$\xi'_{k-1} = \xi'_{k-2} = \dots = \xi'_{k-l} > \xi'_{k-l-1} \geq \dots \quad (l \geq 2) \quad (6.8)$$

この場合には式(6.5)～(6.7)における X'_{k-1} , X'_{k-2} および $F_N(X'_{k-2})$ などのかわりに次の X''_{k-1} , X''_{k-2} , $F_N(X'_{k-2})$ などの値を採用すればよい。

$$X''_{k-1} = \frac{1}{2}(X'_{k-1} + X'_{k-l}), \quad X''_{k-2} = \frac{1}{2}(X'_{k-l-1} + X'_{k-2l}) \quad (6.9)$$

$$F_N(X''_{k-1}) = F_N(X'_{k-1}) = \dots = F_N(X'_{k-l})$$

$$F_N(X''_{k-2}) = \frac{1}{2} [F_N(X'_{k-l-1}) + F_N(X'_{k-2l})] \quad (6.10)$$

6.2.3. 確率水量の推定

上述の変換曲線を用いると、対数変換変量 X はすべて正規変換変量 ξ に変換できる。そしてこれを用いて ξ の平均値 $\bar{\xi}$, 標本標準偏差 s_ξ を求める

$$\bar{\xi} = \frac{1}{N} \sum \xi, \quad s_\xi^2 = \frac{1}{N} \sum (\xi - \bar{\xi})^2 = \overline{\xi^2} - \bar{\xi}^2 \quad (6.11)$$

これを用いると return period $T=1/\varepsilon$ に対する ξ の値は次式によって推定できる。

$$\left. \begin{matrix} \xi_u \\ \xi_l \end{matrix} \right\} = \bar{\xi} \pm s_\xi \sqrt{\frac{N+1}{N-1} F_{N-1}^1(2\varepsilon)} \quad (6.12)$$

ここに $F_{N-1}^1(2\varepsilon)$ は自由度 1, $N-1$ の F 分布の両側異常率 2ε に対する値である。

$$\sqrt{\frac{N+1}{N-1} F_{N-1}^1(2\varepsilon)} = \gamma_\varepsilon$$

の主な値はすでに表 5.5 に示されているから、これを用いると式(6.12)は

$$\left. \begin{matrix} \xi_u \\ \xi_l \end{matrix} \right\} = \bar{\xi} \pm s_\xi \gamma_\varepsilon \quad (6.12)'$$

このようにして得られた ξ_u を変換曲線によって X に、さらに x に変換すればよい。

3章の論述を考慮すればわかるように、小河原の方法は対数極値分布 A 型で $b=0$ とした形、しかもそれらを端部の2点で定めていることと同等であって、したがって return period $T=1/\varepsilon$ が大きなものに対して非常に大きな推定値を与えることがある。結局これは変換曲線の外挿方法に問題があるわけで、たとえば上尾端の2点で外挿しないでもっと多くの点を総合的に利用するなどの方法も考えられるはずである。気象庁統計課⁴⁶⁾では、種々検討の結果、式(3.24)の m_x , σ_x をそれぞれ標本平均 $\bar{x}$, 標本標準偏差 s_x でおきかえて同式によって常数を定め（この場合 $x_0 \rightarrow b$ と書いて）、外挿するのがよいとの結論を得ているようであるが、これはさらに検討を要するに思われる。

第2篇 相 関 回 帰

第7章 線 形 回 帰

7.1. 概 説

水工計画では、たとえば2点間の水流量の関係、流量と雨量、降雨継続時間の関係、支川をもつ河川の洪水の合流問題、洪水調節池の調節効果の問題など、1変数の理論では解決のむずかしい、すなわち2変数、多変数の理論の導入が必要な問題が非常に多い。しかしこれらの理論の導入の一般的手法は必ずしも明確ではなく、今後の重要な研究課題となっている。ここではとくに2変数の取り扱いの基本的手法と2,3の例について概説するつもりである。

7.2. 最小自乗法と相関係数

観測によって得られた相对应する2変数 x_i, y_i の間に a_j を parameter として

$$y = f(x; a_j) \quad (7.1)$$

なる関係が成立するとみられる場合、 a_j の推定は、 y の推定曲線のまわりの分散を最小にするようにすればよい。

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \sum \{y_i - f(x_i; a_j)\}^2 \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial a_j} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

これが周知のように最小自乗法と呼ばれるものであって、とくに式(7.1)が

$$y = a + bx \quad (7.3)$$

で表わされる場合の最小自乗解は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{b} &= \frac{N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{N \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} \\ \hat{a} &= \frac{1}{N} \left(\sum_i y_i - b \sum_i x_i \right) \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

上式は x の分散 s_x^2 , x, y の共分散 s_{xy} すなわち

$$\left. \begin{aligned} s_x^2 &= \frac{1}{N} \sum_i x_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_i x_i \right)^2 = \frac{1}{N} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \bar{x}^2 - \bar{x}^2 \\ s_{xy} &= \frac{1}{N} \sum_i x_i y_i - \frac{1}{N} \sum_i x_i \cdot \frac{1}{N} \sum_i y_i = \frac{1}{N} \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ &= \bar{xy} - \bar{x} \bar{y} \\ \bar{x} &= \frac{1}{N} \sum_i x_i, \quad \bar{xy} = \frac{1}{N} \sum_i x_i y_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_i y_i \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

を用いるとつぎのように表わされ

$$\left. \begin{aligned} \hat{b} &= \frac{s_{xy}}{s_x^2} \\ a &= \bar{y} - b \bar{x} \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

式(7.3)はつぎのように表わされる。

$$y = \bar{y} + \frac{s_{xy}}{s_x^2} (x - \bar{x}) \quad (7.7)$$

また周知のように、2変数の間の相関の程度を表わすのに次式で定義される相関係数 r が用いられる。

$$r = \frac{-\frac{1}{N} \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_i (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \quad (7.8)$$

これを用いると式 (7.6), (7.7) はつぎのようになる。

$$\hat{b} = r \frac{s_y}{s_x}, \quad \hat{a} = \bar{y} - b\bar{x}, \quad (7.8)$$

$$y = \bar{y} + r \frac{s_y}{s_x} (x - \bar{x}) \quad (7.9)$$

式(7.7), (7.9)を一般に y の x への 回帰直線と呼んでいる。

以上の取り扱いでは x を指定変数と考えている。 x, y とも確率変数と考えられる場合にはいわゆる Deming 流の扱いがなされなければならないが、ここでは簡単に考え、 x, y のどちらかが指定変数であるような扱いをすることにする。

なお最小自乗法の概念は本質的には正規分布を前提としたものであって、これにもとづいて統計量 $\hat{a}, \hat{b}$ ないし r の推定、検定の理論が立てられている。また x, y の間に線形関係が成立しない場合でも、なんらかの方法によって正規化ないし線形化ができるはずであるので、以下2変数の正規分布について若干の考察をしてみよう。

7.3 2変数の正規分布

一般に x, y の同時確率密度分布 $f(x, y)$ が次式で与えられるとき、 x, y は2次元の正規分布にしたがうという

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(x-m_x)}{\sigma_x}\frac{(y-m_y)}{\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right\}\right] \quad (7.10)$$

ここに ρ は相関係数であって $|\rho| < 1$, m_x, m_y , および σ_x^2, σ_y^2 はそれぞれ x, y の平均値, 分散である。

この x, y の分布において、 y がどのような値をとるかに無関係に $x=x$ となる確率 $f_1(x)$ を一般に x の周辺密度関数という。

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad (7.11)$$

また $x=x$ という条件の下に y が y なる値をとる確率を y の条件付確率といい、 $f(y|x)$ と書く。そして一般に乗法定理によって次の重要な関係が成立する。

$$f(x, y) = f_1(x)f(y|x) \quad (7.12)$$

さて $f(x, y)$ が式 (7.10) で表わされる場合の $f_1(x)$ を求めると、式 (7.11) 右辺積分で $v=(y-m_y)/\sigma_y$, $w = \{v - \rho(x-m_x)/\sigma_x\} / \sqrt{1-\rho^2}$ などの変換を行なって演算すれば容易にわかるように次式に導かれる。

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left\{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \quad (7.13)$$

これは1変数の正規分布の式にはかならない。さらに式(7.12)の関係によって $f(y|x)$ を求めると

$$f(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{\sigma_y^2(1-\rho^2)}\left\{y-m_y-\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x)\right\}^2\right] \quad (7.14)$$

すなわちこれが回帰直線式(7.9)の統計的意味を表わしている。すなわち y は

$$\text{平均値} \quad y = m_y - \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x) \quad (7.15)$$

のまわりに

$$\text{分散} \quad \sigma_{y,x}^2 = \sigma_y^2(1 - \rho^2) \quad (7.16)$$

であるような正規分布をしていることがわかる。逆に x の周辺分布 $f_1(x)$ と、 x が与えられたときの y の条件付密度分布 $f(y|x)$ が得られるならば、 x, y の同時分布 $f(x, y)$ は容易に求められる。

さて $m_x = 0, m_y = 0$ として一般性を失うものではないから、以下では $f(x, y)$ を次のように書こう。

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right\} \quad (7.17)$$

この式において、いま C を常数として

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} = (1-\rho^2)C^2 \quad (7.18)$$

とおくと、これは長円の式である。そしてこの長円の周上の点 (x', y') を含む $dx dy$ なる面積内に点 (x, y) の落ちる確率を考えると、点 (x', y') がこの長円の周上にある限り一定である。この長円を確率長円と呼ぶ。

いま式(7.18)の座標軸を

$$\tan 2\alpha = 2\rho\frac{\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} \quad (7.19)$$

を満足する角 α だけ原点のまわりに廻転すると、この長円の式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} aX^2 + bY^2 &= C^2 \\ \left. \begin{aligned} a \} &= 2(1-\rho^2) \left\{ \left(\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_y^2} \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_x^2} - \frac{1}{\sigma_y^2} \right)^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2}} \right\} \\ b \} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (7.20)$$

このような長円の軸の長さの半分はそれぞれ $C/\sqrt{a}$, $C/\sqrt{b}$ であり、その面積 A は

$$A = \pi\sqrt{\frac{C^2}{ab}} = \pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2} C^2 \quad (7.21)$$

したがって点 (x, y) がこの長円内に含まれる確率 P_0 は次式で表わされる。

$$P_0 = \int_A f(x, y) dA = \int_0^C C e^{-C^2/2} dC = 1 - e^{-C^2/2} \quad (7.22)$$

P_0 の主な値に対する C の値を表-7.1 に示しておく。

以上のような考え方が、2変数の確率問題の基本となるわけである。

7.4. 水工計画への適用方式

前述の理論を水工計画上の問題に適用する場合には、まず変数を正規化する必要があるが、これには第5章で述べたような方法によって正規化すればよい。すなわち $\log(x+b)$ または $\xi = [\log(x+b)/(x_0+b)] [1/\log(a+b)]$ などの形で正規化された変数を利用するとよい。

また母相関係数 ρ は直接的にはわからないはずであるが、通常正規化された2変数についての標本相関係数 r を求め、これを ρ の推定値として使用する。

つきにこうした理論を実際問題へ適用する場合の方式例として、石原・長尾⁴⁷⁾ が合流河川の計画高水流量、洪水調節の問題について示した研究成果を概述しよう。

7.4.1. 合流河川の計画高水流量の評価

(a) 一般的考察 2本の支川が合流して1本の本川を形成し、かつ各支川および本川に沿う堤内地がそれぞれ防災対象地区である場合を考える。支川1および2を流下する高水流量をそれぞれ Q_1, Q_2 、かつ合流時差の

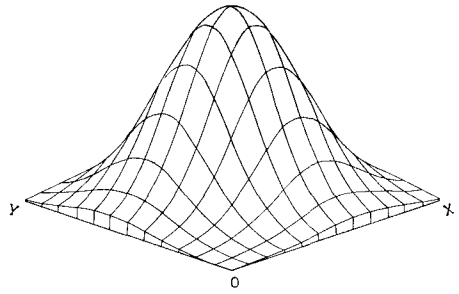


図-7.1. 2変数の正規分布

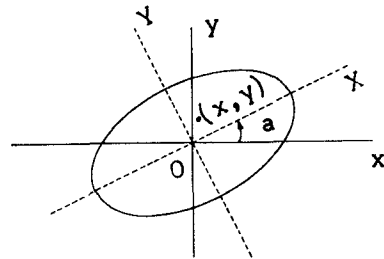


図-7.2. 確率長円

表-7.1. 主な P_0 に対する C の値

P_0	C
0.1	0.45905
2	0.66525
3	0.84460
4	1.01077
5	1.17742
6	1.35374
7	1.55176
8	1.79413
9	2.14597

$$Q = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + a_3 \quad (7.23)$$

Q_{10} , Q_{20} および Q_0 が実際の計画ではどのように定められるべきかは問題であるが、ある地区を防護している堤防のみが越流し、他の地区が安全である場合の被害の期待値が、それぞれの地区に対して等しいような方法がよいとすれば、それは各地区の damage potential のようなものを $\alpha_1, \alpha_2, \alpha$ としたときの次式を満足し、

いま Q として淀川枚方地点, Q_1 として木津川加茂地点, Q_2 として桂川羽東師地点の大正元年より昭和 36 年までの年最大洪水量をとると, これらの間にはほぼ

が成立し，岩井法によって Q_1, Q_2 を規準正規化すると

図-7.5. 淀川流域における洪水生起確率

そして x_1 と x_2 の相関係数 r は $r = -0.11$ であったので相関係数の検定の結果 $\rho = 0$ として計算を進めた。

次に各河川の計画高水流量は上記の地点で

$$Q_0 = 8,650 \text{ m}^3/\text{sec}, \quad Q_{10} = 5,900 \text{ m}^3/\text{sec}, \quad Q_{20} = 2,850 \text{ m}^3/\text{sec} \quad (7.27)$$

であるので、これらの数値にもとづいて、各領域における洪水生起の確率を確率密度曲面下の体積として計算し、図-7.5を得た。これによると高山ダムの完成していない現状では、水系のどこかで計画高水流量を越えるような洪水の発生確率は11.4%，木津川または桂川単独ではそれぞれ3.9%，3.2%，本川では0.1%となっている。

7.4.2. 洪水調節池の調節効果

(a) 一般的考察 洪水調節池の効果を評価するには、i) 調節池からの放流量と残流域からの合流量が下流の計画高水流量を上廻るおそれがないか、ii) peak 流量が比較的小さくとも継続時間の長い洪水があるが、このときでも所期の洪水調節が不可能になるおそれがないかの2点より考察する必要がある。前者は主として貯水池容量と調節方式に、後者は貯水池に流入する洪水の規模と調節方式によって規定される。

いま調節方式を洪水の流入量がある基準量 Q_0 からは調節率 p で調節し、流入量が peak 流量 Q_p に達した後は $(1-p)Q_p$ の一定放流をする方式と仮定する。このような方式をとった場合の洪水の規模を、図-7.6のように $Q' = Q_p - Q_0$ と Q_0 以上の流入量の継続時間 T で表現できるものとする、そのような洪水の確率密度関数 f は

$$f = f(Q', T) \quad (7.28)$$

また調節率 p で洪水調節を行なった場合の下流の peak 流量 Q_a および貯水池の最大貯水量 V_f は

$$Q_a = Q_a(p; Q', T) \quad (7.29)$$

$$V_f = V_f(p; Q', T) \quad (7.30)$$

で表わされ、これらの関係は図-7.7のようになる。

いま調節率が一定値 $p = p_1$ としたとき、図-7.7における $Q_a(p_1; Q', T) = \text{const.} \equiv Q_{ac}$, $V_f(p_1; Q', T) = \text{const.} \equiv V_{fc}$ をそれぞれ下流部の計画高水流量および貯水池の最大有効貯水量(調節容量)と考えると、図-7.7の実際的な意味は次のようである。

領域Iは調節後の下流部の peak 流量 Q_a がその地点の計画高水流量 Q_{ac} 以下、かつ貯水池に貯留される水量 V_f が有効貯水容量 V_{fc} 以下、すなわち放流洪水および調節時の貯水量の両面からみて安全であるような流入洪水に対応する。また領域IIは $Q_a < Q_{ac}$ であるが $V_f > V_{fc}$ 、領域IIIは $V_f < V_{fc}$ であるが $Q_a > Q_{ac}$ 、領域IVは $V_f > V_{fc}$, $Q_a > Q_{ac}$ となつていずれも危険な流入洪水に対応する。各領域に対応する流入洪水の生起確率はそれぞれの領域内の確率密度曲面下の体積を計算することによって評価できる。

図-7.8は調節率 p を変化させた場合の各領域の変化状況を図示したものである。同図において曲線 L は、調節率 p を変化させたときの、 $Q_a = \text{const.}$, $V_f = \text{const.}$ の交点の軌跡を示し、これより上部の領域ではいかに p を変えても調節不可能な領域、下部の領域では p を変えることによって調節可能な領域を意味する。

discharge

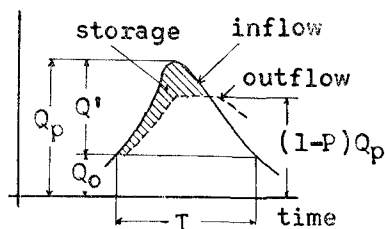


図-7.6. 洪水調節の方式

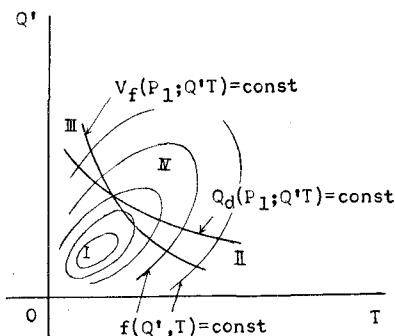


図-7.7. 洪水調節の効果 ($p = p_1$)

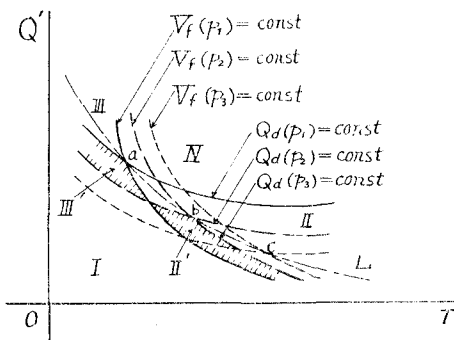


図-7.8. 洪水調節の効果 (p を変化した場合)

洪水予報が正確に行ないうようになれば、適宜 p を選択することによって最良の操作が可能であり、常に所定の p で押えようとするならば、種々の p に対してどこかで不都合の生じるような確率を最小にするような p を選択すればよいことになる。

(b) 高山ダムへの適用 石原・長尾は上述のような考え方を木津川水系名張川筋に建設中の高山ダムに適用を試みた。その概要は次のようである。洪水資料はダム地点より 4 km 上流の月ヶ瀬測水所の昭和 24 年以降のものをを用い、 Q_0 として指定水位に対応する 330 m³/sec を採用した。このときの Q' 、 T の値を規準正規化すると

$$x_1 = \frac{\log(T+30)-1.663}{0.0583}, \quad x_2 = \frac{\log(Q'+234)-3.058}{0.294} \quad (7.31)$$

ここに Q は m³/sec、 T は hr の単位である。またこのときの $r=0.69$ 、これを ρ とみなして式(7.10)を作ると

$$f(Q', T) = 0.580 \exp \{-0.955(x_1^2 - 1.38x_1x_2 + x_2^2)\} \quad (7.32)$$

次に月ヶ瀬流量 Q_1 と残流域流量 Q_2 の間には相関が強く $Q_2 = 0.76 Q_1$ とみなされ、種々検討の結果、結局下流郡木津川(大河原)計画高水流量 Q_{ac} が次のように表わしうることを知った。

$$\begin{aligned} Q_{ac} &= 4540 \\ &= (1.76 - p)(Q' + 330) \end{aligned} \quad (7.33)$$

また貯水池に貯留される水量は種々の試行の結果

$$\begin{aligned} V_{fe} &= \alpha(Q'T)^\beta \\ &= 3.54 \times 10^7 \text{ (m}^3\text{)} \end{aligned} \quad (7.34)$$

これらの結果を用いて高山ダムによる洪水調節の確率評価を行ない、下流大河原において洪水被害を起こす確率が最小になるよう調節率 p を試算したところ、 $p=0.4$ またそのときの確率 5.2 % を得た。これらの結果が図-7.9 である。

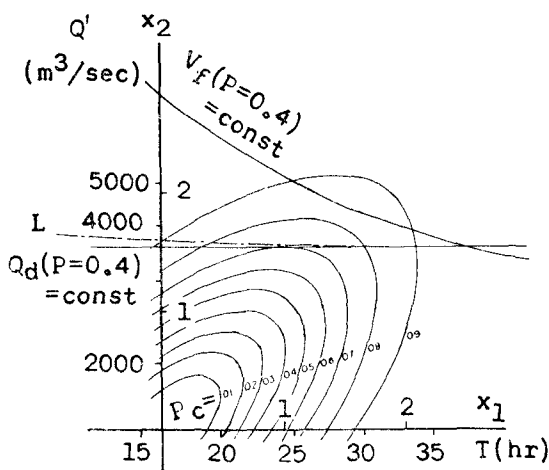


図-7.9. 高山ダムへの適用例

第8章 降 雨 曲 線

8.1. 概 説

降雨曲線とは雨量強度または雨量と降雨時間の関係を表わすもので、本来 peak 流出量を推定するため、rational formula などと組み合わせて、おもに都市の下水計画などに利用されてきたものである。これは本質的に 1 降雨の雨量強度ないし雨量と時間の関係を扱ったものではないはずであるが、水工計画に際したとえば日雨量の時間配分などにも準用されることがあるようである。

さて降雨曲線は本質的には、これを統計的に扱う限り 2 変数の問題であるが、これまでの研究は理論的にも実用的にもなお十分なものではなく、問題を今後に残している。しかしここではこれまでの一応の成果を概略的に述べるつもりである。

8.2. 降雨強度曲線

8.2.1. 降雨強度曲線

降雨強度 i (mm/hr) と継続時間 t (min) の関係を表わす式としては、これまでも数多くのものが提示されている。このこと自体降雨の複雑性と研究のあいまいさを意味しているといえよう。次に代表的と思われるものを示す。

$$i = \frac{a}{t+b} \quad (\text{Talbot 型}) \quad (8.1)$$

$$i = -\frac{a}{t^n} \quad (\text{Sherman 型}) \quad (8.2)$$

$$i = \frac{a}{\sqrt{t}+b} \quad (\text{久野型}) \quad (8.3)$$

$$i = \frac{a}{(t+b)^n} T^m \quad (\text{Fair 型}) \quad (8.4)$$

ここに a, b, n, m は常数であり, T は return period である。

Talbot 型は Talbot (1891)³³⁾ によって提示されたものといわれ, 取り扱いが簡単なのでかなり利用されているが, 石黒⁴⁸⁾によるとわが国でこの式がよく適合するのは雷雨多発地帯であって, その他は Sherman 型または久野型がよく適合するようである。Sherman 型は Sherman³³⁾ (1905) により提示されたものといわれ, $n=0.4 \sim 0.6 \div 0.5$ としてよく使われる。久野型は久野⁴⁹⁾ (1927) により提示されたもので, その後石黒⁴⁸⁾によるとわが国の大部分の地域に平均偏差 5% ぐらいでよく適合するとのことである。

当初この種のものは, 既往第 1 ~ 5 位などの値を基準にして定められたようであるが, Sherman, Bernard, Felber, 石原・岩井などによって統計的概念の導入が強調されて以来, 現今 T 年確率降雨曲線などという表現がなされている。Fair⁵⁰⁾ (1954) の式はこれを具体的に表わした形をとっているが, 実用上は T 年確率の概念さえ明確にさえておれば適合度のよい簡便な形式の方が望まれる。

なお上述各式の適用限界は $t \leq 120$ (min) とされている。

3.2.2. 降雨強度曲線の推定

実際のデータを基に上掲の式(の常数)を推定するには, t を指定変数とした最小自乗法的方法によればよいはずであるが, 実際に多くの t についての i を整理し, 計算するのは大変である。これについて石黒⁵¹⁾は次の特性係数法を提案している。

いま T 年確率降雨強度 i_T を次のように表わす。

$$i_T = \beta_T R_T \quad (8.5)$$

ここに β_T は T 年確率特性係数, R_T は T 年確率 1 時間雨量(強度)である。

β_T は採用する式型によって異なるが, いま i_T^t を T 年確率の t 分強度, $\beta_T^t = i_T^t / R_T$ すなわち t 分強度と 1 時間強度の比とすると, β_T は次のように表わすことができる。

a) Talbot 型の場合

$$\left. \begin{aligned} \beta_T &= a'/(t+b) \\ a' &= b+60 \\ b &= (60 - \beta_T^t t)/(\beta_T^t - 1) \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

b) Sherman 型の場合

$$\left. \begin{aligned} \beta_T &= a'/t^n \\ a' &= 60^n \\ n &= \log \beta_T^t / (\log 60 - \log t) \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

c) 久野型の場合

$$\left. \begin{aligned} \beta_T &= a'/(\sqrt{t} + b) \\ a' &= \sqrt{60} + b \\ b &= (\sqrt{60} - \beta_T^t \sqrt{t}) / (\beta_T^t - 1) \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

一般に 10 分雨量, 1 時間雨量の年最大値が気象年報, 月報などの公報に記載されているので, t の値として 10 分をとれば上述各常数は簡単に決定できる。またこれらについての確率計算は第 1 篇で述べた方法によって行なえばよい。

なおどの式型がよいかを判定するには多くのデータ (t について) を必要とするが, 推定された各形式のうち,

$\Sigma(i_r - \hat{i}_r)^2$ の最小になるものを選べばよいであろう。ここに $\hat{i}_r$ は上述の方法による推定値である。

8.3. 雨量配分

水工計画に際した例えば確率日雨量の時間配分を考えねばならないことがしばしばある。この方法については現在のところ定説はないが、ここでは t 時間雨量の最大値を求める 2, 3 の方法を示すつもりである。

8.3.1. Sherman 型の式

$$\left. \begin{aligned} R_t &= R_{24} \left(\frac{t}{24} \right)^k \\ i_t &= \frac{R_{24}}{24} \left(\frac{24}{t} \right)^n \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

ここに R_t は 24 時間雨量 R_{24} のうちの t 時間最大雨量、 i_t は同強度 (mm/hr) であって、指数 $k=1-n$ は通常 $k=1/2 \sim 1/3 \div 1/2$ であるが、むろん雨の特性によって異なり、一概にいえるものではない。これらは式 (8.2) の拡張形式である。

8.3.2. 伊藤の方法

伊藤⁵²⁾は昭和 13 年の全国的豪雨の分布を調査整理しているが、後年誰かによってこれが R_t/R_{24} の形で整理された。その結果によるとその大半のものは図-8.1 の A, B 両曲線の間に含まれるので、実用上曲線 A を採用してよいのではないかとわれている。

8.3.3. 石原・角屋の方法⁵³⁾

雨量の時間的分布は本質的には降雨の力学的関係によって定まるはずであるが、現在のところ明確ではない。これを統計的に扱うには当然 2 変数の理論が準用されなければならないが、さしあたり短時間雨量相互の表われ

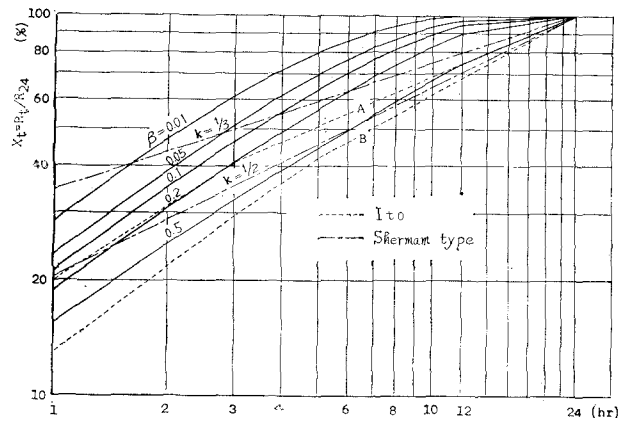


図-8.1. R_t/R_{24} の値

かたの相関が小さいと仮定される場合の R_t/R_T の関係が石原・角屋によって調べられた。ここでその思考過程の概略を紹介しておく。

(a) 厳密的な考え方 いま T 時間雨量 R_T は t 時間雨量 R_t の $n = T/t$ 個の合成量であって $R_t/R_T = x$ は R_T の値に無関係に n の値に応じた確率素分をもつものと仮定し x の最大値の x_1 分布を考えると、問題は

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= 1 \\ \max(x_2, x_3, \cdots, x_n) &\leq x_1 \\ x_1, x_2, \cdots, x_n; &\text{independent} \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

1) $x_1 \geq 1/2$ の場合: $n \geq 2$ である限り x_1 は常に最大値のはずである。いま $(n-1)$ 次元空間で x のとりうる容積を $V_{n-1}(x)$ などと書くことにすると、

$$V_{n-1}(x) = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 dx_2 dx_3 \cdots dx_n = \frac{1}{(n-1)!}$$

一方 $V_{n-2}(x_1)$ を考えるため

$$x_2 + x_3 + \cdots + x_n \leq 1 - x_1$$

であることを考慮して $x_2' = x_2/(1-x_1)$, $x_3' = x_3/(1-x_1)$, $\cdots$ などの変換を考えると各 x_i' はそれぞれ $0 \sim 1$ の変域をとることになる。したがって

$$V_{n-2}(x_1) = \int_0^{1-x_1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 dx_2 dx_3 \cdots dx_{n-1} = (1-x_1)^{n-2} V_{n-2}(x) = \frac{(1-x_1)^{n-2}}{(n-2)!}$$

したがって最大値 x_1 が x_1, x_1+dx_1 の範囲にある確率は次のようになる。

$$p(x_1)dx_1 = n \frac{V_{n-2}(x_1)}{V_{n-1}(x)} dx_1 = n(n-1)(1-x_1)^{n-2}dx_1 \quad (8.11)$$

2) $x_1 \leq 1/2$ の場合: この場合の $(n-2)$ 次元空間の容積を式(8.11)と区別するため $U_{n-2}(x_1)$ などと書くと式(8.11)に対応して

$$p(x_1)dx_1 = n \frac{U_{n-2}(x_1)}{V_{n-1}(x)} \quad (8.12)$$

と表わされるが、式(8.10)は $x_2' = x_2/(1-x_1)$, $x_3' = x_3/(1-x_1)$, …… なる変換を行なうと

$$\left. \begin{aligned} x_2' + x_3' + \dots + x_n' &= 1 \\ \max(x_2', x_3', \dots, x_n') &\leq \frac{x_1}{1-x_1} \end{aligned} \right\} \quad (8.10)'$$

さてこのような $(n-2)$ 次元空間で式(8.10)' が満足されるような確率を $p'(x)$ と書くと

$$\begin{aligned} p'(x) &= \frac{U_{n-2}(x_1)}{(1-x_1)^{n-2}V_{n-2}(x)} \\ p(x_1)dx_1 &= n \frac{V_{n-2}(x)}{V_{n-1}(x)} (1-x_1)^{n-2} \cdot p'(x)dx_1 = n(n-1)(1-x_1)^{n-2} \cdot p'(x)dx_1 \end{aligned} \quad (8.13)$$

2-i) $1 \geq \frac{x_1}{1-x_1} \geq \frac{1}{2}$ すなわち $\frac{1}{2} \geq x_1 \geq \frac{1}{3}$ の場合; $(n-2)$ 次元空間における容積比 $p'(x)$ は図-8.2のような model を参照して

$$p'(x) = 1 - (n-1) \left(1 - \frac{x_1}{1-x_1}\right)^{n-2}$$

となるから式(8.13)は

$$p(x_1)dx_1 = n(n-1) \left\{ (1-x_1)^{n-2} - (n-1) \left(1 - 2x_1\right)^{n-2} \right\} dx_1 \quad (8.14)$$

2-ii) $\frac{x_1}{1-x_1} < \frac{1}{2}$ すなわち $x_1 < \frac{1}{3}$ の場合; この場合も前同様にできるはずであるが、 $n > 4$ のときは空間の次元が原次元と変わることがあるので、一般的にこれを求めることがむずかしい。また $n = 4$ のときは2次元の平面を考えればよいので簡単に求まる。すなわち図-8.3を参照して

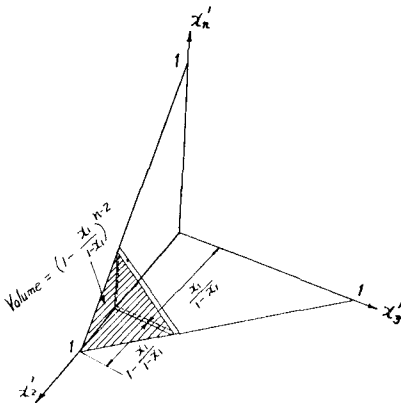


図-8.2. $(n-2)$ 次元空間の容積比説明図

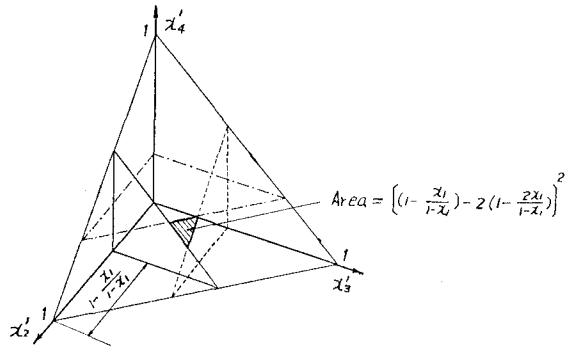


図-8.3. 2次元面積比説明図

$$\begin{aligned} p'(x) &= \left\{ \left(1 - \frac{x_1}{1-x_1}\right) - 2 \left(1 - \frac{2x_1}{1-x_1}\right) \right\}^2 = \frac{1}{(1-x_1)^2} (4x_1 - 1)^2 \\ p(x_1)dx_1 &= 12(4x_1 - 1)^2 \end{aligned} \quad (8.15)$$

以上の結果を総括すると

$$\begin{array}{ll}
n=2, & 1 \geq x_1 \geq 1/2; \quad p(x_1)dx_1 = 2dx_1 \\
n=3 & 1 \geq x_1 \geq 1/2; \quad = 6(1-x_1)dx_1 \\
& 1/2 \geq x_1 \geq 1/3; \quad = 6(3x_1-1)dx_1 \\
n=4 & 1 \geq x_1 \geq 1/2; \quad = 12(1-x_1)^2dx_1 \\
& 1/2 \geq x_1 \geq 1/3; \quad = 12\{(1-x_1)^2-3(1-2x_1)^2\}dx_1 \\
& 1/3 \geq x_1 \geq 1/4; \quad = 12(4x_1-1)^2dx_1 \\
n>4 & 1 \geq x_1 \geq 1/2; \quad = n(n-1)(1-x_1)^{n-2}dx_1 \\
& 1/2 \geq x_1 \geq 1/3; \quad = n(n-1)\{(1-x_1)^{n-2}-(n-1)(1-2x_1)^{n-2}\}dx_1
\end{array} \quad (8.16)$$

以上によって $n \leq 4$ の場合については厳密解が得られたことになるから、たとえば R_{24} を分割するとき $t=6$ 時間までの最大雨量の確率が評価できることになる。しかし實際上最も問題になる $t < 6$ 時間雨量がこれではわからないので、いまして実用的な考え方をしてみよう。

(b) 実用的な考え方 前項では短時間雨量最大値の確率分布として分割成分最大値の分布を考えたが、ここでは分割成分そのものの分布を考えてみる。前項同様 $R_t/R_T = x$ とし、 $R/R=1$ を n 分割したときの $(n-1)$ 箇の分点をそれぞれ $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ とする。

$$\begin{array}{l}
0 \leq z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_{n-1} \leq 1 \\
z_1 = x_1, \quad z_2 = x_1 + x_2, \quad \dots \quad z_{n-1} = 1 - x_n
\end{array} \quad (8.17)$$

そうすると z_1 が z_1, z_1+dz_1, z_2 が $z_2, z_2+dz_2, \dots$ の間にある確率は a priori には dz_i であるから、これらの同時分布は

$$p(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) dz_1 dz_2 \dots dz_{n-1} = (n-1)! dz_1 dz_2 \dots dz_{n-1}$$

ところで

$$\frac{\partial(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} = 1$$

であるから、各成分 $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ の同時分布は

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} = (n-1)! dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \quad (8.18)$$

したがって x_1 単独の分布は次式で与えられる。

$$\begin{array}{l}
f(x_1) dx_1 = \int_0^{1-x_1-x_2-\dots} \int \int \int_0^{1-x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \\
= (n-1)(1-x_1)^{n-2} dx_1 \\
F(x_1) = \int_0^{x_1} f(x_1) dx_1 = 1 - (1-x_1)^{n-1}
\end{array} \quad (8.19)$$

さて T 時間雨量 R_T が与えられた場合、この n 箇の成分 R_t を推定するには

$$1 - F(x_i) = i/n, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad \dots (8.20)$$

を満足するような x_i を見い出せば $R_t = R x_i \sim R x_{i+1}$ の間のある値が1箇というようにして T/n 時間雨量の各成分が得られることになる。しかしこれはあくまで理念的な考え方であり、とくに最大値の決定や各成分の組み合わせの問題が残ってしまう。

そこで n の値を変えて

$$1 - F(x'_t) = 1/n \quad \dots (8.21)$$

を満足する x'_t を見い出せば各 $t=T/n$ について常に最大値を含む雨量配分がわかる。

以上が雨量配分に関する1つの基本的な考え方であるが、上式を満足するような x'_t が常に存在するとは限らず、一般には $x_t \geq x'_t$ となる $R_t = R_T x_t$ が存在する。したがって実際には $t=T/n$ 時間最大雨量比 $x_t = R_t/R_T$ というものは式(8.21)を満足する x'_t を実用上の下限値とみなし、 $x'_t \sim 1$ の範囲を適宜採択する方法が考えられる。すなわち

$$Pr(x_t \geq x_{t\beta}) \leq \beta \quad \dots (8.22)$$

となるような片側危険率 β を適当に指定すると、 t 時間最大雨量 $R_{t\beta}$ は次式より求められる。

$$\left. \begin{aligned} (1-x_{t\beta})^{n-1} &= \beta/n, \quad n=T/t \\ R_{t\beta} &= R_T x_{t\beta} \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

図-8.1に $T=24$ 時間としたときの $R_{t\beta}/R_{24}$ の値が $\beta=0.5\sim 0.01$ について示してある。これよりすると、これまで過大値を与えるといわれていた Sherman 型配分式の $k=1/3$ のときの値は、 $t=1$ 時間では実に $\beta=0.01$ 以下であり、 $t=3$ 時間で $\beta=0.05$ に相応している。 $k=1/2$ のときの値は $t=1$ 時間で $\beta=0.15$ 、 $t=6$ 時間で $\beta=0.5$ 、となっている。また $\beta=0.5$ の線は伊藤の実用範囲のほぼ中央を通っている。

さてこのような配分法が可能であるとすれば β はどの程度の値をとるべきであろうか。これについての明示はできないが、これら $x_{t\beta}$ の分布に mode が存在すれば、たとえば 100 年確率 24 時間雨量を時間配分するのにこの値を用いれば本質的に確率年の変化のないであろうことが予想されるが、この $x_{t\beta}$ 分布には mode が存在しない。したがってこれにかわるものとしては近似的に $\beta=0.5$ が採用されてよいのではないかとしている。

むろん β のとり方をも含めて、このような考え方自体に問題が残されているが、こうした問題を理論的に考えようとした 1 つの試みといえることができよう。

8. 3. 4. その他の方法

高橋は降雨時間 t (時間) に期待される雨量 R_t (mm) を表わす式として次式を示している。

$$R_t = R_1 \frac{1.31t}{1 + 0.31t} \quad \dots\dots (8.24)$$

ここに R_1 は 1 時間最大雨量である。

また今山は築後川流域における雨量と時間の関係を調べ、降雨時間が t 分であるときの最大雨量 R (mm) が次のようになったことを報告している。

$$\left. \begin{aligned} \text{北小国} \quad R &= 8.1 t^{0.58} \\ \text{日 田} \quad &= 12.9 t^{0.46} \end{aligned} \right\} \quad (8.25)$$

このほか式 (8.25) や (8.9) の形で R_t と R_T 関係を調べたものは非常に多いが、いずれも t^α の指数 α が 0.5 に近いようである。

参 考 文 献

- 1) 東京工大統計工学会編；統計工学ハンドブック，昭 28 pp. 215～219.
- 2) 角屋 睦；水文量の plotting position について，京大防災研年報 3 号，昭 34.
- 3) H.A. Thomas; Frequency of Minor Floods, J.B.S.C.E., Vol. 25, 1948.
- 4) 小川潤次郎；ある Order Statistic の問題について，統計数理研究所講究録，Vol. 3-13, 14, 1947. ただし 5) による。
- 5) 鈴木栄一；河川の流量資料の統計的取扱について，電力気象連絡会集報 Vol. 5, 1955.
- 6) A. Hazen; Flood Flow, 1930.
- 7) I. I. Gringorten; A Plotting Rule for Extreme Probability Paper. Jour. Geo. Res. Vol. 68, 1963.
- 8) たとえば平田森三；物理現象における統計的現象(Ⅱ)，応用統計学，昭 24.
- 9) 角屋 睦；雨量分布とその年最大値の分布。京大防災研年報 4 号，昭 36.
- 10) 角屋 睦；農業水利計画における水文量の統計的方法に関する研究，京都大学昭 35.
- 11) 小林康江，石部幽香子；雨量の度数の分布について，気象と統計，vol. 8. 昭 33.
- 12) 角屋 睦；指数型分布と確率旱天口数，農業土木学会 昭 36 大会講演集，昭 36.
- 13) R.A. Fisher and L.H.C. Tippett; Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample, Proc. Cam. Phi. Soc., Vol. 24. 1928.
- 14) たとえば，E.J. Gumbel; Statistics of Extremes, 1958, 河田龍夫ほか監訳：極値統計学，昭 38.
- 15) E.J. Gumbel; The Return Period of Flood Flows, Ann. Math. Stat., Vol. 12, 1941.
- 16) E.J. Gumbel; Floods Estimated by Probability Method, ENR, Vol. 134, 1945.
- 17) E.J. Gumbel; The Statistical Forecast of Floods, Ohio W.R.B. Bull 15, 1949.
- 18) R.W. Powell; A Simple Method of Estimating Flood Frequencies, C.E. Vol. 13, 1943.

- 19) 角屋 睦; 極値分布とその一解法, 農土研 Vol. 23, 昭 31.
- 20) 角屋 睦; 極値(最大値)分布の一実用解, 農土研別冊 3 号 昭 37.
- 21) E.J. Gumbel; Statistical Theory of Droughts, Proc. A.S.C.E., Vol. 80, 1954.
- 22) E.J. Gumbel; Simplified Plotting of Statistical Observation, Trans. A.G.U., Vol. 26, 1945.
- 23) J. Lieblein; On the Exact Evaluation of the Variance and Covariance of the Order Statistics in Samples from Extreme Value Distribution, Ann. Math. Stat., Vol. 24, 1953.
- 24) J. Lieblein; New Method of Analyzing Extreme Value Data, N.A.C.A. T.N. 3053, 1954.
- 25) B.F. Kimball; Sufficient Statistical Estimation Functions for the Parameters of the Distribution of Maximum Values, Ann. Math. Stat., Vol. 17, 1946.
- 26) B.F. Kimball; An Approximation to the Sampling Variance of an Estimated Maximum Value of Given Frequency Based on Fit of Doubly Exponential Distribution of Maximum Values. Ann. Math. Stat., Vol. 18, 1947.
- 27) H.C.S. Thom; Frequency of Maximum Wind Speeds. Proc. A.S.C.E., Vol. 80, 1954.
- 28) V.T. Chow; The Log-probability Law and its Engineering Applications. Proc. A.S.C.E., Vol. 80, 1955.
- 29) A.F. Jenkinson; The Frequency Distribution of the Annual Maximum (or Minimum) Values of Meteorological Elements. Quart. Jour. Roy. Meteor. Soc., Vol. 81, 1955.
- 30) 角屋 睦; 異常(確率)水文量とデータの棄却検定. 農土研別冊 3 号 昭 37.
- 31) 小河原正己訳; ウィルクス数理統計学, 昭 27, p.246.
- 32) 角屋 睦; 計画洪水量に関する順序統計学的考察. 農土研 Vol. 21 昭 29.
- 33) 石原藤次郎・岩井重久; 降雨曲線の決定に関する一統計的方法, 建設工学 昭 22.
- 34) 岩井重久; 水文学における非対称分布に就いて, 土木学会論文集 1~2号 昭 22.
- 35) T.T. Slade; An Asymmetrical Probability Function, Trans. A.S.C.E., Vol. 62, 1936.
- 36) 岩井重久; 確率洪水推定法とその本邦河川への適用, 統計数理研究 2~3 昭 24.
- 37) 石原藤次郎・岩井重久・川本正身; 流況曲線の統計的推定法, 土木研究 1 昭 23.
- 38) 岩井重久・川本正身; 流況より見た本邦河川の特性について 1.2 建設工学, Vol. 2,3. 昭 24.
- 39) S. Iwai; Discussion of "The Log-probability Law and its Engineering Applications" by V.T. Chow, Proc. A.S.C.E., Vol. 81, 1955.
- 40) 角屋 睦; 対数正規分布の適用範囲, 定数について, 農土研別冊 3 号 昭 37.
- 41) 岩井重久; Slade 型分布の非対称性の吟味及その 2, 3 の新解法, 土木学会論文集 4 号, 昭 24.
- 42) 石原藤次郎・高瀬信忠; 対数正規分布とその積率による解法, 土木学会論文集 47 号, 昭 32.
- 43) 高瀬信忠; 対数正規分布に関する順序統計学的考察, 土木学会論文集 47 号. 昭 32.
- 44) 角屋 睦; 計画降雨量に関する順序統計学的考察, 農土研 Vol. 22. 昭 30.
- 45) M. Ogawara and Collaborators; Stochastic Limits for Maximum Possible Amount of Precipitation, Met. Geo., Vol. 5, 1954.
- 46) 川畑幸夫編; 水文気象学. 昭 36. p.118.
- 47) 石原安雄, 長尾正志; 計画高水流量の 2 変数確率論的研究, 京大防災研年報 6 号, 昭 38.
- 48) 石黒政儀; 本邦における降雨強度式型的地域的特性について, 水道協会雑誌 313 号, 昭 35.
- 49) 久野重一郎; 降雨の新法則について, 土木学会誌. Vol. 13. 昭 2.
- 50) G. M. Fair and J. C. Geyer; Water Supply and Waste Water Disposal, 1954, p.168.
- 51) 石黒政儀; 特性係数法による確率降雨強度式の算定法について, 土木学会論文集 74 号, 昭 36.
- 52) 伊藤 剛; 昭和 13 年の豪雨記録より導きたる雨量強度式について, 内務省土試報告 53 号, 昭 15.
- 53) 石原安雄, 角屋睦; 雨量配分に関する確率論的研究, 第 5 回水理研究会講演集, 昭 35.
- 54) 文献 46) pp.34-35.

付表-1 $y \rightarrow F = \exp(-e^{-y})$ の表

y	F	diff	y	F	diff	y	F	diff
-2.50	0.000005		-2.00	0.000618	44	-1.50	0.011314	498
-2.49	6	1	-1.99	665	47	-1.49	1830	516
8	7	1	8	715	50	8	2364	534
7	7	0	7	769	54	7	2917	553
6	8	1	6	826	57	6	3488	571
-2.45	9	1	-1.95	0.000886	60	-1.45	4078	590
4	0.000011	2	4	950	64	4	4688	610
3	12	1	3	0.001018	68	3	5318	630
2	13	1	2	091	73	2	5969	651
1	15	2	1	167	76	1	6640	671
-2.40	0.000016	1	-1.90	0.001248	81	-1.40	0.017332	692
-2.39	18	2	-1.89	334	86	-1.39	8046	714
8	20	2	8	425	91	8	8781	735
7	23	3	7	521	96	7	9539	758
6	25	2	6	623	102	6	0.020319	780
-2.35	28	3	-1.85	0.001730	107	-1.35	1122	803
4	31	3	4	843	113	4	1949	827
3	34	3	3	962	119	3	2799	850
2	38	4	2	0.002087	125	2	3673	874
1	42	4	1	220	133	1	4571	898
-2.30	0.000047	5	-1.80	0.002359	139	-1.30	0.025494	923
-2.29	52	5	-1.79	2505	146	-1.29	6442	948
8	57	5	8	2659	154	8	7416	974
7	63	6	7	2821	162	7	8415	999
6	69	6	6	2990	169	6	9439	1024
-2.25	76	7	-1.75	3168	178	-1.25	0.030490	1051
4	83	7	4	3355	187	4	1568	1078
3	91	8	3	3551	176	3	2672	1104
2	0.000100	9	2	3756	205	2	3804	1132
1	110	10	1	3970	214	1	4962	1158
-2.20	0.000120	10	-1.70	0.004195	225	-1.20	0.036149	1187
-2.19	132	12	-1.69	4429	234	-1.19	7363	1214
8	144	12	8	4675	246	8	8605	1242
7	157	13	7	4931	256	7	9876	1271
6	172	15	6	5199	268	6	0.041175	1299
-2.15	187	15	-1.65	5478	279	-1.15	2502	1327
4	204	17	4	5770	292	4	3859	1357
3	222	18	3	6073	303	3	5245	1386
2	241	19	2	6390	317	2	6661	1416
1	262	21	1	6719	329	1	8106	1445
-2.10	0.000254	22	-1.60	7062	343	-1.10	9580	1474
-2.09	308	24	-1.59	7419	357	-1.09	0.051084	1504
8	334	26	8	7790	371	8	2619	1535
7	361	27	7	8175	385	7	4183	1564
6	391	30	6	8576	401	6	5778	1595
-2.05	423	32	-1.55	8992	416	-1.05	7403	1625
4	457	34	4	9423	431	4	9059	1656
3	494	37	3	9871	448	3	0.060745	1686
2	533	39	2	0.010335	464	2	2462	1717
1	574	41	1	0816	481	1	4210	1748

y	F	diff	y	F	diff	y	F	diff
-1.00	0.065988	1778	-0.45	0.208397	3259	0.10	0.404608	3663
-0.99	7797	1809	4	11674	3277	1	08267	3659
8	9637	1840	3	14970	3296	2	11922	3655
7	0.071508	1871	2	18283	3313	3	15574	3652
6	3410	1902	1	21614	3331	4	19221	3647
-0.95	5343	1933	-0.40	0.224962	3348	0.15	0.422863	3642
4	7306	1963	-0.39	28326	3364	6	26499	3636
3	9301	1995	8	31706	3380	7	30131	3632
2	0.081326	2025	7	35102	3396	8	33757	3626
1	3382	2056	6	38514	3412	9	37377	3620
-0.90	0.085469	2087	-0.35	0.241939	3425	0.20	0.440991	3614
-0.89	87586	2117	4	45380	3441	1	44598	3607
8	89735	2149	3	48834	3454	2	48199	3601
7	91913	2178	2	52302	3468	3	51792	3593
6	94122	2209	1	55783	3481	4	55378	3586
-0.85	96362	2240	-0.30	0.259277	3494	0.25	0.458956	3578
4	98631	2269	-0.29	62783	3506	6	62527	3571
3	0.100931	2300	8	66301	3518	7	66089	3562
2	03261	2330	7	69829	3528	8	69642	3553
1	05620	2359	6	73370	3541	9	73188	3546
-0.80	0.108009	2389	-0.25	0.276920	3550	0.30	0.476724	3536
-0.79	10428	2419	4	80481	3561	1	80250	3526
8	12875	2447	3	84051	3570	2	83768	3518
7	15352	2477	2	87631	3580	3	87276	3508
6	17858	2506	1	91219	3588	4	90775	3499
-0.75	0.120392	2534	-0.20	0.294816	3597	0.35	0.494263	3488
4	22954	2562	-0.19	98421	3605	6	97741	3478
3	25546	2592	8	0.302033	3612	7	0.501208	3467
2	28165	2619	7	05653	3620	8	04664	3456
1	30812	2647	6	09279	3626	9	08110	3446
-0.70	0.133487	2675	-0.15	0.321912	3633	0.40	0.511545	3435
-0.69	36189	2702	4	16550	3638	1	14968	3423
8	38917	2728	3	20194	3644	2	18380	3412
7	41673	2756	2	23843	3649	3	21780	3400
6	44455	2782	1	27496	3653	4	25168	3388
-0.65	0.147262	2807	-0.10	0.331154	3658	0.45	0.528544	3376
4	50096	2834	-0.09	34816	3662	6	31909	3365
3	52955	2859	8	38481	3665	7	35260	3351
2	55840	2885	7	42149	3668	8	38599	3339
1	58749	2909	6	45820	3671	9	41926	3327
-0.60	0.161683	2934	-0.05	0.349493	3673	0.50	0.545239	3313
-0.59	64641	2958	4	53168	3675	1	48540	3301
8	67623	2982	3	56845	3677	2	51827	3287
7	70628	3005	2	60522	3677	3	55101	3274
6	73657	3029	1	64201	3679	4	58362	3261
-0.55	0.176709	3052	0.00	0.367879	3678	0.55	0.561609	3247
4	79783	3074	1	71558	3679	6	64842	3233
3	82879	3096	2	75237	3679	7	68062	3220
2	85996	3117	3	78914	3677	8	71267	3205
1	89136	3140	4	82591	3677	9	74459	3192
-0.50	0.192296	3160	0.05	0.386266	3675	0.60	0.577636	3177
-0.49	95476	3180	6	89939	3673	1	80799	3163
8	98677	3201	7	93610	3671	2	83947	3148
7	0.201898	3221	8	97279	3669	3	87081	3134
6	05138	3240	9	0.400945	3666	4	90201	3120

y	F	diff	y	F	diff	y	F	diff
0.65	0.593306	3105	1.20	0.739934	2236	1.75	0.840487	1467
6	96395	3089	1	42155	2221	6	41942	1455
7	99470	3075	2	44360	2205	7	43384	1442
8	0.602530	3060	3	46550	2190	8	44815	1431
9	05575	3045	4	48725	2175	9	46233	1418
0.70	0.608605	3030	1.25	0.750884	2159	1.80	0.847640	1407
1	11620	3015	6	53027	2143	1	49036	1396
2	14619	2999	7	55156	2129	2	50419	1383
3	17603	2984	8	57269	2113	3	51792	1373
4	20572	2969	9	59367	2099	4	53152	1360
0.75	0.623525	2953	1.30	0.761449	2082	1.85	0.854501	1349
6	26463	2938	1	63517	2068	6	55839	1338
7	29384	2921	2	65570	2053	7	57166	1327
8	32291	2907	3	67607	2037	8	58482	1316
9	35181	2890	4	69630	2023	9	59786	1304
0.80	0.638056	2875	1.35	0.771638	2008	1.90	0.861079	1293
1	40915	2859	6	73631	1993	1	62361	1282
2	43759	2844	7	75609	1978	2	63633	1272
3	46586	2827	8	77572	1963	3	64894	1261
4	49397	2811	9	79521	1949	4	66144	1250
0.85	0.652193	2796	1.40	0.781456	1935	1.95	0.867384	1240
6	54972	2779	1	83375	1919	6	68612	1228
7	57737	2765	2	85281	1906	7	69831	1219
8	60484	2747	3	87172	1891	8	71038	1207
9	63215	2731	4	89048	1876	9	72236	1198
0.90	0.665931	2716	1.45	0.790911	1863	2.00	0.879207	1187
1	68630	2699	6	92759	1848	1	80334	1127
2	71314	2684	7	94593	1834	2	81451	1117
3	73981	2667	8	96413	1820	3	82559	1108
4	76632	2651	9	98219	1806	4	83656	1097
0.95	0.679267	2635	1.50	0.800011	1792	2.05	0.879207	1088
6	81886	2619	1	01789	1778	6	80334	1127
7	84489	2603	2	03553	1764	7	81451	1117
8	87076	2587	3	05304	1751	8	82559	1108
9	89646	2570	4	07041	1737	9	83656	1097
1.00	0.692201	2555	1.55	0.808764	1723	2.10	0.884744	1088
1	94739	2538	6	10474	1710	1	85823	1079
2	97261	2522	7	12170	1696	2	86892	1069
3	99768	2507	8	13853	1683	3	87952	1060
4	0.702258	2490	9	15523	1670	4	89003	1051
1.05	0.704732	2474	1.60	0.817180	1657	2.15	0.890044	1041
6	07190	2458	1	18823	1643	6	91076	1032
7	09632	2442	2	20453	1630	7	92099	1023
8	12058	2426	3	22070	1617	8	93113	1014
9	14468	2410	4	23674	1604	9	94119	1006
1.10	0.716863	2395	1.65	0.825266	1592	2.20	0.895115	996
1	19241	2378	6	26844	1578	1	96102	987
2	21603	2362	7	28410	1566	2	97081	979
3	23950	2347	8	29963	1553	3	98051	970
4	26281	2331	9	31504	1541	4	99013	962
1.15	0.728595	2314	1.70	0.833032	1528	2.25	0.899965	952
6	30895	2300	1	34547	1515	6	0.900910	945
7	33178	2283	2	36051	1504	7	01845	935
8	35446	2268	3	37542	1491	8	02773	928
9	37698	2252	4	39020	1478	9	03692	919

y	F	diff	y	F	diff	y	F	diff
2.30	0.904603	911	2.85	0.943797	548	3.40	0.967178	325
1	05506	903	6	44340	543	1	67499	321
2	06401	895	7	44879	539	2	67817	318
3	07288	887	8	45412	533	3	68132	315
4	08166	878	9	45940	528	4	68444	312
2.35	0.909037	871	2.90	0.946463	523	3.45	0.968753	309
6	09900	863	1	46982	519	6	69059	306
7	10755	855	2	47495	513	7	69362	303
8	11603	848	3	48004	509	8	69662	300
9	12443	840	4	48507	503	9	69960	298
2.40	0.913275	832	2.95	0.949006	499	3.50	0.970254	294
1	14100	825	6	49501	494	1	70546	292
2	14917	817	7	49991	490	2	70834	288
3	15727	810	8	50476	485	3	71120	286
4	16530	803	9	50956	480	4	71404	284
2.45	0.917325	795	3.00	0.951432	476	3.55	0.971684	280
6	18113	788	1	51904	472	6	71762	278
7	18894	781	2	52370	466	7	72237	275
8	19667	773	3	52833	463	8	72509	272
9	20434	767	4	53291	457	9	72779	270
2.50	0.921194	760	3.05	0.953745	454	3.60	0.973046	267
1	21946	752	6	54194	449	1	3311	265
2	22692	746	7	54640	446	2	3573	262
3	23431	739	8	55081	441	3	3832	259
4	24163	732	9	55518	437	4	4089	257
2.55	0.924889	726	3.10	0.955950	432	3.65	0.974344	255
6	25608	719	1	56379	429	6	4596	252
7	26320	712	2	56804	425	7	4845	249
8	27026	706	3	57224	420	8	5092	247
9	27725	699	4	57640	416	9	5337	245
2.60	0.928418	693	3.15	0.958053	413	3.70	0.975580	243
1	29104	686	6	58462	409	1	5820	240
2	29784	680	7	58866	404	2	6057	237
3	30458	674	8	59267	401	3	6293	236
4	31125	667	9	59664	397	4	6526	233
2.65	0.931787	662	3.20	0.960057	393	3.75	0.976757	231
6	32442	655	1	60447	390	6	6985	228
7	33091	649	2	60832	385	7	7212	277
8	33735	644	3	61215	383	8	7436	224
9	34372	637	4	61593	378	9	7658	222
2.70	0.935003	631	3.25	0.961968	375	3.80	0.977878	220
1	35629	626	6	62339	371	1	8096	218
2	36248	622	7	62707	368	2	8311	215
3	36862	614	8	63071	364	3	8524	213
4	37470	608	9	63432	361	4	8736	212
2.75	0.938073	603	3.30	0.963789	357	3.85	0.978945	211
6	38670	597	1	64142	353	6	9153	208
7	39261	591	2	64493	351	7	9358	205
8	39847	586	3	64840	347	8	9561	203
9	40427	580	4	65184	344	9	9762	201
2.80	0.941002	575	3.35	0.965524	340	3.90	0.979962	200
1	41572	570	6	65861	337	1	0.980159	197
2	42136	564	7	66195	334	2	0354	195
3	42695	559	8	66526	331	3	0548	194
4	43249	554	9	66853	327	4	0740	192

y	F	diff	y	F	diff	y	F	diff
3.95	0.980930	190	4.50	0.988953	111	5.05	0.993611	64
6	1118	188	1	9062	109	6	3675	64
7	1304	186	2	9170	108	7	3737	62
8	1488	184	3	9277	107	8	3799	62
9	1670	182	4	9383	106	9	3861	62
4.00	0.981851	181	4.55	0.989488	105	5.10	0.993922	61
1	2030	179	6	9593	105	1	3982	60
2	2207	177	7	9696	103	2	4042	60
3	2383	176	8	9798	102	3	4101	59
4	2556	173	9	9899	101	4	4159	58
4.05	0.982729	172	4.60	0.989998	99	5.15	0.994217	58
6	2899	170	1	0.990097	99	6	4275	58
7	3068	169	2	0196	99	7	4332	57
8	3235	167	3	0293	97	8	4388	56
9	3400	165	4	0389	96	9	4443	55
4.10	0.983564	164	4.65	0.990484	95	5.20	0.994499	56
1	3726	162	6	0578	94	1	4553	54
2	3887	161	7	0672	94	2	4607	54
3	4046	159	8	0764	92	3	4661	54
4	4203	157	9	0855	91	4	4714	53
4.15	0.984359	156	4.70	0.990946	91	5.25	0.994766	52
6	4514	155	1	1036	90	6	4818	52
7	4667	153	2	1125	89	7	4870	52
8	4818	151	3	1212	87	8	4920	50
9	4968	150	4	1300	88	9	4971	51
4.20	0.985116	148	4.75	0.991386	86	5.30	0.995021	50
1	5263	147	6	1471	85	1	5070	49
2	5409	146	7	1555	84	2	5119	49
3	5553	144	8	1639	84	3	5168	49
4	5696	143	9	1722	83	4	5216	48
4.25	0.985837	141	4.80	0.991804	82	5.35	0.995263	47
6	5977	140	1	1885	81	6	5310	47
7	6116	139	2	1965	80	7	5357	47
8	6253	137	3	2045	80	8	5403	46
9	6388	135	4	2124	79	9	5449	46
4.30	0.986523	135	4.85	0.992202	78	5.40	0.995494	45
1	6656	133	6	2280	78	1	5538	44
2	6788	132	7	2356	76	2	5583	45
3	6919	131	8	2432	76	3	5627	44
4	7048	129	9	2507	75	4	5670	43
4.35	0.987176	128	4.90	0.992581	74	5.45	0.995713	43
6	7303	127	1	2655	74	6	5756	43
7	7428	125	2	2727	72	7	5798	42
8	7553	125	3	2800	73	8	5839	41
9	7676	123	4	2871	71	9	5881	42
4.40	0.987798	122	4.95	0.992942	71	5.5	0.995922	41
1	7918	120	6	3012	70	6	6309	187
2	8038	120	7	3081	69	7	6660	351
3	8156	118	8	3150	69	8	6977	317
4	8273	117	9	3217	67	9	7264	287
4.45	0.988390	117	5.00	0.993285	68	6.0	0.997524	260
6	8504	114	1	3351	66	1	7760	236
7	8618	114	2	3417	66	2	7973	213
8	8731	113	3	3483	66	3	8165	192
9	8842	111	4	3547	64	4	8340	175

y	F	diff	y	F	diff	y	F	diff
6.5	0.998498	158	8.0	0.999665	35	9.5	0.999925	7
6	8641	143	1	9697	32	6	932	7
7	8770	129	2	9725	28	7	939	7
8	8887	117	3	9752	27	8	945	6
9	8993	106	4	9775	23	9	950	5
7.0	0.999089	96	8.5	0.999797	22	10.0	0.999955	5
1	9175	86	6	9816	19			
2	9254	79	7	9834	18	11.0	0.999983	
3	9325	71	8	9849	15			
4	9389	64	9	9864	15	12.0	0.999994	
7.5	0.999447	58	9.0	0.999877	13			
6	9500	53	1	888	11			
7	9547	47	2	899	11			
8	9591	44	3	909	10			
9	9630	38	4	918	9			