

開水路流れの基礎理論

緒 言

水工技術者が対象とする水理学の各分野のなかで、開水路流れに関する水理学はきわめて重要な位置にある。これは、問題を土木工学における水理学に限ってみても、河川、かんがい、発電水力、上下水道などの水工学では自由表面をもった流れの力学的挙動を取り扱うことが多いからである。

もともと、水理学は造船工学、機械工学などの学問とも密接な関連をもち、しかも経験的に与えられた簡単な事実より出発し、その経験要素から複雑な現象を説明しようとして発達したいわば実用的な学問と考えられてきた。したがって、経験事実の範囲内においては正しい解釈が与えられても、それを一度越えれば、考え方の妥当性はきわめて薄弱となることもある。一方、18世紀に至り、水などの流体のもつ力学的性質を仮定して簡単な自然法則より出発し、流体モデルの挙動から流れの挙動を応用数学を利用して純解析的に研究する古典流体力学が主として数学者の手によって展開されてきた。このような数学的解析は、その主眼が論理的な構成におかれているから、現実の事象が正しい仮定のもとに解析される間は普遍性をもつ理論が進められるが、現実と一致しない近似のもとでは事実と全く異なる解釈が与えられることもある。

以上に述べた実用的な解析手段としての古典水理学と、数学的遊戯に終始しがちな古典流体力学との差異を調整し、水に関する自然法則をなるべく統一的な手段によって解釈しようとする新しい動きが前世紀後半より芽生えてきた。すなわち、古典流体力学の矛盾を越えてできた近代流体力学における理論の展開には、必らず経験的事実と密接な関係をもたせ、一方、水理学における実験結果の処理には、多様な経験のうちから現象の根底にある自然法則を見い出し、これと理論との関係をあくまでも追求する近代水理学が展開されてきた。こうして、流体力学と水理学との間にある間隙が次第に埋められ、理論と実験とが融合一致した実用的価値のある学問となり、今日における各種水工技術の基本的体系を形成するようになった。

開水路流れに関する水理学発展の歴史的過程も全く同様である。古く15世紀、Leonardo da Vinciに端を発したといわれる開水路流れの解析も19世紀に至ってようやく科学としての基礎を具えるようになった。しかし、その実用問題との関連から、基礎科学における新しい研究成果がたえず、しかもただちに開水路流れの水理解析法にとり入れられているとはいえないのが実情である。したがって、ここでは開水路流れの水理解析法の基礎理論を流体運動に関する諸種の理論を用い、できるだけ体系化した形において展開しよう。

すなわち、第1篇においては、水などの流体に関する運動の基礎理論を示すとともに、その開水路流れに関する水理解析法への適用を図り、第2篇では水工学における各種の機能設計上最も重要である開水路の定常流理論の基礎を説明する。また第3篇ではその非定常理論の数学的解析法のうち、とくに特性曲線による解析法の基本を示し、われわれが取り扱う水工技術の基礎理論としての開水路流れの数学的解析法の意義を明らかにしよう。

第1篇 流体運動の基礎理論

第1章 流体運動に関する基本的概念

A. 連続体としての流体運動

1. 流体の連続性

流体とは、たとえその大きさがいかに小さくても、せん断応力の作用をうける間に変形しつづける等方性物質と定義される。明らかに、流体は液体と気体とを含み、この両者の間には密度、圧縮性など各種の物理的性質が大きく異なっても、流体運動を支配する法則が等しく適用される。

もちろん、すべての物質のように、流体もそれぞれ分子構造をもち、その規模においては不連続である。しかし、普通の流体運動の研究では分子構造は特別の興味をひかず、むしろ多くの分子を含む流体の塊を考え、その統計的に平均した性格で取り扱うのが便利である。この場合、分子構造の詳細は不必要となり、巨視的にみて適当な連続体としてのモデルが想定され、実際の流体の挙動を再現するものとなる。こうした連続体としての性格を説明する最小の大きさの流体塊を流体素分という。

連続体としての性格は密度、速度、応力、粘性、温度、圧縮性などであり、いずれも空間および時間の関数として表示される。すなわち、われわれの取り扱う流体の力学では、スカラー、ベクトル、テンソルの場を対象とする。

2. 流れの場における速度の表示

一般力学におけるように、流れの場における速度も流体素分の位置の時間的変化量と定義される。ところが、流体運動の最大の特徴は連続的な変形にあるから、速度そのものの記述は、弾性体などに較べて、本質的なものとなる。

以上の定義を数学的に表示すると、流体素分の位置ベクトルを $\mathbf{x}$ 、速度ベクトルを $\mathbf{u}$ として、

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} \quad (1)$$

である。これは時間に関する速度の表示であるが、時には空間座標を用いた面素分による速度の表示も用いられ、水理計測法においてしばしば利用される。

(1) 直角座標系における速度の成分 われわれが解析をすすめる上で最もしばしば用いる座標系は直角座標系である。この座標系では、流体素分の位置を x, y, z とすると、各座標軸方向の速度成分 u, v, w は周知のように

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt} \quad (2)$$

と表わされる。また合速度の大きさ q は

$$q = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (3)$$

である。

(2) 直交曲線座標系における速度の成分 曲った水路の流れ、円柱のまわりの流れなどの問題では、直角座標系以外のものが使われる。こうした座標系の一般的表示として直交曲線座標系がある。これは任意の3つの面がその交点 (x_1, x_2, x_3) において互いに直交するものである。直角座標系では、流体素分の力学的挙動を解析するに当って、それぞれ dx, dy, dz の線素分をもつ微小六面体を考えるが、直交曲線座標系では、それぞれ $h_1 dx_1, h_2 dx_2, h_3 dx_3$ の線素分をもつ六面体を考える。ここに、 h_1, h_2, h_3 は x_1, x_2, x_3 の関数である。

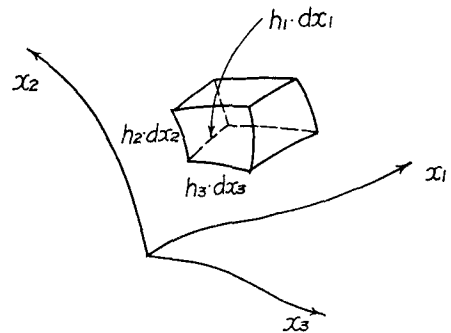


図-1 直交曲線座標系における体積素分

この座標系における速度成分は、それぞれ

$$u_1 = h_1 \frac{dx_1}{dt}, \quad u_2 = h_2 \frac{dx_2}{dt}, \quad u_3 = h_3 \frac{dx_3}{dt} \quad (4)$$

で与えられる。

3. 質量保存則としての連続方程式

流体力学における連続方程式は、質量保存の原理を基本として、数学的に微分形式を用いて表現したものである。すなわち、流体中にある閉曲面 S で囲まれた容積 V の流体塊を考えると、この塊に出入する質量差はこの塊そのものの質量変化量に等しいという原理を数学的に表現したものに外ならない。

ところが、水のような非圧縮性流体では密度は一定と考えられるから、質量保存は容積保存ということで表わされる。

(1) 直角座標系における連続方程式 いま、考えている流体塊の表面において外向きに立てた単位法線ベクトルを ν 、このベクトルのもつ方向余法を $\cos(x, \nu)$, $\cos(y, \nu)$, $\cos(z, \nu)$ とすると、単位時間にこの流体塊より流出する量は 0 である。すなわち、

$$\left\{ u \cos(x, \nu) + v \cos(y, \nu) + w \cos(z, \nu) \right\} dS = 0 \quad (5)$$

この式は流体力学的連続方程式であるが、つぎに示す面積素分および体積素分

$$\begin{aligned} \cos(x, \nu) dS &= dS_x = dydz, \\ \cos(y, \nu) dS &= dS_y = dzdx, \\ \cos(z, \nu) dS &= dS_z = dxdy, \\ dV &= dxdydz \end{aligned} \quad (6)$$

を用いて、Green-Gauss の定理より (5) 式を体積積分に変換すると、

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\} dV = 0$$

ところが、流体塊の容積 V は任意であるから、結局連続方程式として周知の

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

がえられる。

(2) 直交曲線座標系における連続方程式 全く同様に、容積保存の原理より

$$\left\{ u_1 \cos(x_1, \nu) + u_2 \cos(x_2, \nu) + u_3 \cos(x_3, \nu) \right\} dS = 0 \quad (8)$$

また、面積素分および体積素分はそれぞれ

$$\begin{aligned} \cos(x_1, \nu) dS &= dS_{x_1} = h_2 h_3 dx_2 dx_3, \\ \cos(x_2, \nu) dS &= dS_{x_2} = h_3 h_1 dx_3 dx_1, \\ \cos(x_3, \nu) dS &= dS_{x_3} = h_1 h_2 dx_1 dx_2, \\ dV &= h_1 h_2 h_3 dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (9)$$

であるから、(8)式に Green-Gauss の定理を用いて、

$$\left\{ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 u_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 u_3) \right\} \right\} dV = 0$$

すなわち、流体力学的連続方程式は

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 u_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 u_3) \right\} = 0 \quad (10)$$

である。

B. 流体運動に関する運動学

1. 微小アフィン変換と流体運動におけるひずみと回転の成分の時間的割合

(1) 微小アフィン変換 ある点にあるベクトル量 $\mathbf{A}$ が何らかの力の作用を受けてもとの点の近傍の新しい

点に移動したとき、 $\mathbf{A}$ は新しい量 $\mathbf{A}'$ に変化する。このとき、 $\mathbf{A}'$ はもとの量の一次関数として定義され、二次以上の高次の項が無視されると、この変換過程は微小アフィン変換といわれる。すなわち、 $\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}_i$ 、 $\mathbf{A}' = A'_i \mathbf{e}_i$ 、とすると、

$$\left. \begin{aligned} A'_1 &= (1 + \alpha_{11})A_1 + \alpha_{12}A_2 + \alpha_{13}A_3, \\ A'_2 &= \alpha_{21}A_1 + (1 + \alpha_{22})A_2 + \alpha_{23}A_3, \\ A'_3 &= \alpha_{31}A_1 + \alpha_{32}A_2 + (1 + \alpha_{33})A_3 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

あるいは、

$$A'_i = (\delta_{ij} + \alpha_{ij})A_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (12)$$

である。ここに、 δ_{ij} は Kronecker delta である。したがって、微小アフィン変換は

$$\delta A_i = A'_i - A_i = \alpha_{ij}A_j \quad (13)$$

と表わされる。

つぎに、(13)式による微小アフィン変換式を2つの変換成分に分けると、

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) + \frac{1}{2}(\alpha_{ij} - \alpha_{ji})$$

であるから、

$$\delta A_i = \alpha_{ij}A_j = \left\{ \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) + \frac{1}{2}(\alpha_{ij} - \alpha_{ji}) \right\} A_j \quad (14)$$

となる。ここに、 $(\alpha_{ij} + \alpha_{ji})/2$ はひずみテンソルの成分といわれ、また $(\alpha_{ij} - \alpha_{ji})/2$ は回転の成分であって剛体運動を表わす条件よりもとめられる。

(2) 流体運動におけるひずみと回転の成分の時間的割合 以上の結果を流体運動に関する速度ベクトル $\mathbf{u}$ に適用すると、直角座標系に対して、

$$\delta \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z, \dots\dots\dots$$

ところが、 δx 、 δy 、 δz はそれぞれ $u\delta t$ 、 $v\delta t$ 、 $w\delta t$ であるから、

$$\left. \begin{aligned} \delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} \delta t \cdot u + \frac{\partial u}{\partial y} \delta t \cdot v + \frac{\partial u}{\partial z} \delta t \cdot w, \\ \delta v &= \frac{\partial v}{\partial x} \delta t \cdot u + \frac{\partial v}{\partial y} \delta t \cdot v + \frac{\partial v}{\partial z} \delta t \cdot w, \\ \delta w &= \frac{\partial w}{\partial x} \delta t \cdot u + \frac{\partial w}{\partial y} \delta t \cdot v + \frac{\partial w}{\partial z} \delta t \cdot w \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

と書くことができる。すなわち、速度ベクトルに対して前項の表示を用いると、

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta t$$

であるから、流体運動におけるひずみテンソルおよび回転の成分の時間的割合は、それぞれ

$$e_{ij} = e_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (16)$$

および

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (17)$$

となる。

(3) ひずみおよび回転の成分の幾何学的意義

(16)式によって表わされるひずみ成分のうち、 $i \neq j$ の場合には微小アフィン変換式(14)によって伸びを表わすことがわかる。

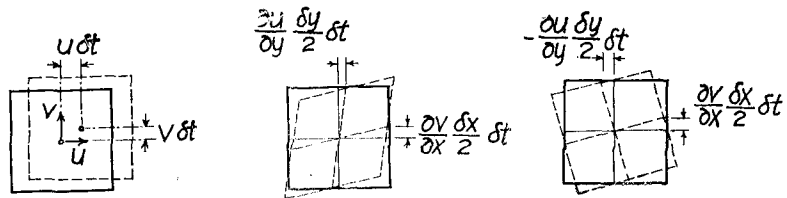


図-2 ひずみおよび回転の成分の意義

また一方, $i \neq j$ の場合には, たとえば2座標軸方向のベクトルのスカラー積を考えると, 微小アフィン変換によって二次元的に取り扱われ, 角変形量の半分を示すことが最終的にえられる。

(17)式によって示される回転の成分は渦度の成分であり, 角回転量を示すことが同様にえられる。

(4) 直角座標系におけるひずみおよび回転の成分の表示 以上に示したひずみおよび回転の成分は, 直角座標系において通常つぎのような記号で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= a = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = b = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{zz} = c = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ e_{yz} &= e_{zy} = \frac{f}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad e_{zx} = e_{xz} = \frac{g}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ e_{xy} &= e_{yx} = \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \omega_x &= \omega_{yz} = -\omega_{zy} = \frac{\xi}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \omega_{zx} = -\omega_{xz} = \frac{\eta}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \omega_z &= \omega_{yx} = -\omega_{xy} = \frac{\zeta}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

(5) 直交曲線座標系におけるひずみと回転の成分の時間的割合 直交曲線座標系におけるひずみと回転の成分の時間的割合は, 直交曲線座標における1点でこれらの各軸に切して x_i の増加する方向に直角座標系を考え, この両座標系の交換過程を取り扱えばよい。このためには, 両座標系間の方向余弦に関する関係式が必要となるが, これらは Wright¹⁾ が示している。

ここでは結果のみを示すとつぎのようである。

$$\left. \begin{aligned} e_{x_1 x_1} &= \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} \right), \quad e_{x_2 x_2} = \frac{1}{h_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \right), \\ e_{x_3 x_3} &= \frac{1}{h_3} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \right), \\ e_{x_2 x_3} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u_3}{h_3} \right) + \frac{h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{u_2}{h_2} \right) \right\}, \quad e_{x_3 x_1} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{h_1}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{u_1}{h_1} \right) + \frac{h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_3}{h_3} \right) \right\}, \\ e_{x_1 x_2} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_2}{h_2} \right) + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u_1}{h_1} \right) \right\}, \\ \omega_{x_1} &= \frac{1}{2h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 u_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} (h_2 u_2) \right\}, \quad \omega_{x_2} = \frac{1}{2h_3 h_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 u_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} (h_3 u_3) \right\}, \\ \omega_{x_3} &= \frac{1}{2h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 u_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 u_1) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

2. 流れの場における加速度の表示

速度ベクトルの時間的変化は加速度ベクトルとなる。すなわち, 加速度 $\mathbf{a}$ は

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du_n}{dt} \end{pmatrix} \quad (20)$$

である。

(1) 直角座標系における加速度の成分 連続体としての流体の速度は場所および時間の関数であり, その変化は

$$\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \delta t + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta x_j$$

両辺を $\delta t (\neq 0)$ でわり, $\delta t \rightarrow 0$ という極限操作を行なうと,

$$a_i = \frac{du_i}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta u_i}{\delta t} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (21)$$

となり, 加速度の成分がえられる。

すなわち,

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ a_y &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ a_z &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

である。

一方, (21)式は

$$a_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_j^2}{2} \right) + u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (23)$$

と変形される。ここに u_j^2 は合速度, $(\partial u_i / \partial x_j - \partial u_j / \partial x_i)$ は渦度の成分の2倍であるから, (23)式は加速度成分を合速度と渦度の成分とを用いて表わしたものとなる。したがって,

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + 2(w\omega_y - v\omega_z) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right), \\ a_y &= \frac{\partial v}{\partial t} + 2(u\omega_z - w\omega_x) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right), \\ a_z &= \frac{\partial w}{\partial t} + 2(v\omega_x - u\omega_y) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

と書くことができる。

(2) 直交曲線座標系における加速度の成分 (23)式はベクトル式として表示され, この場合には直交曲線座標系でもそのまま適用される。したがって, 直交曲線座標系においては, 加速度成分は

$$\left. \begin{aligned} a_{x1} &= \frac{\partial u_1}{\partial t} + 2(u_3\omega_{x2} - u_2\omega_{x3}) + \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}{2} \right), \\ a_{x2} &= \frac{\partial u_2}{\partial t} + 2(u_1\omega_{x3} - u_3\omega_{x1}) + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}{2} \right), \\ a_{x3} &= \frac{\partial u_3}{\partial t} + 2(u_2\omega_{x1} - u_1\omega_{x2}) + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

である。

あるいは, 速度成分のみで表わすと,

$$\left. \begin{aligned} a_{x1} &= \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{u_1 u_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{u_3 u_1}{h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} \\ &\quad - \frac{u_2 u_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{u_3 u_3}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1}, \\ a_{x2} &= \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{u_2 u_3}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} + \frac{u_1 u_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \\ &\quad - \frac{u_3 u_3}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} - \frac{u_1 u_1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2}, \\ a_{x3} &= \frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{u_3 u_1}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} + \frac{u_2 u_3}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \\ &\quad - \frac{u_1 u_1}{h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \frac{u_2 u_2}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

となる。

C. 流体運動に関する力学

1. 流体素分に作用する力

流体素分に作用する力は物体力と表面力との2つがある。すなわち, 物体力とは考えている容積 $4V$ の流体素分の質量に比例する力をいい, その代表例として重力がある。一方, 表面力は流体素分の表面に作用するもので流体内にある物体に作用する力がその例である。

(1) 物体力の成分 重力の場合のように、ある関数 Ω の各座標軸方向のこう配の値に負の符号をつけるとき、その座標軸方向の単位質量当りの物体力の成分が表わされる。この関数 Ω をポテンシャルという。直角座標系では、この成分は

$$F_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} \quad (27)$$

と表わされ、また直交曲線座標系では、同様に、

$$F_{x_1} = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial \Omega}{\partial x_1}, \quad F_{x_2} = -\frac{1}{h_2} \frac{\partial \Omega}{\partial x_2}, \quad F_{x_3} = -\frac{1}{h_3} \frac{\partial \Omega}{\partial x_3} \quad (28)$$

である。

(2) 応力テンソル 流体内のある面積素分 ΔS に作用する力 $\mathbf{T} \Delta S$

に関し、極限值 $\lim (\mathbf{T} \Delta S / \Delta S)$ を $\mathbf{T}$ と表わし、応力ベクトルという。応力ベクトルの作用点 P において考えた座標軸上にそれぞれ A, B, C 点をとると、図-3に示すような四面体がえられる。面 PBC 、面 PCA 、面 PAB にもそれぞれ応力が働らき、これらを $\mathbf{T}$ と表わす。明らかに、 $\mathbf{T} = \mathbf{e}_j \tau_{ij}$ であって、ここに τ_{ij} は応力テンソルといわれ、Cauchy が導入したものである。

上に述べた9個の応力テンソルのうち、 $i=j$ のとき応力成分は垂直応力のそれとなり、また $i \neq j$ のときにはせん断応力の成分を表わす。 τ_{ij} と τ_{ji} とが同じであることは微小六面体の各軸まわりの回転運動の極限条件から証明され、9個の応力テンソルは3個の垂直応力成分と3個のせん断応力成分とから成り立つことがわかる。

一方、図-3に示す点 P に作用する応力ベクトルの成分と応力テンソルとの関係は、この四面体に作用する物体力をも考慮に入れた釣り合いの極限条件より

$$\mathbf{T}_i = \tau_{ji} \cos(x_j, \nu) \quad (29)$$

となることがわかる。

垂直応力成分は流体そのものの状態によるものと、流体の運動による変形の結果として生ずるものとにわけられるから (Stokes)、一般に直角座標系では

$$\tau_{11} = \sigma_x' = -p + \sigma_x, \quad \tau_{22} = \sigma_y' = -p + \sigma_y, \quad \tau_{33} = \sigma_z' = -p + \sigma_z \quad (30)$$

また同様にせん断応力は

$$\tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{23} = \tau_{32} = \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{31} = \tau_{13} = \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (31)$$

と表わされる。

直交曲線座標系においても同様の表示が用いられることは明らかであろう。

2. 流体運動の力学的方程式

流体力学における運動方程式は Newton の運動に関する第二法則を、連続体としての流体の特質を考慮して記述したもの以外にない。

(1) 直角座標系における運動方程式 いま、流体内にある体積素分 ΔV のものを考えると、それを囲む面積素分を ΔS とすれば、 x_i 軸方向の運動方程式は

$$\int \rho a_i dV = \int \rho F_i dV + \int \mathbf{T}_i dS \quad (i = x, y, z) \quad (32)$$

である。ここに、 a_i , F_i , $\mathbf{T}_i$ はそれぞれ加速度、単位質量当りの物体力、表面力の x_i 軸方向の成分である。

ところが、 $\mathbf{T}_i$ に関して (29)式を用い、 $\tau_{ji,k} = (\partial \tau_{ji} / \partial x_k)$ と書いて Green-Gauss の定理を用いると、

$$\int \mathbf{T}_i dS = \int \tau_{ji} \cos(x_j, \nu) dS = \int \tau_{ji,j} dV$$

である。したがって、(32)式は

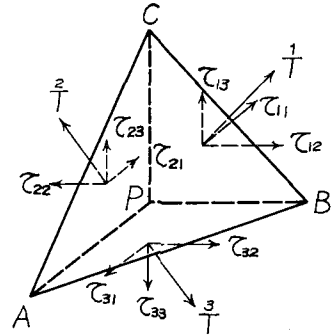


図-3

$$\int \rho a_i dV = \int \rho F_i dV + \int \tau_{ji,j} dV \quad (33)$$

となる。ところが、積分領域は任意であり、かつ連続性を考慮すると、積分記号は除かれる。すなわち、

$$a_i = F_i + \frac{1}{\rho} \tau_{ji,j} \quad (34)$$

あるいは、詳細に示すと、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right), \quad (35)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right), \quad (36)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \quad (37)$$

である。

(2) 直交曲線座標系における運動方程式 直交曲線座標系における運動方程式を求めるためには、**B-1**-(5)で行なったような両座標系の変換を考えなければならない。この場合、とくに問題となるのは応力であって、以下に説明を加えよう。

例として、 x 軸方向のものを考えると、明らかに、

$$\begin{aligned} \overset{\nu}{T}_x &= \sigma_x' \cos(x, \nu) + \tau_{yx} \cos(y, \nu) + \tau_{zx} \cos(z, \nu) \\ &= \tau_{xx1} \cos(x_1, \nu) + \tau_{xx2} \cos(x_2, \nu) + \tau_{xx3} \cos(x_3, \nu) \end{aligned} \quad (38)$$

また一方、

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx1} &= \sigma_{x1}' \cos(x_1, x) + \tau_{x2x1} \cos(x_2, x) + \tau_{x3x1} \cos(x_3, x), \\ \tau_{xx2} &= \tau_{x1x2} \cos(x_1, x) + \sigma_{x2}' \cos(x_2, x) + \tau_{x3x2} \cos(x_3, x), \\ \tau_{xx3} &= \tau_{x1x3} \cos(x_1, x) + \tau_{x2x3} \cos(x_2, x) + \sigma_{x3}' \cos(x_3, x) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

であるから、(39)式を(38)式に代入して表面積分を行なうと、

$$\begin{aligned} \int \overset{\nu}{T}_x dS &= \int \left\{ \sigma_{x1}' \cos(x_1, x) + \tau_{x2x1} \cos(x_2, x) + \tau_{x3x1} \cos(x_3, x) \right\} \cos(x_1, \nu) dS + \\ &\int \left\{ \tau_{x1x2} \cos(x_1, x) + \sigma_{x2}' \cos(x_2, x) + \tau_{x3x2} \cos(x_3, x) \right\} \cos(x_2, \nu) dS + \int \left\{ \tau_{x1x3} \cos(x_1, x) + \tau_{x2x3} \cos(x_2, x) + \sigma_{x3}' \cos(x_3, x) \right\} \cos(x_3, \nu) dS \\ &= \int \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left[h_2 h_3 \left\{ \sigma_{x1}' \cos(x_1, x) + \tau_{x2x1} \cos(x_2, x) + \tau_{x3x1} \cos(x_3, x) \right\} \right] + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \left[h_3 h_1 \left\{ \tau_{x1x2} \cos(x_1, x) + \sigma_{x2}' \cos(x_2, x) + \tau_{x3x2} \cos(x_3, x) \right\} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[h_1 h_2 \left\{ \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \tau_{x1x3} \cos(x_1, x) + \tau_{x2x3} \cos(x_2, x) + \sigma_{x3}' \cos(x_3, x) \right\} \right] \left. \right] dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

この計算に当って、Wright の順還式を用いると、極限においては、 $\cos(x_1, x) = 1$, $\cos(x_2, x) = \cos(x_3, x) = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \int \overset{\nu}{T}_x dS &= \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 \sigma_{x1}') + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 \tau_{x1x2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 \tau_{x1x3}) + h_3 \tau_{x2x1} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \right. \\ &\quad \left. + h_2 \tau_{x3x1} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} - h_3 \sigma_{x2}' \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - h_2 \sigma_{x3}' \frac{\partial h_3}{\partial x_1} \right\} dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (40)$$

となる。

体積積分は $h_1 h_2 h_3 dx_1 dx_2 dx_3$ であり、 $\sigma_{xi}' = -p + \sigma_{xi}$ ($i=1,2,3$) を考えると、(32)式より x_1 軸方向の運動方程式は

$$\begin{aligned} a_{x1} &= F_{x1} - \frac{1}{\rho h_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 \sigma_{x1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 \tau_{x1x2}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 \tau_{x1x3}) \right\} + \frac{\tau_{x1x2}}{\rho h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{\tau_{x3x1}}{\rho h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \frac{\sigma_{x2}}{\rho h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{\sigma_{x3}}{\rho h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (41)$$

全く同様にして、 x_2 および x_3 軸方向の運動方程式もそれぞれつぎのように表わされる。

$$a_{x_2} = F_{x_2} - \frac{1}{\rho h_2} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 \tau_{x_1 x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 \sigma_{x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 \tau_{x_2 x_3}) \right\} + \frac{\tau_{x_2 x_3}}{\rho h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} + \frac{\tau_{x_1 x_2}}{\rho h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{\sigma_{x_3}}{\rho h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} - \frac{\sigma_{x_1}}{\rho h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2}, \quad (42)$$

$$a_{x_3} = F_{x_3} - \frac{1}{\rho h_3} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{1}{\rho h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 \tau_{x_3 x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 \tau_{x_2 x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 \sigma_{x_3}) \right\} + \frac{\tau_{x_3 x_1}}{\rho h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} + \frac{\tau_{x_2 x_3}}{\rho h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} - \frac{\sigma_{x_1}}{\rho h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \frac{\sigma_{x_2}}{\rho h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} \quad (43)$$

3. 流体運動の運動量方程式

流体運動の解析には、しばしば運動量あるいはエネルギー方程式といった形が用いられることが多い。とくに開水路流れの水理解析では、未知量として水深や平均流速あるいは流量といった巨視的量が用いられるから、これらの方程式は (41)~(43) 式に代って基本式となる。また、開水路の流れは流下方向における水理量の変化がきわめて大きく、またそれが最も重要な要素であって、これに較べれば他の方向のものはむしろ二次的な影響を与えるにすぎない。したがって、ここでは流下方向におけるものについてのみ考察をすすめる。

運動量方程式の誘導は、運動方程式のどれか 1 つに密度 ρ を乗ずると、左辺は単位時間、単位容積当りの運動量変化を、また右辺はそれに対応する衝力を表わすという原理による。したがって、流体塊の容積 V について積分すれば、単位時間当りの流体塊の運動量変化と衝力との関係がえられる。

(1) 直角座標系における運動量方程式 x の増加する方向を流下方向とすると、直角座標系における x 軸方向の運動方程式(35)に密度 ρ を乗じ、流体塊の容積 V について積分すれば、運動量方程式の流下方向に関する成分がえられる。すなわち、

$$\int \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV + \int \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dV = \int \rho F_x dV - \int \frac{\partial p}{\partial x} dV + \int \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dV \quad (44)$$

上式の左辺第二項は連続方程式 (7) によって面積積分に変換され、また右辺第二、三項も面積積分に変えられる。したがって、運動量方程式の一般表示としてつぎの関係式がえられる。

$$\int \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV + \int \rho u \{ u \cos(x, \nu) + v \cos(y, \nu) + w \cos(z, \nu) \} dS = \int \rho F_x dV - \int p \cos(x, \nu) dS + \int \{ \sigma_x \cos(x, \nu) + \tau_{yx} \cos(y, \nu) + \tau_{zx} \cos(z, \nu) \} dS \quad (45)$$

運動量方程式は明らかに特定の座標軸に対応するもので、全運動量変化は各座標軸方向の成分のベクトル和で表わされる。また流体塊内部で互いに作用する応力は消しあい、垂直応力およびせん断応力によっておこる全衝力はいま取り扱っている流体塊の外表面に働く応力のみで表わされることも (45) 式から明らかであろう。

(2) 直交曲線座標系における運動量方程式 全く同様の方法によって直交曲線座標系におけるものがえられるが、流下方向を x_1 軸の増加する方向にとれば、(41) 式より最終的に

$$\int \rho \frac{\partial u_1}{\partial t} dV + \int \rho u_1 \{ u_1 \cos(x_1, \nu) + u_2 \cos(x_2, \nu) + u_3 \cos(x_3, \nu) \} dS = \int \rho F_{x_1} dV + \int \{ (\sigma_{x_1} - p) \cos(x_1, \nu) + \tau_{x_1 x_2} \cos(x_2, \nu) + \tau_{x_1 x_3} \cos(x_3, \nu) \} dS + \int \frac{p}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3) dV + \int \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} (\tau_{x_1 x_2} - \rho u_1 u_2) dV + \int \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} (\tau_{x_1 x_3} - \rho u_1 u_3) dV - \int \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} (\sigma_{x_2} - \rho u_2 u_2) dV - \int \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} (\sigma_{x_3} - \rho u_3 u_3) dV \quad (46)$$

がえられる。なお、 x_2, x_3 軸方向の成分についても全く同様な形の運動量方程式がえられることも明らかであろう。

4. 流体運動のエネルギー方程式

各座標軸方向の運動方程式に密度とその方向の速度の成分とを乗じ、それぞれ加え合わせると、機械的エネルギー

ギー保存の原理である単位容積当りの仕事とエネルギーとの関係がえられる。したがって、流体塊の容積 V について積分すると、求むべきエネルギー方程式がえられることになる。

(1) 直角座標系におけるエネルギー方程式 上に述べた方法を運動方程式 (35)~(37) に適用すると、 x 軸方向のものについては

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = \rho u F_x - u \frac{\partial p}{\partial x} + u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

となり、 y, z 軸方向のものも同様な表示式となる。したがって、これらを加え合せて、容積 V について積分を行なうと、

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\rho q^2}{2} \right) dV = \int \rho (u F_x + v F_y + w F_z) dV \\ & - \int \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) dV + \int \left\{ u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) + w \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \right\} dV \end{aligned} \quad (47)$$

がえられる。ところが、単位質量当りの物体力の成分 F_x, F_y, F_z に関して (27) 式を用い、ポテンシャルは時間とともに変わらないこと ($\partial \Omega / \partial t = 0$) および連続方程式 (7) より、(47) 式は

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\rho q^2}{2} + \rho \Omega \right) dV = \int \left\{ u \left(\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \right. \\ & \left. + v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) + w \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} \right) \right\} dV \end{aligned} \quad (48)$$

と変形される。これが機械的エネルギー保存を示すエネルギー方程式となる。

あるいは、Green-Gauss の定理によって、(48) 式を変形すると、

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho q^2}{2} \right) dV + \int \{ u \cos(x, \nu) + v \cos(y, \nu) + w \cos(z, \nu) \} \left(\frac{\rho q^2}{2} + \rho \Omega \right. \\ & \left. + p \right) dS = \int \{ \sigma_x u \cos(x, \nu) + \sigma_y v \cos(y, \nu) + \sigma_z w \cos(z, \nu) \} dS \\ & - \int \left(\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV + \int u \{ \tau_{xy} \cos(y, \nu) + \tau_{zx} \cos(z, \nu) \} dS \\ & + \int v \{ \tau_{yz} \cos(z, \nu) + \tau_{xy} \cos(x, \nu) \} dS + \int w \{ \tau_{zx} \cos(x, \nu) + \tau_{yz} \cos(y, \nu) \} dS \\ & - 2 \int (\tau_{xy} e_{xy} + \tau_{yz} e_{yz} + \tau_{zx} e_{zx}) dV \end{aligned} \quad (49)$$

とも表わされる。

(2) 直交曲線座標系におけるエネルギー方程式 前項と同様の方法により、 x_1 軸方向の成分について (41) 式より、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \left(\frac{\rho u_1^2}{2} \right) = \rho u_1 F_{x_1} - \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{u_1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 \sigma_{x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 \tau_{x_1 x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 \tau_{x_1 x_3}) \right\} + \frac{u_1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} (\tau_{x_1 x_2} - \rho u_1 u_2) \\ & + \frac{u_1}{h_2 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} (\tau_{x_1 x_3} - \rho u_3 u_1) - \frac{u_1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} (\sigma_{x_2} - \rho u_2 u_2) - \frac{u_1}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} (\sigma_{x_3} - \rho u_3 u_3) \end{aligned} \quad (50)$$

である。同様に、 x_2, x_3 軸方向のものもえられるから、直交曲線座標系におけるエネルギー式はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \left(\frac{\rho q^2}{2} + \rho \Omega \right) dV = \int \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \right. \right. \\ & \left. \left. h_2 h_3 u_1 (\sigma_{x_1} - p) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ h_3 h_1 u_2 (\sigma_{x_2} - p) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ h_1 h_2 u_3 (\sigma_{x_3} - p) \right\} \right\} dV \\ & - \int \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \sigma_{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 u_1) + \sigma_{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 u_2) + \sigma_{x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 u_3) \right\} dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 u_1 \tau_{x_1 x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 u_1 \tau_{x_3 x_1}) \right\} dV + \int \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 u_2 \tau_{x_2 x_3}) \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 u_2 \tau_{x_1 x_2}) \left. \right\} dV + \int \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 u_3 \tau_{x_3 x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 u_3 \tau_{x_2 x_3}) \right\} dV \\
& + \int \frac{u_1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} (\sigma_{x_1} - \sigma_{x_2}) dV + \int \frac{u_1}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} (\sigma_{x_1} - \sigma_{x_3}) dV + \int \frac{u_2}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} (\sigma_{x_2} - \sigma_{x_3}) dV \\
& + \int \frac{u_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} (\sigma_{x_2} - \sigma_{x_1}) dV + \int \frac{u_3}{h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} (\sigma_{x_3} - \sigma_{x_1}) dV + \int \frac{u_3}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} (\sigma_{x_3} - \sigma_{x_2}) dV \\
& - 2 \int (\tau_{x_1 x_2} e_{x_1 x_2} + \tau_{x_2 x_3} e_{x_2 x_3} + \tau_{x_3 x_1} e_{x_3 x_1}) dV \tag{51}
\end{aligned}$$

あるいは、(50)式と同様の形式で表わすと、つぎようになる。

$$\begin{aligned}
& \int -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho q^2}{2} \right) dV + \int \left\{ u_1 \cos(x_1, \nu) + u_2 \cos(x_2, \nu) + u_3 \cos(x_3, \nu) \right\} \left(\frac{\rho q^2}{2} + \rho \Omega + p \right) dS \\
& = \int \left\{ \sigma_{x_1} u_1 \cos(x_1, \nu) + \sigma_{x_2} u_2 \cos(x_2, \nu) + \sigma_{x_3} u_3 \cos(x_3, \nu) \right\} dS - \int \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \\
& \left\{ \sigma_{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 u_1) + \sigma_{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 u_2) + \sigma_{x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 u_3) \right\} dV + \int u_1 \left\{ \tau_{x_1 x_2} \cos \right. \\
& (x_2, \nu) + \tau_{x_3 x_1} \cos(x_3, \nu) \left. \right\} dS + \int u_2 \left\{ \tau_{x_2 x_3} \cos(x_3, \nu) + \tau_{x_1 x_2} \cos(x_1, \nu) \right\} dS \\
& + \int u_3 \left\{ \tau_{x_3 x_1} \cos(x_1, \nu) + \tau_{x_2 x_3} \cos(x_2, \nu) \right\} dS + \int \frac{u_1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} (\sigma_{x_1} - \sigma_{x_2}) dV \\
& + \int \frac{u_1}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} (\sigma_{x_1} - \sigma_{x_3}) dV + \int \frac{u_2}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} (\sigma_{x_2} - \sigma_{x_3}) dV + \int \frac{u_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} (\sigma_{x_2} \\
& - \sigma_{x_1}) dV + \int \frac{u_3}{h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} (\sigma_{x_3} - \sigma_{x_1}) dV + \int \frac{u_3}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} (\sigma_{x_3} - \sigma_{x_2}) dV - \\
& 2 \int (\tau_{x_1 x_2} e_{x_1 x_2} + \tau_{x_2 x_3} e_{x_2 x_3} + \tau_{x_3 x_1} e_{x_3 x_1}) dV \tag{52}
\end{aligned}$$

(46) および (52) 式で表わした形の流体運動に関する運動量およびエネルギー式は後に述べる開水路流れの一次元解析法の基礎となるものである。

第2章 層流と乱流に関する基本的特性

A. 層流運動の基礎

1. 粘性流体の特質

これまで流体運動の基本的概念として力学的諸関係を取り扱ったが、実際に運動方程式が解きうる形に構成されるためには、流体の変形量と応力との間の関係を知らなければならない。このことに関してわれわれがよく知っているのはいわゆる Newton の法則、すなわち、せん断ひずみに抵抗する粘性応力とせん断ひずみとは一次的に比例するというものであり、この比例常数が粘性係数 μ といわれる。

この関係の一般化を Stokes が行ない、つぎのように表わされているが、これはすべての気体や多くの液体などのニュートン流体について十分成立することが認められている。すなわち、

1. 単なる変位や回転は抵抗力を生ぜしめないが、変形は粘性応力によって抵抗される。この応力テンソルは変形ひずみテンソルの一次的な代数和によって表わされる。

2. 上に示した応力とひずみとの関係は座標系の方向と無関係に成立する。すなわち、流体は弾性的に等方性である。

3. 変形が生じないとき、応力テンソルは静水圧に帰す。

ということである。以下簡単に、Stokes の考えによる応力テンソルとひずみテンソルとの間の関係について明らかにしよう。

第1の前提は一般化した Hooke の法則²⁾といわれ、 $\tau_{11}=\tau_1$, $\tau_{22}=\tau_2$, $\tau_{33}=\tau_3$, $\tau_{23}=\tau_4$, $\tau_{31}=\tau_5$, $\tau_{12}=\tau_6$, $e_{11}=\epsilon_1$, $e_{22}=\epsilon_2$, $e_{33}=\epsilon_3$, $2e_{23}=\epsilon_4$, $2e_{31}=\epsilon_5$, $2e_{12}=\epsilon_6$, とおくとき、

$$\tau_{ij} = c_{ij} \cdot e_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (53)$$

と表わされる。ここに c_{ij} は全部で 36 個あり、弾性常数といわれる。この関係に Green によるひずみエネルギー関数を導入すると、 c_{ij} は 21 個に減る。さらに弾性的に対称な 3 つの直交面をもつ、すなわち直交異方性的性質を流体に導入すると、弾性常数は 9 個に減ることが証明される。すなわち、マトリックスによって表わすと、

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}$$

である。最後に第 2 の前提を用いると、

$$c_{44} = \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \equiv \mu, \quad c_{12} = \lambda$$

において、応力テンソルとひずみテンソルとの間には

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \vartheta + 2\mu e_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (54)$$

という関係があることがわかる。ここに、 $\vartheta = e_{ii}$, λ, μ は Lamé が初めて導入した常数で Lamé の常数といわれる。

ところが、水のような非圧縮性流体では連続方程式より $\vartheta = 0$ であるから、結局

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} \quad (55)$$

となる。

すでに述べたひずみテンソルに関する (18) 式および応力テンソルに関する (30), (31) 式より、直角座標系においてはつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x' &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, & \sigma_y' &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, & \sigma_z' &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), & \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), & \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

直交曲線座標系においても応力とひずみとの関係は (55) 式によって表わされ、これらは

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x1}' &= -p + \frac{2\mu}{h_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} \right), & \sigma_{x2}' &= -p + \frac{2\mu}{h_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \right), \\ \sigma_{x3}' &= -p + \frac{2\mu}{h_3} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \right), \\ \tau_{x2x3} &= \mu \left\{ \frac{h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u_3}{h_3} \right) + \frac{h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{u_2}{h_2} \right) \right\}, & \tau_{x3x1} &= \mu \left\{ \frac{h_1}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{u_1}{h_1} \right) + \frac{h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_3}{h_3} \right) \right\}, \\ \tau_{x1x2} &= \mu \left\{ \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_2}{h_2} \right) + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u_1}{h_1} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

である。

2. Navier-Stokes の方程式

(1) 直角座標系における Navier-Stokes の方程式 (56) 式で表わした応力とひずみとの関係を運動方程式 (35), (36) および (37) 式に代入すると、直角座標系における非圧縮性粘性流体に関する運動方程式、すなわち Navier-Stokes の方程式がえられる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (58)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (59)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (60)$$

(2) 直交曲線座標系における Navier-Stokes の方程式 全く同様にして、(57) 式を (41), (42) および (43)

式に代入して応力テンソルを消去して速度成分で表わせば、直交曲線座標系における Navier-Stokes の方程式がえられる。しかし、その結果はきわめて複雑な形で表わされるから、ここでは省略することにする。

3. 層流より乱流へのせん移

いま、ある代表長として d 、代表速度として U を用いると、長さおよび速度は無次元化されるが、時間は $(d/U)t'$ 、圧力も $\rho U^2 d'$ という表示を用いると、同様に無次元量がえられる。したがって、たとえば直角座標系における x 軸方向の Navier-Stokes の式(58)を上にした量によって無次元化すれば、つぎのようになる。

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} = F_x' - \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \right) \quad (61)$$

ここに、 Re は (Ud/ν) で表わされる Reynolds 数であり、粘性流体の力学的挙動を表わす重要なパラメータであることはいうまでもない。

粘性流体の流れには、層流と乱流との 2 つの様相があることは Hagen 以来周知の事実であり、これに Reynolds 数が重要な役割を演ずることは Reynolds の実験で明らかにされている。層流より乱流へせん移する Reynolds 数は、実験的には円管に対して 2,000~6,000 であり、また開水路に対して 500~1,500 であることがえられているが、理論的には流体力学的安定性 (Hydrodynamic stability) の問題といわれる。安定性理論に関する諸問題は別として、実験的に明らかにされている限界 Reynolds 数よりわれわれの対象とする流れは例外なく乱流であると考えられる。

B. 乱れとその基本的特性

1. 乱れと平均値

流体が乱流運動をしていると、平均的にみて規則正しくみえるような流れも、巨視的な内部構造ではきわめて不規則な異種の運動が含まれている。このように、ある種の平均的な運動からの変動が全く周期的でないような流れを乱流という。乱流理論そのものは前世紀の後半より徐々に、今世紀に入って急速に発展されてきた数学的理論であって、われわれが対象とする水理学では乱流理論そのものは直接的な興味を惹くものではない。しかし、水理学で取り扱う平均流に較べて二次的な影響しかもたない乱れの変動も、エネルギー損失過程、境界面における抵抗、拡散混合などの基本的特性に重要な影響を及ぼし、しかも乱れの問題を用いない流体運動理論ではもはや流体现象を十分に説明しえないものが多いから、われわれは少なくともその基本的特性を理解しておく必要がある。

乱流現象を取り扱う基本的特性として平均値の概念がある。Reynolds によって導入された平均値の定義も、対象とする乱れの性質やスケールによって種々の方法で表わされるが、要するにある量、たとえば x 軸方向の速度成分 u は

$$u = \bar{u} + u' \quad (62)$$

で表現され、ここには $\bar{u}$ は平均値、 u' は変動といわれる。また平均値としての $\bar{u}$ はわれわれが測定しようある場所におけるある瞬間のものと水理学的な立場から考えてよい。したがって、変動量 u' の平均は

$$\bar{u}' = 0 \quad (63)$$

となる。

2. 乱れの場合における基礎方程式

すでに述べたように、われわれの対象とする流れはほとんど例外なく乱流であり、しかも水理学においては乱流そのものの微細な構造を究明するよりもむしろ乱流状態における上に示した意味での平均的な流れの挙動を知りたいのである。したがって、ここでは乱れの場合における平均流の基礎方程式をこれまでに述べた流体力学的諸関係より誘導することにしよう。

(1) 平均流に対する連立方程式 直角座標系に対するものは、(7)式に (62)式の関係を用いて平均すれば

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (64)$$

である。ここに、 $\bar{u}$ は乱流理論における平均値を示すが、水理学では任意の点におけるある時刻のものであると

考えてよい。

直交曲線座標系に対しては、(10)式より同様に

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 \bar{u}_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 \bar{u}_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 \bar{u}_3) \right\} = 0 \quad (65)$$

となる。

もし変動量に関する連続方程式が必要とあれば、(62)式の関係を用いた連続方程式より平均流に対するものを差し引けばえられ、同じ形で表わされることがわかれる。

(2) 平均流に対する運動方程式 全く同様の操作を(35)～(37)式に適用すると、直角座標系における平均流の運動方程式が、また(41)～(43)式に適用すると、直交曲線座標系におけるものがえられる。すなわち、

直角座標系：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= \bar{F}_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\sigma}_x - \rho \bar{u}'u') \\ &+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\tau}_{yx} - \rho \bar{u}'v') + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\tau}_{zx} - \rho \bar{u}'w'), \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= \bar{F}_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\tau}_{xy} - \rho \bar{u}'v') \\ &+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\sigma}_y - \rho \bar{v}'v') + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\tau}_{zy} - \rho \bar{v}'w'), \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= \bar{F}_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\tau}_{xz} - \rho \bar{u}'w') \\ &+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\tau}_{yz} - \rho \bar{v}'w') + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\sigma}_z - \rho \bar{w}'w') \end{aligned} \quad (68)$$

直交曲線座標系：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \frac{\bar{u}_1}{h_1} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\bar{u}_2}{h_2} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\bar{u}_3}{h_3} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} &= \bar{F}_{x_1} - \frac{1}{\rho h_1} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[h_2 h_3 (\bar{\sigma}_{x_1} \right. \right. \\ &- \left. \left. \rho \bar{u}_1' u_1') \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[h_3 h_1 (\bar{\tau}_{x_1 x_2} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_2') \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[h_1 h_2 (\bar{\tau}_{x_3 x_1} - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_1') \right] \right\} \\ &+ \frac{1}{\rho h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} (\bar{\tau}_{x_1 x_2} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_2' - \rho \bar{u}_1' u_2') + \frac{1}{\rho h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} (\bar{\tau}_{x_3 x_1} - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_1' - \rho \bar{u}_3' u_1') \\ &- \frac{1}{\rho h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} (\bar{\sigma}_{x_2} - \rho \bar{u}_2' \bar{u}_2' - \rho \bar{u}_2' u_2') - \frac{1}{\rho h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} (\bar{\sigma}_{x_3} - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_3' - \rho \bar{u}_3' u_3'), \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} + \frac{\bar{u}_1}{h_1} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} + \frac{\bar{u}_2}{h_2} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\bar{u}_3}{h_3} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} &= \bar{F}_{x_2} - \frac{1}{\rho h_2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[h_2 h_3 (\bar{\tau}_{x_1 x_2} \right. \right. \\ &- \left. \left. \rho \bar{u}_1' u_2') \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[h_3 h_1 (\bar{\sigma}_{x_2} - \rho \bar{u}_2' u_2') \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[h_1 h_2 (\bar{\tau}_{x_2 x_3} - \rho \bar{u}_2' u_3') \right] \right\} \\ &+ \frac{1}{\rho h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} (\bar{\tau}_{x_2 x_3} - \rho \bar{u}_2' \bar{u}_3' - \rho \bar{u}_2' u_3') + \frac{1}{\rho h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} (\bar{\tau}_{x_1 x_2} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_2' - \rho \bar{u}_1' u_2') \\ &- \frac{1}{\rho h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} (\bar{\sigma}_{x_3} - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_3' - \rho \bar{u}_3' u_3') - \frac{1}{\rho h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} (\bar{\sigma}_{x_1} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_1' - \rho \bar{u}_1' u_1'), \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial t} + \frac{\bar{u}_1}{h_1} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} + \frac{\bar{u}_2}{h_2} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} + \frac{\bar{u}_3}{h_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} &= \bar{F}_{x_3} - \frac{1}{\rho h_3} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} + \frac{1}{\rho h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[h_2 h_3 (\bar{\tau}_{x_3 x_1} \right. \right. \\ &- \left. \left. \rho \bar{u}_3' u_1') \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[h_3 h_1 (\bar{\tau}_{x_2 x_3} - \rho \bar{u}_2' \bar{u}_3') \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[h_1 h_2 (\bar{\sigma}_{x_3} - \rho \bar{u}_3' u_3') \right] \right\} \\ &+ \frac{1}{\rho h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} (\bar{\tau}_{x_3 x_1} - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_1' - \rho \bar{u}_3' u_1') + \frac{1}{\rho h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} (\bar{\tau}_{x_2 x_3} - \rho \bar{u}_2' \bar{u}_3' - \rho \bar{u}_2' u_3') \\ &- \frac{1}{\rho h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} (\bar{\sigma}_{x_1} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_1' - \rho \bar{u}_1' u_1') - \frac{1}{\rho h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} (\bar{\sigma}_{x_2} - \rho \bar{u}_2' \bar{u}_2' - \rho \bar{u}_2' u_2') \end{aligned} \quad (71)$$

ここに、変動量によるみかけの応力、 $-\rho \bar{u}_1' u_1'$ 、……、がつけ加えられていることがわかる。これらのみかけの応力を Reynolds 応力という。

(3) 平均流に対する運動量方程式 第1章・C・3 に示した運動量方程式の誘導に乱れの平均量と変動とを考慮合わせるとき、その影響はたとえば(45)あるいは(46)式の左辺第2項の運動量伝達に関する項などにあらわれる。すなわちこの場合、平均量の取り扱いによって平均流による運動量伝達量と変動による二次的な変動流の運動量拡散量とに分けられ、結局直角座標系および直交曲線座標系における平均流の運動量方程式はそれぞれつぎのように表わされる。

直角座標系： x 軸方向の分値

$$\begin{aligned} & \int \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dV + \int \rho \bar{u} \left\{ \bar{u} \cos(x, \nu) + \bar{v} \cos(y, \nu) + \bar{w} \cos(z, \nu) \right\} dS \\ &= \int \rho \bar{F}_x dV + \int \left\{ (\bar{\sigma}_x - \bar{p} - \rho \bar{u}'\bar{u}') \cos(x, \nu) + (\bar{\tau}_{xy} - \rho \bar{u}'\bar{v}') \cos(y, \nu) \right. \\ & \quad \left. + (\bar{\tau}_{zx} - \rho \bar{w}'\bar{u}') \cos(z, \nu) \right\} dS \end{aligned} \quad (72)$$

直交曲線座標系： x_1 軸方向の分値

$$\begin{aligned} & \int \rho \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} dV + \int \rho \bar{u}_1 \left\{ \bar{u}_1 \cos(x_1, \nu) + \bar{u}_2 \cos(x_2, \nu) + \bar{u}_3 \cos(x_3, \nu) \right\} dS \\ &= \int \rho \bar{F}_{x_1} dV + \int \left\{ (\bar{\sigma}_{x_1} - \bar{p} - \rho \bar{u}_1'\bar{u}_1') \cos(x_1, \nu) + (\bar{\tau}_{x_1x_2} - \rho \bar{u}_1'\bar{u}_2') \cos(x_2, \nu) \right. \\ & \quad \left. + (\bar{\tau}_{x_1x_3} - \rho \bar{u}_1'\bar{u}_3') \cos(x_3, \nu) \right\} dS + \int \frac{\bar{p}}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3) dV + \int \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \\ & \quad (\bar{\tau}_{x_1x_2} - \rho \bar{u}_1'\bar{u}_2' - \rho \bar{u}_1'\bar{u}_2') dV + \int \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} (\bar{\tau}_{x_1x_3} - \rho \bar{u}_1'\bar{u}_3' - \rho \bar{u}_3'\bar{u}_1') dV \\ & \quad - \int \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} (\bar{\sigma}_{x_2} - \rho \bar{u}_2'\bar{u}_2' - \rho \bar{u}_2'\bar{u}_2') dV - \int \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} (\bar{\sigma}_{x_3} - \rho \bar{u}_3'\bar{u}_3' - \rho \bar{u}_3'\bar{u}_3') dV \end{aligned} \quad (73)$$

(4) 平均流れに対するエネルギー方程式 第1章・C・4 に示したエネルギー方程式誘導の過程を平均流と乱れによる変動とを考慮して行なえば、乱流におけるエネルギー変換過程を示す方程式がえられる。ところが、運動量方程式の場合と異なって平均化操作によっても変動流の影響が消えない。しかし、エネルギー方程式の示す仕事とエネルギーとの関係も平均流および変動流の2つに分けて考えるのが便利であり、しかもわれわれが水理学において取り扱う量はたとえ瞬間的なものとして認識していても平均的な量に外ならないから、平均流に対するエネルギー方程式は平均流に対する運動方程式のそれぞれにその方向の平均流の速度分値と密度とを乗じ、いま考えている流体塊の容積 V について積分すればよいことになる。したがって、直角座標系および直交曲線座標系における平均流のエネルギー方程式を示すとつぎのように表わされる。

直角座標系：

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \bar{q}^2}{2} \right) dV + \int \left\{ \bar{u} \cos(x, \nu) + \bar{v} \cos(y, \nu) + \bar{w} \cos(z, \nu) \right\} \left(\frac{\rho \bar{q}^2}{2} + \rho \Omega \right) dS \\ &= \int \left\{ \bar{u} (\bar{\sigma}_x - \bar{p} - \rho \bar{u}'\bar{u}') \cos(x, \nu) + \bar{v} (\bar{\sigma}_y - \bar{p} - \rho \bar{v}'\bar{v}') \cos(y, \nu) \right. \\ & \quad \left. + \bar{w} (\bar{\sigma}_z - \bar{p} - \rho \bar{w}'\bar{w}') \cos(z, \nu) \right\} dS + \int \bar{u} \left\{ (\bar{\tau}_{xy} - \rho \bar{u}'\bar{v}') \cos(y, \nu) \right. \\ & \quad \left. + (\bar{\tau}_{zx} - \rho \bar{w}'\bar{u}') \cos(z, \nu) \right\} dS + \int \bar{v} \left\{ (\bar{\tau}_{yz} - \rho \bar{v}'\bar{w}') \cos(z, \nu) + (\bar{\tau}_{xy} - \rho \bar{u}'\bar{v}') \cos(x, \nu) \right\} dS \\ & \quad + \int \bar{w} \left\{ (\bar{\tau}_{zx} - \rho \bar{w}'\bar{u}') \cos(x, \nu) + (\bar{\tau}_{yz} - \rho \bar{v}'\bar{w}') \cos(y, \nu) \right\} dS \\ & \quad - \int \left\{ (\bar{\sigma}_x - \rho \bar{u}'\bar{u}') \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + (\bar{\sigma}_y - \rho \bar{v}'\bar{v}') \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right. \\ & \quad \left. + (\bar{\sigma}_z - \rho \bar{w}'\bar{w}') \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right\} dV - 2 \int \bar{e}_{xy} (\bar{\tau}_{xy} - \rho \bar{u}'\bar{v}') dV - 2 \int \bar{e}_{yz} (\bar{\tau}_{yz} - \rho \bar{v}'\bar{w}') dV \\ & \quad - 2 \int \bar{e}_{zx} (\bar{\tau}_{zx} - \rho \bar{w}'\bar{u}') dV \end{aligned} \quad (74)$$

直交曲線座標系：

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \bar{q}^2}{2} \right) dV + \int \left\{ \bar{u}_1 \cos(x_1, \nu) + \bar{u}_2 \cos(x_2, \nu) + \bar{u}_3 \cos(x_3, \nu) \right\} \left(\frac{\rho \bar{q}^2}{2} + \rho \Omega \right) dS \\
&= \int \left\{ \bar{u}_1 (\bar{\sigma}_{x_1} - \bar{p} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_1') \cos(x_1, \nu) + \bar{u}_2 (\bar{\sigma}_{x_2} - \bar{p} - \rho \bar{u}_2' \bar{u}_2') \cos(x_2, \nu) \right. \\
&+ \bar{u}_3 (\bar{\sigma}_{x_3} - \bar{p} - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_3') \cos(x_3, \nu) \left. \right\} dS + \int \bar{u}_1 \left\{ (\bar{\tau}_{x_1 x_2} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_2') \cos(x_2, \nu) \right. \\
&+ (\bar{\tau}_{x_3 x_1} - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_1') \cos(x_3, \nu) \left. \right\} dS + \int \bar{u}_2 \left\{ (\bar{\tau}_{x_2 x_3} - \rho \bar{u}_2' \bar{u}_3') \cos(x_3, \nu) \right. \\
&+ (\bar{\tau}_{x_1 x_2} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_2') \cos(x_1, \nu) \left. \right\} dS + \int \bar{u}_3 \left\{ (\bar{\tau}_{x_3 x_1} - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_1') \cos(x_1, \nu) \right. \\
&+ (\bar{\tau}_{x_2 x_3} - \rho \bar{u}_2' \bar{u}_3') \cos(x_2, \nu) \left. \right\} dS - \int \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ (\bar{\sigma}_{x_1} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_1') \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 \bar{u}_1) \right. \\
&+ (\bar{\sigma}_{x_2} - \rho \bar{u}_2' \bar{u}_2') \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 \bar{u}_2) + (\bar{\sigma}_{x_3} - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_3') \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 \bar{u}_3) \left. \right\} dV + \int \frac{\bar{u}_1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \left\{ (\bar{\sigma}_{x_1} \right. \\
&- \rho \bar{u}_1' \bar{u}_1') - (\bar{\sigma}_{x_2} - \rho \bar{u}_2' \bar{u}_2') \left. \right\} dV + \int \frac{\bar{u}_1}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} \left\{ (\bar{\sigma}_{x_1} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_1') - (\bar{\sigma}_{x_3} - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_3') \right\} dV \\
&+ \int \frac{\bar{u}_2}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \left\{ (\bar{\sigma}_{x_2} - \rho \bar{u}_2' \bar{u}_2') - (\bar{\sigma}_{x_3} - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_3') \right\} dV + \int \frac{\bar{u}_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \left\{ (\bar{\sigma}_{x_2} - \rho \bar{u}_2' \bar{u}_2') \right. \\
&- (\bar{\sigma}_{x_1} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_1') \left. \right\} dV + \int \frac{\bar{u}_3}{h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} \left\{ (\bar{\sigma}_{x_3} - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_3') - (\bar{\sigma}_{x_1} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_1') \right\} dV \\
&+ \int \frac{\bar{u}_3}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} \left\{ (\bar{\sigma}_{x_3} - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_3') - (\bar{\sigma}_{x_2} - \rho \bar{u}_2' \bar{u}_2') \right\} dV - 2 \int \bar{e}_{x_1 x_2} (\bar{\tau}_{x_1 x_2} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_2') dV \\
&- 2 \int \bar{e}_{x_2 x_3} (\bar{\tau}_{x_2 x_3} - \rho \bar{u}_2' \bar{u}_3') dV - 2 \int \bar{e}_{x_3 x_1} (\bar{\tau}_{x_3 x_1} - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_1') dV \tag{75}
\end{aligned}$$

以上に示した平均流に関する運動量およびエネルギー方程式が、われわれの対象とする開水路流れの水理学における基礎方程式である。

3. 乱れに関する諸特性

乱流理論は種々の方面に応用されるが、われわれがよく利用するものは基礎理論としての等方性乱れの理論、流体中の物理的、化学的性質の乱流拡散混合理論、抵抗法則や流速分布に関係するせん断流れの現象論などがある。理論的にはすでに多くの成果がえられているが、実験的には、とくに水理実験的にはほとんどみるべきものがない。これは流体としての水のなかで乱れの測定が効果的に行なわれにくいためであって、乱流理論の実験的検証は空気の流れによる結果を用いるか、あるいは直接測定しようものへ変換して行なわれている。

現在のところ、以上に示すように世界各国の大学や研究所では水の乱れを測定すべく努力が重ねられているが、正直なところ暗中也索の状態であるといえよう。

等方性乱れの理論は、開水路流れの乱れなどでは決してそのまま満足されるものではないが、多くの場合には少なくとも乱れの基本的特性を規定するものと考えられる。空気流の乱れに関する Laufer の実験による等方性乱れ領域の類推、あるいは開水路流れの流速分布に関する実験よりその適用の仮定などの研究があり、開水路の流れでは大体中央部の乱れは等方性的であるとみなしうることが知られている³⁾。

乱流拡散については、実験的には粒子拡散および食塩水によるそれがあり、境界面によって限定された開水路流れの拡散過程は、Taylor の等方性乱れ領域における拡散理論が適用される領域、見かけの拡散がも早おこらなくなり一定の濃度分布を示す領域、およびそれらの中間領域があることが知られているが⁴⁾、拡散が境界面に近い非等方性乱れの場合よりおこる場合のそれは未だ解明されていない。一方理論的にはモンテカルロ法を応用したシミュレーションによる拡散過程の解明が電子計算機を用いて行なわれ⁵⁾、種々の興味深い事実がえられており、今後これら両方面の研究の統合が大いに期待される。

開水路流れの流速分布に関する wall turbulence ではいわゆる defect law があり、流速分布は対数法則で

示されることは多くの理論的および実験的研究によって明らかにされている。

第3章 開水路流れの一次元解析法

前章までは、流体の運動をその基礎的な性質によって取り扱ってきたが、われわれの対象とする水理学における開水路流れの理論では、流体力学的解析法によってえられる解の示す厳密な力学的挙動は必要とされないことが多く、むしろ水深、平均流速あるいは流量の時間的、場所的变化といったさらに巨視的な運動機構の解明が望まれる。この場合、すでに示した運動量あるいは機械的エネルギー保存の原理よりえられる巨視的平均量を取り扱う一次元解析法が用いられ、すでに前世紀より広く用いられ、今日においても開水路水理学における最も有力な解析手段として、むしろ唯一のものとして認められている。

この方法も、Saint Venant, Boussinesq 以来多くの研究者が種々の角度から検討を加え現在の形に展開されてきたが、ここでは水理学における流体力学の示す意義と役割を理論的に明らかにするため、すでに述べた流体力学的解析法より一次元解析法における基礎理論を組み立てよう。

A. 開水路流れの運動学的、幾何学的条件

1. 境界面における運動学的条件

固定された境界面における法線方向の速度は、境界面が不浸透性であれば0であり、また浸透性などであれば有限値をもっている。

すなわち、境界面において外向きに立てた法線ベクトルの座標軸に対してもつ方向余弦を $\cos_b(x_i, \nu)$ とすると、不浸透性境界面において成立する運動学的条件は、平均流に関して、

$$\bar{u}_{1b} \cos_b(x_1, \nu) = \bar{u}_{nb} \quad (76)$$

である。ここに、 $\bar{u}_{nb}$ は境界面における法線方向の速度で、正は流出、また逆に負は流入を表わす。明らかに、 $\bar{u}_{nb}=0$ は境界面が固定で不浸透性のときを意味している。

直角座標系では、上式は

$$\bar{u}_b \cos_b(x, \nu) + \bar{v}_b \cos_b(y, \nu) + \bar{w}_b \cos_b(z, \nu) = \bar{u}_{nb} \quad (77)$$

であり、また直交曲線座標系では、同様に

$$\bar{u}_{1b} \cos_b(x_1, \nu) + \bar{u}_{2b} \cos_b(x_2, \nu) + \bar{u}_{3b} \cos_b(x_3, \nu) = \bar{u}_{nb} \quad (78)$$

である。

2. 自由表面における運動学的条件

自由表面における運動学的条件は、自由表面が常に1つの境界面を構成するという条件よりえられる。

いま、直角座標系において、自由表面を $y-h(x, z, t) = 0$ と表わすと、自由表面における流体粒子の y 軸方向の速度は

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)_s = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt} \right)_s + \frac{\partial h}{\partial z} \left(\frac{dz}{dt} \right)_s$$

ところが、自由表面における速度の成分は(2)式で与えられるから、結局運動学的条件は

$$\bar{v}_s = \frac{\partial h}{\partial t} + \bar{u}_s \frac{\partial h}{\partial x} + \bar{w}_s \frac{\partial h}{\partial z} \quad (79)$$

となる。

全く同様に、直交曲線座標系においては

$$\bar{u}_{2s} = h_{2s} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\bar{u}_{1s}}{h_{1s}} \frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\bar{u}_{3s}}{h_{3s}} \frac{\partial h}{\partial x_3} \right) \quad (80)$$

と表わされる。

3. 自由表面における幾何学的条件

自由表面を表わす式 $y-h(x, z, t) = 0$ を陰関数表示にすれば

$$f(x, y, z, t) = y - h(x, z, t) = 0 \quad (81)$$

であり、したがって、

$$\partial f / \partial x = -\partial h / \partial x, \quad \partial f / \partial y = 1, \quad \partial f / \partial z = -\partial h / \partial z \quad (82)$$

である。一方、点 (x, y, z) より立てた法線は切平面を媒介として

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad (83)$$

と表わされる。ここに、 X, Y, Z は法線上の任意の 1 点の座標である。上式の実分母はこの法線ベクトルの方向余弦を示しているから、自由表面より立てた法線ベクトルと水面こう配との間には、上に示した諸関係より

$$\cos_s(x, \nu) = -\frac{\partial h}{\partial x}, \quad \cos_s(y, \nu) = 1, \quad \cos_s(z, \nu) = -\frac{\partial h}{\partial z} \quad (84)$$

という幾何学的関係が存在することがわらう。

直交曲線座標系においては、自由表面を表わす式として $x_2 - h(x_1, x_3, t) = 0$ を用い、(83)式の実分母がそれぞれ $(\partial f / \partial x_1) / h_{1s}$, $(\partial f / \partial x_2) / h_{2s}$, $(\partial f / \partial x_3) / h_{3s}$ と変わることから、(84)式の代りに自由表面における幾何学的条件は

$$\cos_s(x_1, \nu) = -\frac{1}{h_{1s}} \frac{\partial h}{\partial x_1}, \quad \cos_s(x_2, \nu) = \frac{1}{h_{2s}}, \quad \cos_s(x_3, \nu) = -\frac{1}{h_{3s}} \frac{\partial h}{\partial x_3} \quad (85)$$

となることがわらう。

B. 一次元解析法の基礎理論

開水路流れの一次元水理解析法の基礎理論は第 2 章において示した乱れの場合における平均流の流体力学的連続、運動量、エネルギー方程式を **A** に示した運動学的、幾何学的条件より積分して組み立てられる。ここでは、以下に順を追って説明しよう。

1. 一次元解析法における連続方程式

(I) 直角座標系における一次元連続方程式 直角座標系における平均流に関する流体力学的連続方程式は(64)式によって表わされるが、いま容積 V という流体塊について積分を行なうと、変換を逆に行ない(5)式と同様の形となる。すなわち、再記すれば

$$\int \left\{ \bar{u} \cos(x, \nu) + \bar{v} \cos(y, \nu) + \bar{w} \cos(z, \nu) \right\} dS = 0$$

いま、この流体塊が 図-4 に示すように、 dx だけ離れた x 軸に直角な 2 断面、自由表面および境界面で囲まれているものとしよう。 x の増加する方向に断面 I, II をとれば、断面 I では $\cos(x, \nu) = -1$, $\cos(y, \nu) = \cos(z, \nu) = 0$ となり、また断面 II では $\cos(x, \nu) = 1$, $\cos(y, \nu) = \cos(z, \nu) = 0$ である。したがって、上式の表面積分はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} & \int_{II} \bar{u} dS_x - \int_I \bar{u} dS_x + \int \left\{ \bar{u}_s \cos_s(x, \nu) + \bar{v}_s \cos_s(y, \nu) + \bar{w}_s \cos_s(z, \nu) \right\} dS_s + \\ & \int \left\{ \bar{u}_b \cos_b(x, \nu) + \bar{v}_b \cos_b(y, \nu) + \bar{w}_b \cos_b(z, \nu) \right\} dS_b = 0 \end{aligned} \quad (86)$$

ここに、添字の s および b は自由表面および境界面における値を示している。 s を潤辺とすると、自由表面および境界面の面積素分はそれぞれ $dS_s = dz dx$, $dS_b = ds dx$ であるから、(77), (79) および (84) 式を用いて上式を変形すればつぎのようになる。

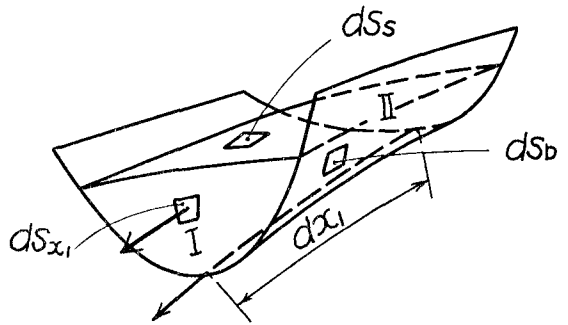


図-4

$$\int_{\Pi} \bar{u} dS_x - \int_I \bar{u} dS_x + \int \frac{\partial h}{\partial t} dz dx + \int \bar{u}_{nb} ds dx = 0$$

上式を dx でわり、かつ $dx \rightarrow 0$ という極限を考えると、

$$\frac{\partial}{\partial x} \int \bar{u} dS_x + \int \frac{\partial h}{\partial t} dz + \int \bar{u}_{nb} ds = 0 \quad (87)$$

すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial x} \int \bar{u} dS_x + \frac{\partial}{\partial t} \int h dz + \int \bar{u}_{nb} ds = 0 \quad (88)$$

いま、流路にそい単位長さ当りの流出流量を q とすると、これは $\int \bar{u}_{nb} ds$ であるから、流量を Q 、流水断面積を A とすれば、普通に用いられる形式の連続方程式

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = -q \quad (89)$$

がえられる。ここに、 q は流出に対して正、また逆に流入に対して負の値をとることはすでに示したようである。

(2) 直交曲線座標系における一次元連続方程式 全く同様の操作を直交曲線座標系における平均流の連続方程式(65)に (78), (80)および (85)式を利用して行なえばよい。この場合、自由表面および境界面における面積素分はそれぞれ $dS_s = h_{1s} h_{3s} dx_3 dx_1$, $dS_b = h_{1b} ds dx_1$ であるから、

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int \bar{u}_1 dS_{x1} + \left\{ h_{1s} h_{3s} \frac{\partial h}{\partial t} dx_3 + \int h_{1b} \bar{u}_{1b} ds \right\} = 0 \quad (90)$$

となる。越流項や曲った水路などでは h_1 などは1でないから、一般に連続方程式は(89)式という普通の形式のものと異なる。しかし、これは非定常項にのみ導入されるから、定常流においては変化がないとみなされるであろう。

2. 一次元解析法における運動量方程式

(1) 直角座標系における一次元運動量方程式 平均流に関する運動量方程式(72)を前節に示した方法によつて取り扱えばよい。この場合、表面力に関しては面に直角に作用するものと抵抗力となるせん断応力とに分けて考える方が都合がよい。したがって、(72)式の右辺第2項は

$$\int \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\sigma}_x - \bar{p} - \rho \bar{u}'\bar{u}') dV + \int \left\{ (\bar{\tau}_{xy} - \rho \bar{u}'\bar{v}') \cos(\nu, \nu) + (\bar{\tau}_{zx} - \rho \bar{u}'\bar{u}') \cos(z, \nu) \right\} dS$$

と表わされる。明らかに、上式の第2項は自由表面では水と空気との間の相対速度によるせん断力を、また境界面においてはいわゆる抵抗力を示している。いま、水と空気との間の抵抗力を無視し、境界面における抵抗力を(29)式の関係を参照して $-\bar{\tau}_{xb}$ で表わすと、体積素分 dV は $dS_x \cdot dx$ であるから、直角座標系における一次元運動量方程式は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int \bar{u} dS_x - \bar{u}_s \frac{\partial S_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int \bar{u}^2 dS_x + \int \bar{u}_s \frac{\partial h}{\partial t} dz_s + \int \bar{u}_b \bar{u}_{nb} ds \\ & = \int \bar{F}_x dS_x + \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\sigma}_x - \bar{p} - \rho \bar{u}'\bar{u}') dS_x - \int \frac{\bar{\tau}_{xb}}{\rho} ds \end{aligned} \quad (91)$$

となる。もちろん、乱流の流れでは、境界面にごく近い領域を除いて平均流の粘性応力は乱れによるみかけの Reynolds 応力に較べてきわめて小さいから、上式は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int \bar{u} dS_x - \bar{u}_s \frac{\partial S_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int \bar{u}^2 dS_x + \int \bar{u}_s \frac{\partial h}{\partial t} dz_s + \int \bar{u}_b \bar{u}_{nb} ds \\ & = \int \bar{F}_x dS_x - \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + \rho \bar{u}'\bar{u}') dS_x - \int \frac{\bar{\tau}_{xb}}{\rho} ds \end{aligned} \quad (92)$$

とも書くことができる。

(2) 直交曲線座標系における一次元運動量方程式 全く同様の計算を(73)式について行なうと、直交曲線座標系における一次元運動量方程式がえられる。

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ h_{1s} \bar{u}_1 dS_{x1} - h_{1s} \bar{u}_{1s} \frac{\partial S_{x1}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \bar{u}_1^2 dS_{x1} + \left\{ h_{1s} h_{3s} \bar{u}_{1s} \frac{\partial h}{\partial t} dx_{3s} \right. \right. \right. \\
& + \left\{ h_{1b} \bar{u}_{1b} \bar{u}_{nb} ds = \left\{ h_{1s} \bar{F}_{x1} dS_{x1} + \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_1} (\bar{\sigma}_{x1} - \bar{p} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_1') dS_{x1} \right. \right. \\
& + \left\{ \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3) \frac{(\bar{\sigma}_{x1} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_1')}{\rho} dS_{x1} - \left\{ h_{1b} \frac{\bar{\tau}_{x1b}}{\rho} ds + \left\{ \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \frac{1}{\rho} (\bar{\tau}_{x1x_2} \right. \right. \\
& - \rho \bar{u}_1 \bar{u}_2 - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_2') dS_{x1} + \left\{ \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} \frac{1}{\rho} (\bar{\tau}_{x3x1} - \rho \bar{u}_3 \bar{u}_1 - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_1') dS_{x1} \\
& - \left\{ \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \frac{1}{\rho} (\bar{\sigma}_{x2} - \rho \bar{u}_2 \bar{u}_2 - \rho \bar{u}_2' \bar{u}_2') dS_{x1} - \left\{ \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} (\bar{\sigma}_{x3} - \rho \bar{u}_3 \bar{u}_3 \right. \right. \\
& - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_3') dS_{x1}
\end{aligned} \tag{93}$$

である。ここに、抵抗力に関して

$$\bar{\tau}_{xb} = - \left\{ (\bar{\tau}_{x1x2} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_2')_b \cos b(x_2, \nu) + (\bar{\tau}_{x3x1} - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_1')_b \cos b(x_3, \nu) \right\}$$

という関係を用いている。もちろん、平均流の粘性応力に関する各項は省略しても差し支えない。

3. 一次元解析法におけるエネルギー方程式

(1) 直角座標系における一次元エネルギー方程式 平均流に関するエネルギー方程式(74)を計算すればよいが、エネルギー方程式は仕事とエネルギーとの関係を示すから、抵抗力も運動量方程式のように流れの主流方向のみならず、各座標軸方向のものも導入される。これらに関して以前と同様の表示を用いると、結局

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\bar{q}^2}{2} dS_x - \frac{\bar{q}_s}{2} \frac{\partial S_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\bar{q}^2}{2} + \Omega \right) \bar{u} dS_x + \left\{ \left(\frac{\bar{q}_s^2}{2} + \Omega_s \right) \frac{\partial h}{\partial t} dz_s \right. \right. \right. \\
& + \left\{ \left(\frac{\bar{q}_b^2}{2} + \Omega_b \right) \bar{u}_{nb} ds = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\rho} \left\{ (\bar{\sigma}_x - \bar{p} - \rho \bar{u}' \bar{u}') \bar{u} + (\bar{\tau}_{xy} - \rho \bar{u}' \bar{v}') \bar{v} \right. \right. \right. \\
& + (\bar{\tau}_{zx} - \rho \bar{w}' \bar{u}') \bar{w} \} dS_x + \left\{ \frac{1}{\rho} \left\{ (\bar{\sigma}_x - \bar{p} - \rho \bar{u}' \bar{u}')_s \bar{u}_s \cos s(x, \nu) + (\bar{\sigma}_y \right. \right. \\
& - \bar{p} - \rho \bar{v}' \bar{v}')_s \bar{v}_s \cos s(y, \nu) + (\bar{\sigma}_z - \bar{p} - \rho \bar{w}' \bar{w}')_s \bar{w}_s \cos s(z, \nu) \} dz_s \\
& + \left\{ \frac{1}{\rho} \left\{ (\bar{\sigma}_x - \bar{p} - \rho \bar{u}' \bar{u}')_b \bar{u}_b \cos b(x, \nu) + (\bar{\sigma}_y - \bar{p} - \rho \bar{v}' \bar{v}')_b \bar{v}_b \cos b(y, \nu) \right. \right. \\
& + (\bar{\sigma}_z - \bar{p} - \rho \bar{w}' \bar{w}')_b \bar{w}_b \cos b(z, \nu) \} ds - \left\{ \frac{1}{\rho} (\bar{\tau}_{xb} \bar{u}_b + \bar{\tau}_{yb} \bar{v}_b + \bar{\tau}_{zb} \bar{w}_b) ds \right. \\
& - \left\{ \frac{1}{\rho} \left\{ (\bar{\sigma}_x - \rho \bar{u}' \bar{u}') \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + (\bar{\sigma}_y - \rho \bar{v}' \bar{v}') \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + (\bar{\sigma}_z - \rho \bar{w}' \bar{w}') \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right\} dS_x \right. \\
& - \left\{ \frac{2}{\rho} \left\{ \bar{e}_{xy} (\bar{\tau}_{xy} - \rho \bar{u}' \bar{v}') + \bar{e}_{yz} (\bar{\tau}_{yz} - \rho \bar{v}' \bar{w}') + \bar{e}_{zx} (\bar{\tau}_{zx} - \rho \bar{w}' \bar{u}') \right\} dS_x \right.
\end{aligned} \tag{94}$$

である。

(2) 直交曲線座標系における一次元エネルギー方程式 全く同様にして、つぎの式がえられる。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left\{ h_1 \frac{\bar{q}^2}{2} dS_{x1} - h_{1s} \frac{\bar{q}_s^2}{2} \frac{\partial S_{x1}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \left(\frac{\bar{q}^2}{2} + \Omega \right) \bar{u} dS_{x1} + \left\{ h_{1s} h_{3s} \left(\frac{\bar{q}_s^2}{2} \right. \right. \right. \\
& + \Omega_s \frac{\partial h}{\partial t} dx_{3s} + \left\{ h_{1b} \left(\frac{\bar{q}_b^2}{2} + \Omega_b \right) \bar{u}_{nb} ds = \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{1}{\rho} \left\{ (\bar{\sigma}_{x1} - \bar{p} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_1') \bar{u}_1 \right. \right. \right. \\
& + (\bar{\tau}_{x1x2} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_2') \bar{u}_2 + (\bar{\tau}_{x3x1} - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_1') \bar{u}_3 \} dS_{x1} + \left\{ \frac{h_{1s} h_{3s}}{\rho} \left\{ (\bar{\sigma}_{x1} - \bar{p} \right. \right. \\
& - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_1')_s \bar{u}_{1s} \cos s(x_1, \nu) + (\bar{\sigma}_{x2} - \bar{p} - \rho \bar{u}_2' \bar{u}_2')_s \bar{u}_{2s} \cos s(x_2, \nu) + (\bar{\sigma}_{x3} - \bar{p} \\
& - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_3')_s \bar{u}_{3s} \cos s(x_3, \nu) \} dx_{3s} + \left\{ \frac{h_{1b}}{\rho} \left\{ (\bar{\sigma}_{x1} - \bar{p} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_1')_b \bar{u}_{1b} \cos b(x_1, \nu) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\bar{\sigma}_{x_2} - \bar{p} - \rho \bar{u}_2' \bar{u}_2')_b \bar{u}_{2b} \cos b(x_2, \nu) + (\bar{\sigma}_{x_3} - \bar{p} - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_3')_b \bar{u}_{3b} \cos b(x_3, \nu) \Big\} ds \\
& - \int \frac{h_1 b}{\rho} \left((\bar{\tau}_{x_1 b} \bar{u}_{1b} + \bar{\tau}_{x_2 b} \bar{u}_{2b} + \bar{\tau}_{x_3 b} \bar{u}_{3b}) ds - \int \frac{1}{\rho h_2 h_3} \left\{ (\bar{\sigma}_{x_1} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_1') \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 \bar{u}_1) \right. \right. \\
& + (\bar{\sigma}_{x_2} - \rho \bar{u}_2' \bar{u}_2') \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 \bar{u}_2) + (\bar{\sigma}_{x_3} - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_3') \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 \bar{u}_3) \Big\} dS_{x_1} \\
& + \int \frac{1}{\rho h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \left\{ (\bar{\sigma}_{x_1} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_1') - (\bar{\sigma}_{x_2} - \rho \bar{u}_2' \bar{u}_2') \right\} \bar{u}_1 dS_{x_1} + \int \frac{1}{\rho h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} \left\{ (\bar{\sigma}_{x_1} \right. \\
& - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_1') - (\bar{\sigma}_{x_3} - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_3') \Big\} \bar{u}_1 dS_{x_1} + \int \frac{h_1}{\rho h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \left\{ (\bar{\sigma}_{x_2} - \rho \bar{u}_2' \bar{u}_2') - (\bar{\sigma}_{x_3} \right. \\
& - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_3') \Big\} \bar{u}_2 dS_{x_1} + \int \frac{1}{\rho h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \left\{ (\bar{\sigma}_{x_2} - \rho \bar{u}_2' \bar{u}_2') - (\bar{\sigma}_{x_1} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_1') \right\} \bar{u}_2 dS_{x_1} \\
& + \int \frac{1}{\rho h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} \left\{ (\bar{\sigma}_{x_3} - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_3') - (\bar{\sigma}_{x_1} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_1') \right\} \bar{u}_3 dS_{x_1} + \int \frac{h_1}{\rho h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} \left\{ (\bar{\sigma}_{x_3} \right. \\
& - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_3') - (\bar{\sigma}_{x_2} - \rho \bar{u}_2' \bar{u}_2') \Big\} \bar{u}_3 dS_{x_1} - \int \frac{2h_1}{\rho} \left\{ e_{x_1 x_2} (\bar{\tau}_{x_1 x_2} - \rho \bar{u}_1' \bar{u}_2') \right. \\
& + e_{x_2 x_3} (\bar{\tau}_{x_2 x_3} - \rho \bar{u}_2' \bar{u}_3') + e_{x_3 x_1} (\bar{\tau}_{x_3 x_1} - \rho \bar{u}_3' \bar{u}_1') \Big\} dS_{x_1}
\end{aligned} \tag{95}$$

第2篇 開水路における定常流の基礎理論

第1章 定常流の基本的特性

A. 定常流の基礎方程式

1. 開水路流れの分類と定常流理論の役割

第1篇に示した開水路流れの一次元解析法の基礎方程式からみてもわかるように、独立変数は時間 t と流下距離 x (あるいは x_1)である。したがって、これらの変数の微分係数が存在するかしないかによって、開水路の流れは、1) 定常等流、すなわち流れは時間的にも場所的にも変化しない最も単純な流れの型式、2) 定常不等流、すなわち流れは時間には無関係でただ場所によって変わるもの、3) 非定常等流、流れは場所には関係なくただ時間的に変わるもの、および4) 非定常不等流、すなわち流れの状態は時間的にも場所的にも変化するもの、の4つに分類される。明らかに、定常は時間的に変化しないことを表わし、また等流は場所的に変化しないことを意味している。

定常流は上に示すように、流れの1つの特殊な状態を示すにすぎないが、洪水などの典型的な非定常現象も擬似的には定常的とみなされることがあり、しかも水工事業がその最終的目的とする水の管理がプロセス自体においても完全に解明されていない今日では、水工計画設計自体が一定の設計流量を基準として行なわれるから、開水路水理学における最も重要な分野は定常流理論の展開とその確立である。こうして18世紀以来、多くの研究がすすめられ、少なくともその基礎概念は相当な程度にまで展開されている。

われわれが物理現象を解析的に取り扱う場合、物理現象をその自然の法則にもとづく数学的表示式として表わし、数学的解析という手段を経て現象を説明するのが常道である。定常流の水理学は、その基礎方程式として常微分方程式より構成されるから、常微分方程式論を応用して展開されることになる。この点、偏微分方程式によって流れの水理学の現象が表わされる非定常流の水理学とは大いに異なるところがある。

2. エネルギー解析法における基礎方程式

前篇において誘導した一次元エネルギー方程式は、流体力学的エネルギー方程式に乱流理論における乱れの概念を変形して用い、これに開水路流れに課せられた運動学的および幾何学的条件を与えてできるだけ忠実に表わしたものである。しかし、この方程式(95)に含まれる各項は現在までの理論的解析や実験および実測による経験的事実よりみて無視されるものも多い。事実、一般に用いられる古典水理学の Bernoulli の定理より誘導されるエネルギー方程式と(95)式とを比較すればこの間の過程も推測されよう。したがって、従来の理論および経験的事実よりつぎのような前提をエネルギー解析法におくことにする。

1) 流体の乱れの強さは各座標軸方向で同様、すなわち、 $\rho u u_1$ は一定である。これは水路の境界面の近くでは正しくないが、中心部に近づくにつれて近似的にみとめられるものである。

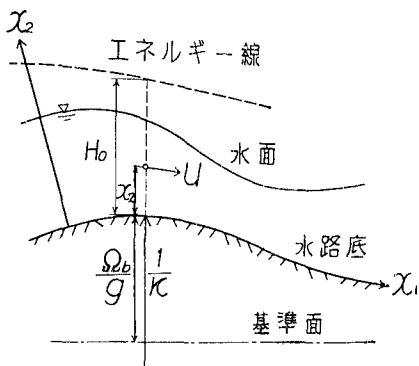


図-5 開水路の流れ

この仮定を用いると、(95)式からわかるように水路の形状がどのようなであってもこの影響は導入されなくなり、エネルギー方程式は大いに簡単化される。

2) 流れの速度成分は流下方向、すなわち主流の方向のものが卓越し、他の方向のものは二次的な影響を与えるにすぎない。

この仮定は古典的な一次元解析法において用いられている概念であるが、 $\bar{q}^2 \doteq \bar{u}_1^2$, ($\bar{u}_1 \gg \bar{u}_2, \bar{u}_3$)より、基礎方程式はさらに簡略化される。

3) 極端に曲った弯曲水路は考えず、水路底は流下方向にのみ変化するとする。この場合、 $h_1 = 1 + \kappa x_2$, $h_2 = h_3 = 1$ である。ここに、 κ は水路底の局所的曲率である。

4) 圧力分布 $\bar{p}$ は静水圧とそれよりの変動との和によって表わされる。すなわち、 $\bar{p} + \rho \bar{u}'\bar{u}' = \rho g \cos \theta (h - x_2) + \Delta \bar{p}$ が成立する。

上述の 3) より、水路底の局所的傾斜角を θ とすると、(28)式を用い、 $\bar{F}_{x1} = g \sin \theta = -(1/h_1)(\partial \bar{\Omega}/\partial x_1)$ 、 $\bar{F}_{x2} = -g \cos \theta = -(\partial \bar{\Omega}/\partial x_2)$ がえられる。第2の式を積分し、これを第1の式に代入すると、ポテンシャル $\bar{\Omega}$ は

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_b + g \cos \theta x_2, \quad -\frac{\partial \bar{\Omega}_b}{\partial x_1} = g \sin \theta \quad (96)$$

と表わされる。ここに、 $\bar{\Omega}_b$ はある基準面より測った水路底のポテンシャルである。

以上の前提およびそれよりえられる結果を用いると、完全乱流場における定常流のエネルギー方程式は(95)式よりつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ \left(\frac{\bar{u}^2}{2} + g \cos \theta y + \bar{\Omega}_b \right) \bar{u} dA + \left\{ \left(\frac{\bar{u}_b^2}{2} + \bar{\Omega}_b \right) \bar{u}_{nb} ds - \frac{d}{dx} \left\{ g \cos \theta (h - y) \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\Delta \bar{p}}{\rho} \right\} \bar{u} dA - \left\{ g \cos \theta (h - y)_b + \frac{\Delta \bar{p}_b}{\rho} \right\} \bar{u}_{nb} ds - \int \frac{\bar{\tau}_{xb} \bar{u}_b}{\rho} ds \right\} \end{aligned}$$

ここに、流下方向の距離 x_1 の代りに x , x_2 の代りに y , また流水断面積 S_{x1} の代りに A とおいている。上式を整理しなおすと、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ \left(\frac{\bar{u}^2}{2} + g \cos \theta (h - y) + \frac{\Delta \bar{p}}{\rho} + g \cos \theta y \right) \bar{u} dA = -\frac{d}{dx} \int \bar{\Omega}_b \bar{u} dA \right. \\ \left. - \int \left(\frac{\bar{u}_b^2}{2} + g h \cos \theta + \frac{\Delta \bar{p}_b}{\rho} + \bar{\Omega}_b \right) \bar{u}_{nb} ds - \int \frac{\bar{\tau}_{xb} \bar{u}_b}{\rho} ds \right. \quad (97) \end{aligned}$$

あるいは、(97)式を計算していわゆる水面形方程式の形とすればつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dX} = \sin \theta (1 + \lambda \kappa h) - \frac{\tau}{\rho g R} \frac{u_b}{u_m} + \frac{\alpha Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{Q^2}{2g A^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x} - h \cos \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x} \\ + \frac{\alpha q Q}{2g A^2} \left(3 - \frac{u_b^2}{\alpha u_m^2} \right) + \frac{(\lambda - 1) q h \cos \theta}{Q} - \frac{q}{Q} \frac{\Delta \bar{p}}{\rho g} \quad (98) \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dX} = \lambda \cos \theta - \frac{\alpha Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial h} + \frac{Q^2}{2g A^2} \frac{\partial \alpha}{\partial h} + h \cos \theta \frac{\partial \lambda}{\partial h} \quad (99)$$

$$\frac{dQ}{dX} = -q \left(\lambda \cos \theta - \frac{\alpha Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial h} + \frac{Q^2}{2g A^2} \frac{\partial \alpha}{\partial h} + h \cos \theta \frac{\partial \lambda}{\partial h} \right) \quad (100)$$

ここに、 $\alpha : (1/Q) \int (\bar{u}^2/u_m^2) \bar{u} dA$ で表わされる Coriolis のエネルギー係数、 $\lambda : (1/Q h \cos \theta) \left\{ \cos \theta (h - y) + (\Delta \bar{p}/\rho g) + y \cos \theta \right\} \bar{u} dA$ で表わされる Jaeger の圧力分布係数、 $\int \bar{u}_{nb} ds = q$, $\int \bar{u}_{nb} \{1 - (u_b^2/\alpha u_m^2)\} ds = q \{1 - (u_b^2/\alpha u_m^2)\}$, $\int (\bar{\tau}_{xb}/\rho g A) (\bar{u}_b/u_m) ds = (\tau/\rho g R) (u_b/u_m)$, $\int (\Delta \bar{p}/\rho g) \bar{u}_{nb} ds = q(\Delta \bar{p}/\rho g)$, u_m : 平均流速, q : 流下方向の単位長さ当りの流出入流量で、流出に対して正、流入に対して負、また X は1つのパラメーターで長さの次元をもっている。

(98) ~ (100)式からわかるように、乱流場における定常流のエネルギー的基礎方程式は3個の Autonomous equation から成り立っている。

3. 比エネルギー

前篇の(94)式において流れが主流の方向にきわめて卓越するという仮定を用いると、流速、ポテンシャルおよび圧力に関する項は、微分係数内において

$$\left\{ \left(\frac{\bar{u}^2}{2} + \bar{\Omega} + \frac{1}{\rho} (\bar{p} + \rho \bar{u}'\bar{u}') \right) \bar{u} dA \right.$$

である。上の表示を gQ でわり、かつポテンシャルを測る基準面を水路底にとれば、この水路を流れる水の単位時間当りの全エネルギー水頭を表わし、これを比エネルギー H_0 という。すなわち、

$$H_0 = \frac{1}{Q} \int \left\{ \left(\frac{\bar{u}^2}{2g} + \frac{1}{g} (\bar{\Omega} - \bar{\Omega}_b) + \frac{1}{\rho g} (\bar{p} + \rho \bar{u}'\bar{u}') \right) \bar{u} dA \right. \quad (101)$$

である。前節で用いた前提より、(101)式を計算すると、

$$H_0 = \frac{\alpha Q^2}{2gA^2} + \lambda h \cos \theta \quad (102)$$

となる。また前節のエネルギー解析法における基礎方程式の代りに(102)式を用いると、 H_0 の変化率は

$$\frac{dH_0}{dx} = \sin \theta - \frac{\tau}{\rho g R} \frac{u_0}{u_m} + \frac{\alpha q Q}{2gA^2} \left(1 - \frac{u_0^2}{\alpha u_m^2}\right) + \frac{(\lambda - 1) q h \cos \theta}{Q} - \frac{q}{Q} \frac{d\beta}{\rho g} \quad (103)$$

であり、定常流のエネルギー的基礎方程式(98)～(100)式の代りに(102)および(103)式を基礎方程式と考えることもできる。後者の基礎方程式は実用上の諸問題を解析する上でほとんど例外なく用いられ、水面形計算法における諸種の方法の基本式である。

これまでの誘導であられた Coriolis のエネルギー係数 α と Jaeger の圧力分布係数 λ について少し説明を加えるとつぎのようである。エネルギー係数はたとえば主流の流速成分 $\bar{u}$ の分布がわかっているならば、定義より計算されるが、現在のところ理論的にえられている流速分布は二次元流れの定常等流状態における現象論的結果であって、不等流あるいは不定流といった状態のものは未解決である。しかし、定常等流における流速分布はそれ以外の状態のものの基本となることは予想される。したがって、理論的には流速分布に関する対数法則を用いて計算するが、実用上は 1.1 位の値が用いられることが多い。一方、圧力分布係数は流れの圧力分布が静水圧的であれば 1、越流頂上の流れのように流線が上に凸のとき < 1 、また逆に流線が下に凸のとき > 1 である。このように、圧力分布係数が 1 であるかあるいは ≥ 1 であるかは流れの分類を与えるもので、前者の場合漸変流、後者は急変流といわれる。

4. 運動量解析法における基礎方程式

前篇で示した一次元運動量方程式からわかるように、水路の形状が簡単、すなわち一様な水路では運動量的解析法がきわめて好都合である。しかし、曲った水路や底こう配が変化するような場合にはこの方法はあまり好ましいものではない。

いま簡単のため $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ 、すなわち直角座標系を用いると、(92)式より定常流の運動量方程式は

$$\frac{d}{dx} \int \bar{u}^2 dA + \int \bar{u} \bar{u} m ds = \int \bar{F}_x dA - \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + \rho \bar{u} \bar{u}') dA - \int \frac{\bar{\tau}_{xb}}{\rho} ds$$

である。エネルギー解析法で用いたように、Boussinesq の運動量係数 $\beta [= (1/A) \int (\bar{u}^2 / u_m^2) dA]$ を導入し、 $\int \bar{u} \bar{u} m ds = qu_0$ 、 $\int (\bar{\tau}_{xb} / \rho) ds = (\tau / \rho) s$ とおくと、上式は連続方程式を利用してつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dx} &= \sin \theta - \frac{\tau}{\rho g R} + \frac{\beta Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{Q^2}{g A^2} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\beta q Q}{g A^2} \left(2 - \frac{u_0}{\beta u_m}\right) \\ &- \frac{1}{g A} \int \frac{d}{dx} \left(\frac{d\beta}{\rho} \right) dA, \end{aligned} \quad (104)$$

$$\frac{dx}{d\chi} = \cos \theta - \frac{\beta Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial h} + \frac{Q^2}{g A^2} \frac{\partial \beta}{\partial h}, \quad (105)$$

$$\frac{dQ}{d\chi} = -q \left(\cos \theta - \frac{\beta Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial h} + \frac{Q^2}{g A^2} \frac{\partial \beta}{\partial h} \right) \quad (106)$$

これらの諸式はエネルギー解析法の基礎方程式(98)～(100)式と少々異なっているが、これは解析法の差異による。また $(d\beta)$ が一般に x と h との関数であるから、(98)～(100)式と大略同様の形となる。

5. 比 力

水路が一様、すなわち水路断面形状および底こう配が一定であれば、

$$\int \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + \rho \bar{u} \bar{u}') dA = \int \frac{1}{\rho} (\bar{p} + \rho \bar{u} \bar{u}') dA$$

となる。この場合、比力といわれる表示がしばしば用いられる。すなわち、これを M_0 で表わすと、

$$M_0 = -\frac{1}{g} \int \left[\bar{u}^2 + \frac{1}{\rho} (\bar{p} + \rho \bar{u} \bar{u}') \right] dA \quad (107)$$

である。すでに述べた諸点と、Jaeger の圧力分布係数 $\lambda' = \int (\bar{p} + \rho \bar{u} \bar{u}') dA / \rho g \cos \theta \cdot h_g \cdot A$ (h_g : 流水断

面積の重心までの深さ)を用いると、(107)式は

$$M_0 = \frac{\beta Q^2}{gA} + \lambda' \cos \theta h_G A \quad (108)$$

となる。この関係を用いると、一様水路における運動量の解析法の基礎方程式として

$$\frac{dM_0}{dx} = \sin \theta \cdot A - \frac{\tau_s}{\rho g} - \frac{u_b q}{g} \quad (109)$$

がえられる。

Boussinesq の運動量係数はエネルギー係数と同様に流速分布式が与えられると計算されるが、実用的には 1.05 という値が、さらに近似的には 1 という値が用いられる。また Jaeger の圧力分布係数 λ' も λ と同様に、漸変流では 1 となり、また急変流では流線が上に凸あるいは凹により <1 あるいは >1 となることがわらう。

B. 限界水深理論

1. 等流水深 (擬似等流水深)

等流水深はもともと定常等流状態の流れのもつ水深であるが、定常不等流に対してもこの概念を拡張して、定常流の基礎方程式が示すすべての水面形曲線が水路底と平行になる点を結ぶ曲線を擬似等流水深曲線といい、その水深を擬似等流水深 (あるいは略して等流水深) と定義する。

明らかに (104) 式を 0 とおいてえられる解であって、定常等流および一様な水路における流量が一定という不等流では場所に関係なく与えられた流量および水路形状によって一義的に決定されるが、一様でない水路の流れや一様な水路であっても流量が場所的に変化する流れでは流下距離の関数となることがわかる。

2. 限界水深

限界水深に関する理論は定常流の水理学で最も重要な基本理論であって、その概念は Leonardo da Vinci 以来いわゆる最小仕事の原理との関連において発展されてきた。ここでは、簡単に限界水深の定義とその意義について触れるにとどめる。

(1) エネルギーの解析法による限界水深、開水路流れの定常流理論はもともとエネルギー的解析法によって構成されているから、限界水深理論はこの方法によるものである。

1) Bresse による定義：流量が一定な定常流の水面形方程式において、水面こう配が無限大となる水深を限界水深という。この場合、水面形方程式は $q = 0$ とおいて (98) 式を (99) 式で割ればえられるから、(99) 式を 0 とすれば限界水深が計算される。しかし、限界水深の定義を拡張すれば流量が一定という条件は必要ではなくなる。

2) Böss の定理⁶⁾によるもの：流量が一定な定常流のもつ比エネルギーが最小となる水深を限界水深といい、流れは常流から射流へと変わる。この定理は時として最小エネルギーの原理といわれ、 $(\partial H_0 / \partial h) = 0$ である。すでに示したエネルギー解析法における基礎方程式の誘導からわかるように、流量が一定という条件は必ずしも必要ではない。

3) Bélanger の定理⁷⁾によるもの：一定の比エネルギー H_0 のもとで、流量が最大となる水深を限界水深といい、普通には、 $(\partial Q / \partial h) = 0$ より計算される。この定義ももともと流量が一定な定常流に対してえられたが、後に示すように流量が場所的に変わる定常流でも同じである。

(2) 運動量の解析法による限界水深、運動量の解析法によっても、前項と全く同様に限界水深が定義される。しかし、運動量方程式はベクトル量であって、比エネルギー H_0 と同じような概念としての比力 M_0 は水路が一様である場合にのみ用いられるから、この解析法による定義は制限をうける。

1) Bresse による定義：運動量の解析法による一次元水面形方程式において、水面こう配が限りなく大きくなる水深をいう。

2) Böss の定理に対応する定義：Böss の定理はエネルギー的解析法によって用いられるものであるが、運動量解析法についても同様の定義が可能であり、比力が最小となる水深を限界水深とすればよい。

3) Bélanger の定理に対応するもの：全く同様に、一定の比力に対して、流量が最大となるような水深を限界水深という。

(3) 非定常運動理論による限界水深、これまでに示した限界水深の定義はいずれも定常流の理論によるものであったが、非定常流れにおいても限界水深は定義され、一般にきわめて微小な擾乱が流れの上流方向に伝わらなくなる水深、すなわち一次元解析法における Froude 数が1になるときを限界水深という。したがって、一次元解析法はさらにエネルギー的方法と運動量的方法とにわけられるから、これら両者の方法によって限界水深が定義される。たとえば、エネルギー的解析法によれば非定常流れの基礎方程式は複雑であるが、第2節で取り扱っている程度の近似では

$$\begin{aligned} & \frac{\beta}{g} \frac{\partial u_m}{\partial t} + \frac{\alpha u_m}{g} \frac{\partial u_m}{\partial x} + \left(\lambda \cos \theta + \frac{u_m^2}{2g} \frac{\partial \alpha}{\partial h} + h \cos \theta \frac{\partial \lambda}{\partial h} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{u_m}{2g} \frac{\partial \beta}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} \\ & + \left\{ \frac{(\beta - \alpha)}{2g} \frac{u_m}{A} + \frac{h \cos \theta (1 - \lambda)}{u_m A} \right\} \frac{\partial A}{\partial t} = \sin \theta - \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (109)$$

と表わされ、定常的な流れよりの微小変動 h' , u' に対する状態は上式と連続方程式とよりいずれか一方の変動を消去した、たとえば水深の微小変動に対するつぎの線型化方程式によって示される。

$$R \left(\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \right) + S \left(\frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} \right) + T \left(\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} \right) + \dots \dots \dots = 0 \quad (110)$$

ここに、

$$\begin{aligned} R &= \frac{\lambda_c \cos \theta_c}{A_c^3} \left\{ A_c^3 \left[1 + \frac{h_c}{\lambda_c} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial h} \right)_c \right] - \frac{Q_c^2}{\lambda_c g \cos \theta_c} \left\{ \alpha_c \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_c - \frac{A_c}{2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial h} \right)_c \right\} \right\}, \\ S &= \frac{h_c \cos \theta_c (1 - \lambda_c)}{Q_c} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_c - (\beta_c + 3\alpha_c) \frac{Q_c}{2g A_c^2} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_c + \frac{Q_c}{2g A_c} \left(\frac{\partial \beta}{\partial h} \right)_c, \\ T &= - \frac{\beta_c}{g A_c} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_c \end{aligned}$$

である。添字の c は最初に与えた定常的な流れの状態を示している。(110)式より明らかなように、この式が双曲型であれば微小擾乱 h' の伝ばん速度 v_w は

$$v_w = \frac{(S \pm \sqrt{S^2 - 4RT})}{2T} \quad (111)$$

であり、上流側への擾乱の伝ばんが停止する条件は $R = 0$ より

$$A_c^3 \left\{ 1 + \frac{h_c}{\lambda_c} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial h} \right)_c \right\} = \frac{Q_c^2}{\lambda_c g \cos \theta_c} \left\{ \alpha_c \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_c - \frac{A_c}{2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial h} \right)_c \right\}$$

であり、これは (99)式を0とおいたすなわち、エネルギー解析法における Bresse の定義と一致することがわかる⁹⁾。したがって、厳密にはいえないが、非定常流れに対する限界水深の定義も定常流におけるそれと同じであると考えて差支えない。全く同様にして、運動量解析法によるものからも同じ結果がえられる⁹⁾。

3. 常流と射流

いま、ある流れの水深がこれまでに定義した限界水深より大きいかわるいは小さいかによって、流れは常流か射流かに分類される。前節の(3)項よりわかるように、常流の流れでは下流の影響が上流に伝わるが、射流の流れでは伝わらず、上流側の影響のみが伝ばんされる。このことは、普通には常流では downstream control, 射流では upstream control といわれるところである。

常流の流れは、その全水頭のうち運動エネルギーによるものがきわめて小さく、大半は流体圧と位置による水頭である。しかし、限界状態に近づくと、運動エネルギーの占める割合が次第に大きくなり、射流ではさらにこの割合が大となり、エネルギー変化はほとんど流速の変化になることは、比エネルギーに関する (102)式を $H_0 \sim h$ 平面で解析すれば容易に理解される。

実際にあらわれる物理現象より常流か射流かの流れの判断はむずかしいが、普通の水路や河川の流れは上流部を除いて常流であり、限界状態に近づくと水面は波状を呈すようになる。ところが流れが射流になれば、ふたたび水面形は滑かになる。しかし、流れそのものの不安定性による転波や水路の境界面変化にともなう衝撃波の発生は射流のみにあらわれる特異な現象である。

4. 最大流量・最小エネルギーの同時生起性に関する Jaeger の一般理論とその拡張

第2節で示した限界水深の定義には各種のものがあ、り、これらが開水路流れの第1次近似理論として用いられ

る流休圧を静水圧とする平行流(漸変流)では同一のものを表わすことはすでに古くより知られている。さらに、流れが平行流のみならず曲線流(越流頂を越える流れなどのように流体圧が静水圧的でない流れ)に対しても拡張され、その結果としてBélangerの定理とBössの定理との同時生起性をあらわした最大流量・最小エネルギー同時生起性に関するJaegerの一般理論⁹⁾が今日では限界水深あるいはさらに支配断面の水理学の根本原理と考えられている。

すなわち、比エネルギー H_0 は(102)式に示されるように、流量、水深および水路の特性などによって表わされ、一般的には

$$F(H_0, Q, h, A, \theta, \dots) = 0 \quad (112)$$

である。いま、一定の流量に対して、Bössの定理は(112)式より

$$\left(\frac{\partial H_0}{\partial h}\right)_e = - \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial h}\right)_e + \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_e \left(\frac{\partial A}{\partial h}\right)_e + \dots \right\} / \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial H_0}\right)_e + \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_e \left(\frac{\partial A}{\partial H_0}\right)_e + \dots \right\} = 0$$

ところが、上式の分母は0でないから、結局、

$$\left(\frac{\partial F}{\partial h}\right)_e + \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_e \left(\frac{\partial A}{\partial h}\right)_e + \dots = 0 \quad (113)$$

である。一方、一定の比エネルギー H_0 に対して、Bélangerの定理を示すと、

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial h}\right)_e = - \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial h}\right)_e + \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_e \left(\frac{\partial A}{\partial h}\right)_e + \dots \right\} / \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial Q}\right)_e + \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_e \left(\frac{\partial A}{\partial Q}\right)_e + \dots \right\} = 0$$

全く同様に、上式の分母は0でないから、結局

$$\left(\frac{\partial H_0}{\partial h}\right)_e = \left(\frac{\partial Q}{\partial h}\right)_e \quad (114)$$

となり、Bélangerの定理とBössの定理との同時生起性が示されたことになる。

Bresse による定義とBössの定理とが同一の条件を表わすことは、比エネルギー H_0 に関する定常流の基礎方程式より H_0 を消去する過程において明らかである。また一方、非定常運動理論による限界水深の定義が Bresse のものと同一であることはすでに示したから、エネルギー的解析法における限界水深の定義はすべて等しいことをいって表わしていることになる。

もともと、Jaeger の Bélanger-Böss の定理に関する一般理論は流量が一定の定常流において示されてきたものであるが、本章で示した(98)~(103)式より明らかのように流量が場所的に変化する定常流であっても、限界水深に関する諸定理は同じことを表わしている。これは、Jaegerの一般理論のいわば拡張というべきものであろう。

以上のエネルギー的考察より離れて、運動量的解析法を用いると、一様な水路では最大流量・最小比力の同時生起性の原理が支配断面で成立することが証明される。

ところが、ここで取り扱っているエネルギー的解析法と運動量的解析法とはそれぞれ力学的な取り扱いが異なっているため、両者の同時生起性は論じられない。こうしたエネルギー的解析と運動量的解析との関連を論ずるものに Boussinesq の安定性問題¹⁰⁾などがある。

C. せん移現象に関する一般理論

1. せん移現象

限りなく長い一様な水路に一定の流量の水が流れると、流れは流量、水路の特性によって定まる常流か射流の定常等流となることが予想される。この水路に何らかの水理構造物が設置されたり、あるいは底こう配が変わり支配断面があらわれると、流れは常流から射流、あるいは射流から常流へと変化する。天然の河道はもちろんのこと、たとえ人工水路であっても、ほとんど例外なく水路は一様でないから、流れは常にその状態を変えるのが普通である。このように、流れは一般に 1) 1つの常流より他の常流, 2) 常流より射流, 3) 射流より常流, 4) 1つの射流より他の射流へと変わる。このような現象を流れのせん移と呼ぶことがある。

このような流れの連続的なせん移の理論的解析は、いわゆる特異点の方法、すなわち定常流の基礎方程式としての Autonomous equation の特異点の性質を理論的に解明することによってえられる。以下ここでは、その

理論的解析法についてその基礎を示そう。

2. 特異点の数学的理論

特異点に関する数学的理論は、Poincaré 以来多くの数学者によって著るしく展開されてきたが、今日工学的には非線型力学の解析において、電気、機械、建築などの各分野で広く応用されている。しかし、その数学的理論が完成されているのは二次元問題、すなわち 2 個の連立常微分方程式を取り扱うもので、 n 次元空間におけるものは未だ十分とはいわれないようである。もちろん、われわれの取り扱う定常流の水理学における特異点の理論もほとんどが二次元問題であって、数値解析よりも数学における定性的理論の水理学的な解釈に重点がおかれる。このため、ここではまず常微分方程式系におけるその定性論を簡単に示そう。

(1) 常数係数をもった常微分方程式系の定性的理論

たとえば、定常流に対するエネルギー的解析法の基礎方程式は (98)～(100) 式で与えられるように、非線型方程式である。いま、これらの式の右辺を 0 とおいてえられる解が特異点であるが、特異点のごく近傍における基礎方程式 (98)～(100) 式の挙動はこの点の近傍でえられる線型化方程式のそれによって十分に表わされよう。こうした点を前提として考えると、特異点のまわりにおける解は常数係数をもったつぎの線型化常微分方程式の性質によって規定される。

$a_{11}, \dots, a_{nn}$ を常数とする n 個の連立方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \dots + a_{1n}z_n \\ &\vdots \\ \frac{dz_n}{dt} &= a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \dots + a_{nn}z_n \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

は、普通簡単にベクトル・マトリックス表示によって

$$\frac{dz}{dt} = Az \quad (116)$$

と書かれる。ここに、 z は n 次元列ベクトル、 A は n 次のマトリックスである。いま、 A の特性方程式

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (117)$$

の根は一般に複素数であるが、この関係を用いると、(115)式は Jordan の標準形（規準形ともいう）をもつものに変換され、微分方程式系の性質が論じられる。ここに、 I は単位マトリックスである。

n 個の特性方程式の解を $\gamma_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \dots, \gamma_n = \alpha_n + i\beta_n$ 、とすると、つぎの 6 種類の分類が考えられる。

- 1) $\alpha_k \neq 0, \alpha_k \alpha_j > 0, k, j = 1, \dots, n$
- 2) $\alpha_k \neq 0, k = 1, \dots, n$ でかつ $\alpha_m \alpha_j < 0$ となる m, j が存在する。
- 3) $\gamma_k \neq 0, \alpha_k \alpha_j \geq 0, k, j = 1, \dots, n$ でかつ $\alpha_q = 0$ が存在する。
- 4) $\gamma_k \neq 0, k = 1, \dots, n$ でかつ $\alpha_m \alpha_j < 0, \alpha_q = 0$ となるような m, j, q が存在する。
- 5) $\gamma_k \neq 0, \alpha_k = 0, k = 1, \dots, n$
- 6) γ_i の少なくとも 1 つは 0 である。¹¹⁾

これらのそれぞれに対し、数学的理論ではつぎのようにいわれる。第 1 の分類のとき、特異点である原点は一般化された結節点 (generalized node) であるといわれる。第 2 のものは、原点を第 1 種の一般化された鞍形点 (generalized saddle point of the first kind) となる。第 3 の分類では、純虚根数 $2p$ とその虚根に対応する基本除数の数 $2q$ との差により、 $2p = 2q$ のとき原点は一般化された渦状点 (generalized focus)、また $2p > 2q$ のとき第 2 種の鞍形点となる。第 4 の分類に属するとき、原点は複合鞍形点 (composite saddle point) であり、第 5 の分類は n が偶数のときにのみ可能であって、一般化された渦心点 (generalized vortex) か第 3 種の一般化された鞍形点であらわれ、これらは基本除数が線型であるか否か ($2q \geq 2p = n$) による。最後に第 6 の分類では、0 となる根の数だけ次元数が減少し、減少された空間ですでに示したどれかとなる。また事実、この場合の原点は孤立特異点ではない。

(2) 常数係数をもつ2微分方程式系の定性的理論、以上は n 次元空間におけるものであったが、われわれが実際に応用する理論は二次元のものである。したがって、ここではその概略を示すにとどめよう。

$n=2$ であるから、(115)式は

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} &= a_{21}z_1 + a_{22}z_2 \end{aligned} \quad (118)$$

である。この特性方程式は明らかに

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (119)$$

であり、特性根の性質によりつぎのように分類される。

- (1) 特性根が同符号の2実根をもつとき、(119)式の判別式は正であり、 $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})>0$ である。このとき、特異点は結節点といわれる。
- (2) 特性根が異符号の2実根をもつとき、1) と逆に $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})<0$ であり、特異点は鞍形点といわれる。
- (3) 特性根が共役複素数であれば、(119)式の判別式は負となり、特異点は渦状点といわれる。
- (4) 特性根が純虚数であれば、すなわち、 $(a_{11}+a_{22})=0$ のとき、特異点は渦心点といわれる。

3. 二次元理論の開水路定常流への応用

たとえばエネルギー解析法における基礎方程式のように、われわれの対象とする定常流は一般的に3個の微分方程式系より成り立っている。しかし、水理学において取り扱う問題のほとんど大半は、流量が一定な定常流の挙動、一様な水路における流量が場所的に変化する定常流のそれなどであって、これらは二次元問題、すなわち2微分方程式系に変換される。事実、三次元以上の問題の工学的応用はまだ十分なされていない。ここでは、以上のことから、二次元理論における特異点の挙動とその開水路定常流理論への適用¹²⁾について示そう。

特異点が鞍形点であれば、この点を通る(118)式の解としての積分曲線は2個であって、これらの曲線によってわけられた4つの領域の曲線は他の領域へ移らない(図-6)。鞍形点を通る解の1つが求める水面形曲線となれば、鞍形点は支配断面の位置を与え、流れは常流より射流へと滑らかにせん移する。したがって、この点は水面形計算の出発点となり、それぞれ上・下流方向にむかって計算しなければならない。一方、鞍形点を通るもう1つの解は流れが下流端条件によって自由流れとなるかもぐり流れとなるかの限界状態を表わす水面形曲線となる。

特異点が結節点であれば、この点の近傍を通る積分曲線はすべてこの点を通り、同一のこう配をもっている(図-7)。結節点は水面形計算の終点であって、上・下流方向より計算がすすめられる。しかし実際には、上・下流より追跡された水面形が互いに共役関係になるところで跳水によって射流から常流へと急激にせん移する。すなわち、流れは基礎方程式の示す結節点により射流より一般に跳水現象

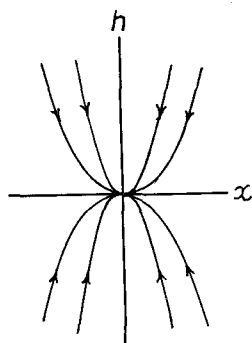


図-7 結節点

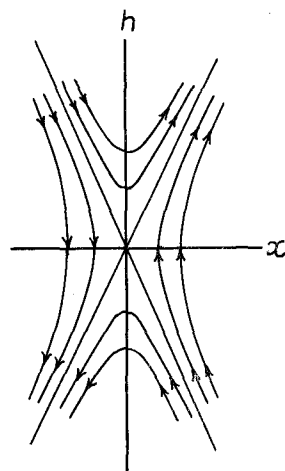


図-6 鞍形点

を通して常流に変わり、結節点を通る水面形はないということが出来る。理論的には、結節点は射流より滑らかに常流にせん移する流れを生ぜしめるが、計算上きわめて小さな範囲であり、また実験的に確認はされていないが、開水路水理学で取り扱う第一次近似理論で無視された種々の影響による不安定性のため、むずかしいと想像される。

特異点が渦状点であれば、すべての積分曲線は対数らせんを描く。この場合、

理論上同一断面で無数の水深が対応するが、実際には流れは射流から常流へ不連続的に跳水現象によってせん移し、渦状点は実際上結節点と似た挙動を示す (図-8)。また渦心点は実際におこりえない (図-9)。

4. 跳水現象

前節において示した各種のせん移過程のうち、跳水現象は流れが射流から常流へせん移するときにあられる急激な水面形の変化過程である。跳水現象の解析は、周知のように、運動量保存の法則を利用して行なわれる。

いま簡単のため、一様水路におけるものを取り扱おうと、境界面における抵抗力および流出入流量を無視して、(108)および(109)式は

$$\frac{dM_0}{dx} = \sin\theta \cdot A, \quad M_0 = \frac{\beta Q^2}{gA} + \lambda' \cos\theta \cdot h_g A$$

となる。跳水の長さを L 、また跳水をはさむ上・下流断面で圧力分布は静水圧の法則に従がうとすると、上の2式を連立して解き、

$$\frac{A_2(h_{g2}A_2 - h_{g1}A_1)}{h_{g1}A_1(A_2 - A_1)} = 2G_1^2, \quad (120)$$

$$2G_1^2 = 2F_1^2 / \left\{ 1 - \frac{\tan\theta KL}{2(h_{g2}A_2 - h_{g1}A_1)} (A_1 + A_2) \right\} \quad (121)$$

$$2F_1^2 = \frac{\beta u_{m1}^2}{gh_{g1} \cos\theta} \quad (122)$$

がえられる。ここに、添字の1, 2は上・下流断面におけるもので、 K は実験的に決定される係数で2断面間の水の自重に対する補正係数である。

もちろん、この式は水平底において $G_1 = F_1$ となり、また水路断面が長方形であればよく知られた跳水公式がえられる。実際には、跳水はFroude数によって種々の型式のものがあらわれることが知られている¹³⁾が、ここで示した解は $F_1 = 4.5 \sim 9.0$ のとき利用される。波状跳水といわれる波動水面による跳水は静水圧の法則を用いた比力の関係よりえられない。波動解は鉛

直加速度を無視しない非静水圧分布則よりえられるもので、一般には楕円関数によって展開され、その線型理論は Boussinesq の解析¹⁴⁾のように三角関数による波動解を生ずる。

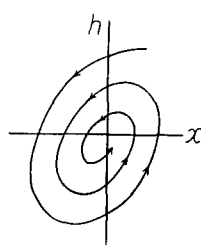


図-8 渦状点

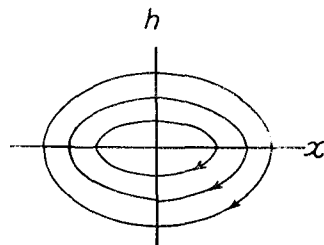


図-9 渦心点

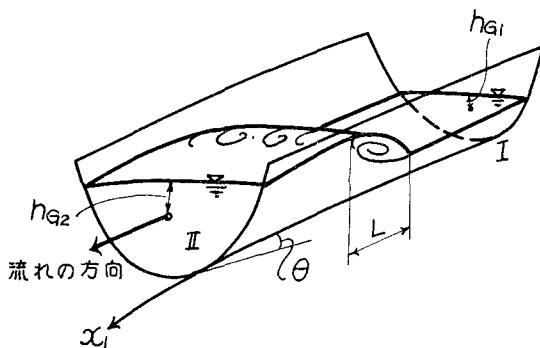


図-10 跳水現象

第2章 流量が一定な漸変流の理論

流れの状態が時間に無関係な定常流であっても、(90)式からわかるように流量が一定である場合とない場合がある。前者は普通の定常流であるが、横越流ぜきに沿う流れのような場合が後者の例である。ここでは、流量が一定な漸変流について、その理論的な取り扱いを示そう。もちろん、漸変流とは、さきに述べたように、 $\lambda = \lambda' = 1$ およびさらに α と β とは一定という条件が加えられることはいうまでもない。

つぎに、水路の特性に関し、その幾何学的形状と底こう配とが流下方向に変わらないとき、水路は一様である

という。また、これら両者はもちろんのこと、いずれか一方の条件も満たされないとき、水路は一樣でないという。したがって、一樣水路は人工水路のなかでもごく稀れであって、普通には水路は一樣でないと考えて差支えない。しかし、一樣水路における流れはもっとも単純なモデルであって、一樣でない水路における流れの理論もこれから構成されるといってもよい。ここでは、まず一樣水路における定常等流の理論を取り扱い、ついでこの水路における漸変流の理論を、最後に一樣でない水路における漸変流の理論を示すことにする。

A. 定常等流理論

1. 定常等流における抵抗法則

すでに述べたように、定常等流とは流れの様相が時間的にも場所的にも変化しないもの、すなわち流れの全域にわたって一定の状態の流れである。このような場合、解析法としてより仮定の少ない運動量の解析法が便利であって、(104)式より

$$\sin \theta - \frac{\tau_b}{\rho g R} = 0 \quad (123)$$

がえられる。これは、重力によるものと境界面に沿って流れの方向と逆向きに作用する抵抗力とが釣り合っていることを表わし、一般に Brahms の原理¹⁵⁾といわれている。ここに、 τ_b は境界面にそう抵抗力である。

(123)式が定常等流の抵抗法則を表わすためには、抵抗力と流速などの流れの特性とを関係づけなければならない。この関連を取り扱う理論的解析法は現象論的解析法といわれ、次節で述べることにする。

一方、乱流場における抵抗力は流速の2乗に比例することはよく知られているが、この概念を最初に導入したのが Chézy であって、流れに抵抗する境界面の単位面積当りの力は平均流速の2乗に比例するというのである。この Chézy の仮定とさきに示した Brahms の原理とを組み合わせると、いわゆる Chézy の公式がえられる。この場合、最も重要なものが比例常数であって、従来より多くの研究者により、Ganguillet-Kutter 公式、Bazin 公式などの経験公式や、現象論的解析法より誘導される対数法則を用いる半経験公式などがある。

現在最も広く用いられる抵抗法則としての平均流速公式は Manning 公式であって、これはもともと経験的にえられたものである。しかし、Lindquist¹⁶⁾の提案以来この公式の国際的使用が唱えられるとともに、対数法則による結果と比較的よく一致するから、今日では例外なく使用される。したがって、Manning 公式における粗度係数には多種の境界面について調査され、ぼう大な資料がえられている。

しかし実際には、抵抗法則としての流速公式の解明は水理学において最もむずかしいもので、これらの公式にも多くの問題点が残されており、これは水理学とともに永久に残される基本課題であろう。

2. 定常等流における流速分布

前節では、開水路における乱流状態の流れの最も単純なモデルの釣り合い関係を巨視的にみたものである。しかし、乱れの場合におけるその発生にともなう諸現象は説明されない。こうした問題の取り扱いはいわゆる乱流理論におけるものであるが、乱れの場合における解析法の1つに現象論的解析法といわれるものがある。これは、もともと乱流せん断流において流速の異なる領域間で流体輸送があるという事実、また、したがって混合過程と速度こう配とは互いに関連をもっている事実の観測よりえられたもので、古くは Saint Venant に初まり、Boussinesq の完成した渦動粘性の概念がある。

乱れの場合における平均流の流速分布を知るためには、平均流の流速と変動流速との関係を知らなければならない。Prandtl は、気体分子運動論における概念より、混合距離を用いて運動量輸送の理論を立て、境界面近くの流速分布をえ、Taylor は渦度輸送の理論を立て、ある場合にはこの両者が一致することを示した。一方、Kármán は乱れの特性を平均流のそれとより関係づけ、力学的相似の理論を取り扱っていることは周知のとおりである。これらの現象論的解析は乱れの構造について多くの問題点もあるが、きわめて簡単な対数型の流速分布式によって平均流が表わされる。

流れが二次元的であるとすると、定常等流状態における基礎方程式は、(66)および(67)式より、

$$0 = \rho g \sin \theta + \frac{d}{dy} (\bar{\tau}_{yx} - \rho \bar{u}'v'), \quad (124)$$

$$0 = -\rho g \cos \theta - \frac{d\bar{p}}{dy} + \frac{d}{dy} (\bar{\sigma}_y - \rho \bar{v}'v') \quad (125)$$

ここに、 y 軸は水路底より上向きにとっている。(125)式を任意の y より自由表面 h まで積分すると、粘性による直応力を無視して、

$$\bar{p} = \rho g \cos \theta (h - y) + (|\rho \bar{v}'v'|_h - |\rho \bar{v}'v'|_y) \quad (126)$$

となる、Reichardt¹⁷⁾ や Laufer¹⁸⁾ の実験によれば、境界面より離れると、 $(\rho \bar{v}'v')$ の値はあまり変化せず、乱れの場合においても圧力分布は静水圧的であると考えてよいことがわかる。また、(124) 式より、自由表面でせん断力を 0 とすると、

$$\bar{\tau}_{yx} - \rho \bar{u}'v' = \rho g \sin \theta (h - y) = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (127)$$

である。いま、Kármán の力学的相似理論を用いると、完全乱流場では

$$-\rho \bar{u}'v' = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{h}\right), \quad l = \kappa \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right) / \left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right) \quad (128)$$

となり、完全乱流場の下限 $y=\delta$ で $(d\bar{u}/dy)_{y=\delta}=\infty$ という条件より¹⁹⁾

$$\frac{\bar{u}_s - \bar{u}}{u^*} = -\frac{1}{\kappa} \left\{ \sqrt{1 - \frac{y}{h}} + \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y}{h}}\right) \right\} \quad (129)$$

という対数型の流速分布式、defect law がえられる。ここに、 u^* は摩擦速度、 $\bar{u}_s$ は表面流速、 κ は Kármán 常数である。

なお、 $l=\kappa y$ とおけば Prandtl 型のもの、

$$\frac{\bar{u}_s - \bar{u}}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \left\{ \ln \frac{(1 + \sqrt{1 - y/h})}{(1 - \sqrt{1 - y/h})} - 2 \sqrt{1 - \frac{y}{h}} \right\} \quad (130)$$

がえられる。

一方、二次元流れの変動流のエネルギー式において、変動の発生量を $\bar{E}_R'$ 、変動圧のなす仕事を $\bar{E}_P'$ 、変動のもつ運動エネルギーの拡散を $\bar{E}_F'$ 、乱れの粘性による仕事を $\bar{E}_V'$ 、およびそのエネルギー散逸を $\bar{E}_D'$ 、とすると、Laufer の実験を参考として、

$$1) \text{ 境界面の近傍領域では } \bar{E}_R' \sim \bar{E}_P' + \bar{E}_F' + \bar{E}_V' + \bar{E}_D'$$

$$2) \text{ やや離れた領域では } \bar{E}_R' \sim \bar{E}_D'$$

$$3) \text{ 中央領域 (central or outer) では } \bar{E}_F' \sim \bar{E}_D'$$

と考えられる。開水路の流れでは、第 2 の領域がきわめて卓越し、 $\bar{E}_D'$ が乱れの強さの 3 乗に比例し、しかも乱れの強さは境界面の状態に無関係で、深さに関連をもつことから、(129) あるいは (130) 式と同じ流速分布式がえられる。しかし、開水路流れの実験よりこれらの両者を比較すると、Kármán 型のものがより好ましいことが知られている。

以上の誘導は、二次元流れにおけるものであるが、三次元的要素の卓越する開水路流れでは、径深 R が水深 h の代りに用いられることが多い。また、前節で示した平均流速との関連は、ここで示した平均流の流速分布式を断面全体にわたって平均操作をすればえられる。

3. 定常等流の不安定性

急こう配水路における定常等流の不安定性は、水工学上にあらわれる問題ではあまり重要でないが、開水路水理学における基礎理論では興味深いものである。これは、急こう配水路では定常等流状態の流れはおこらず、流れは常に不安定となり、ついに転波が発生するという現象である。理論的解析上、定常等流の不安定性は、層流から乱流へうつる流体力学的安定性 (Hydrodynamic stability) の数学的手段と同様に、流れに加えられた微小擾乱が時間的に発達するかしないかによって取り扱われる。

岩佐²⁰⁾は(90)および(92)式において定常等流状態よりの微小変化を示す線型化方程式を誘導し、上に述べた微小擾乱の時間的発達あるいは減衰を論じた。この結果は、Vedernikov が初めて誘導した Vedernikov 数 Ve

$$Ve = \frac{r(1+b)u_m}{a(v_w - u_m)} \geq 1. \quad (131)$$

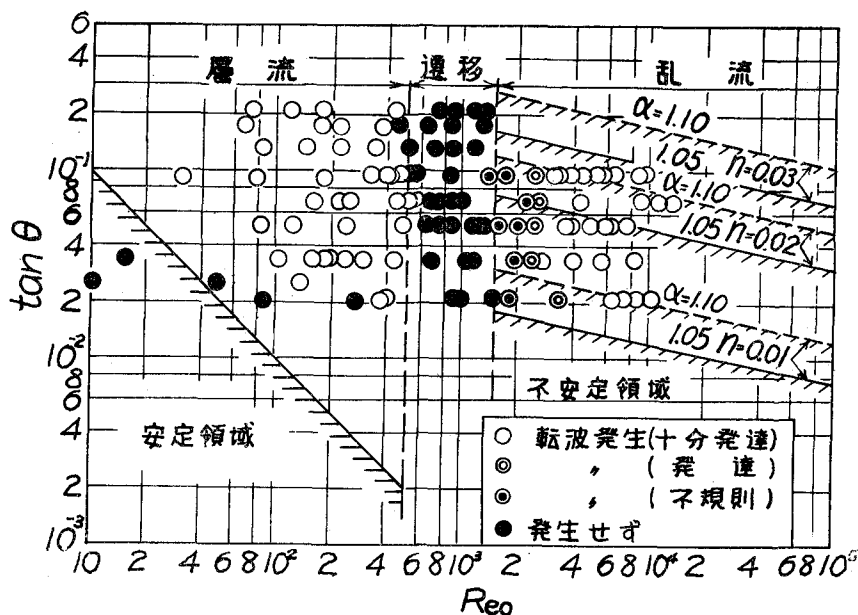


図-11 急こう配水路における流れの不安定性

である。ここに、 v_w :微小擾乱波の伝はん速度、 u_m :等流流速、 a, b :平均流速公式を $u_m^a = (1/k) R^{1+b} \sin^m \theta$ と表わしたときの指数である。流れの不安定性に関連する水工学的諸問題は別として、その理論的解析に関する問題を示すつつぎのようになる。

従来の理論的研究の基礎方程式は静水圧法則による運動量方程式あるいはエネルギー方程式であって、微小振幅の方法を応用すると、不安定性の下限は求められるが、その上限はえられない。これは基礎方程式のもつ性質によるものと思われる。事実、たとえば流体圧に鉛直加速度による影響として水面こう配を導入すると、安定性限界における擾乱の周波数が Vedernikov 数に加えられる。しかし、開水路流れにおこる擾乱が乱れや境界特性とどのような関係をもつかが未解決であり、単なる数学的演算にすぎない。また、抵抗法則によって、不安定性に対する流れの影響も異なり、これらの問題が不安定性理論における重要な研究課題となることが想像される。

B. 一様水路における漸変流の理論

1. 基礎方程式とその特性

一様水路における漸変流の基礎方程式は、エネルギー的解析法によれば、(98)および(99)式より、

$$\frac{dh}{dx} = \sin \theta - \frac{Q^2}{C^2 R A^2} \quad (132)$$

$$\frac{dx}{dx} = \cos \theta - \frac{\alpha Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial h} \quad (133)$$

あるいは、比エネルギー H_0 による表示として、

$$\frac{dH_0}{dx} = \sin \theta - \frac{Q^2}{C^2 R A^2} \quad (134)$$

$$H_0 = \frac{\alpha Q^2}{2g A^2} + h \cos \theta \quad (135)$$

である。ここに、Chézy の係数 C は(123)式に示す運動量的な意味と異なり、運動量の係数に (u_0/u_m) を乗

じたものとして解釈しなければならない。

2種類の基礎方程式のうち、実用的な数値計算では比エネルギーを用いることが多いが、理論的考察をすすめるには、前者の(132)および(133)式を用いなければならない。 $\sin\theta > 0$ に対して、等流水深および限界水深が存在し、 $\sin\theta=0$ および <0 より、一様水路における水路の分類は、1) 急こう配、2) 限界こう配、3) 緩こう配、4) 水平、および 5) 逆こう配の5種になることはよく知られた事実であり、しかも基本式の右辺が水深のみの関数であるから、流れの全域に亘って x に無関係である。

いま、基本式に特異点があるものとする、(132)および(133)式が同時に0となることから、これは限界こう配すなわち、

$$i = g A_c / C_c^2 R_c \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_c \quad (136)$$

でなければならない。したがって、特異点の近傍では、 $h = h_c + h'$, $x = x_c + x'$ (x_c はこの場合意味はない) とおいて基本式を線型化すると、

$$\frac{dx'}{dX} = \cos \theta \frac{M_c}{h_c} h', \quad (137)$$

$$\frac{dh'}{dX} = \sin \theta \frac{N_c}{h_c} h', \quad (138)$$

となる。ここに、 M_c , N_c は後に示す限界流計算のための水力指数および等流計算に対する水力指数の特異点における値、

$$M_c = \frac{h_c}{A_c} \left\{ 3 \left(\frac{dA}{dh} \right)_c - A_c \left(\frac{d^2 A}{dh^2} \right)_c / \left(\frac{dA}{dh} \right)_c \right\}, \quad (139)$$

$$N_c = \frac{2h_c}{A_c} \left\{ \frac{A_c}{C_c} \left(\frac{dC}{dh} \right)_c + \left(1 + \frac{r_c}{2} \right) \left(\frac{dA}{dh} \right)_c \right\}, \quad (140)$$

$$r_c = 1 - R_c \left(\frac{ds}{dA} \right)_c = s_c \left(\frac{dR}{dA} \right)_c \quad (141)$$

である。したがって、特異点は $h'=0$ すなわち $h=h_c$ という直線を形成し、この近傍では積分曲線は

$$h' - i \left(\frac{N}{M} \right)_c x' = 0$$

表-1 一様水路における水面形の分類

水路の分類	水面形状	水深 h の h_0, h_c に対する関係	水面こう配	水面形の種類	流れの分類
急こう配水路	S-1	$h > h_c > h_0$	+	せき上げ背水曲線*	常流
	S-2	$h_c > h > h_0$	-	低下背水曲線*	射流
	S-3	$h_c > h_0 > h$	+	せき上げ背水曲線	射流
限界こう配水路	C-1	$h > h_c = h_0$	+	せき上げ背水曲線	常流
	C-2	$h = h_c = h_0$	0	水路底に平行	限界等流
	C-3	$h_c = h_0 > h$	+	せき上げ背水曲線	射流
緩こう配水路	M-1	$h > h_0 > h_c$	+	せき上げ背水曲線	常流
	M-2	$h_0 > h > h_c$	-	低下背水曲線	常流
	M-3	$h_0 > h_c > h$	+	せき上げ背水曲線	射流
水平水路	H-2	$h_0 = \infty > h > h_c$	-	低下背水曲線	常流
	H-3	$h_0 = \infty > h_c > h$	+	せき上げ背水曲線	射流
逆こう配水路	A-2	$h > h_c$	-	低下背水曲線	常流
	A-3	$h_c > h$	+	せき上げ背水曲線	射流

* 下流に向って水深が増加する水面形をせき上げ背水曲線といい、逆に減少するものを低下背水曲線という。

で表わされる。もし、 $N=M$ ならば水平直線群を形成し、幅の広い水路における Chézy の流れの示す C-1, C-3 曲線に外ならない。

以上のことから、一様水路における漸変流の水面形状を分類すれば、周知のように表-1 によって与えられる。

2. 解析的計算法

基本式 (132) および(133)式はそのまま数値積分によって容易に解かれるが、種々の水路の特性に対する解析を簡単ならしめるため、多くの方法が講じられているが、最も都合がよいのは Chow の方法²¹⁾として知られているものである。すなわち、断面係数 (section factor) Z および通水能(conveyance) K をつぎのように導入すると、

$$Z^2 = A^3 / \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right) = C_1 h^M, \quad K^2 = C^2 R A^2 = C_2 h^N \quad (142)$$

限界水深 h_0 における Z および等流水深 h_0 における K はそれぞれ

$$Z_0^2 = A_0^3 / \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_0 = \frac{\alpha Q^2}{g \cos \theta}, \quad K_0^2 = C_0^2 R_0 A_0^2 = \frac{Q^2}{\sin \theta} \quad (143)$$

である。ここに、 M および N は水理係数である。

これらの関係を用いると、基本式は

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - (K_0/K)^2}{1 - (Z_0/Z)^2} = i \frac{1 - (h_0/h)^N}{1 - (h_0/h)^M} \quad (144)$$

となり、これを解いて、

$$dx = \frac{h_0}{i} \left\{ \left(1 - \frac{1}{1-u^N} \right) du + \frac{J}{N} \left(\frac{h_0}{h_0} \right)^M \frac{dv}{1-v^J} \right\} \quad (145)$$

がえられる。ここに、 $u=h/h_0$, $v^{J/N}=u$, $J=N/(N-M+1)$ である。この解がいわゆる Chow の方法であるが、実際には M, N , またしたがって J が水深 h の関数であるため、近似化して一定という仮定より計算しなければならない。しかし、この方法は最も一般的であって、多くの参考書に記載されている Bresse や Tolkmitt の公式などはその特殊な解である。

C. 一様でない水路における漸変流の理論

1. 基礎方程式とその水理学的特徴

(1) 基礎方程式 一様でない水路における漸変流の基礎方程式は、(98)および(99)式より

$$\frac{dh}{dX} = \sin \theta (1 + \kappa h) - \frac{Q^2}{C^2 R A^2} + \frac{\alpha Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (146)$$

$$\frac{dx}{dX} = \cos \theta - \frac{\alpha Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial h} \quad (147)$$

である。比エネルギー H_0 を用いて表わせれば、基礎方程式そのものは一様水路におけるものと同じ形である。基礎方程式は autonomous equation であって、これまでに示した2常微分方程式系の数学的理論が用いられ、その解析結果を物理的に解釈すれば一様でない水路における漸変流の水理学的特性が明らかにされるはずである。

ここでは、以上に示した意味から、特異点の理論より漸変流のもつ水理学的特性について考察をすすめる。

(2) 特異点とその近傍における水面形方程式 等流水深および限界水深は (146)および(147)式をそれぞれにおいてえられるが、その解は $x-h$ 平面で2つの曲線となる。この両曲線の交点は基礎方程式の特異点であって、その位置は、

$$(1 + \kappa_c h_0) \sin \theta_0 = \frac{Q^2}{C_c^2 R_c A_c^2} - \frac{\alpha Q^2}{g A_c^3} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_c \quad (148)$$

$$\cos \theta_0 = \frac{\alpha Q^2}{g A_c^3} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_c \quad (149)$$

である。ここに添字の c は特異点を意味する。

特異点の性質とその水理学的意義を明らかにするためには、特異点の近傍における基礎方程式の挙動を調べなければならない。しかし、基礎方程式は非線型であるから、その挙動も複雑である。いま、特異点のごく近傍のみを考えると、基礎方程式を線型化した近似方程式によって、その挙動が表わされる。このため、座標系の原点

を特異点に移動させると,

$$x = x_0 + x', \quad h = h_0 + h', \quad \chi = \chi_0 + \chi' \quad (150)$$

において, つぎの線型化方程式がえられる。

$$\frac{dx'}{d\chi'} = a_{11}\chi' + a_{12}h', \quad (151)$$

$$\frac{dh'}{d\chi'} = a_{21}\chi' + a_{22}h' \quad (152)$$

ここに, 係数 a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} は常数であって, それぞれつぎのように表わされる。

$$a_{11} = -\kappa_0 \sin \theta_0 + \frac{3\alpha Q^2}{gA_0^4} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_0 \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_0 - \frac{\alpha Q^2}{gA_0^3} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial h} \right)_0, \quad (153)$$

$$a_{12} = \frac{3\alpha Q^2}{gA_0^4} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_0^2 - \frac{\alpha Q^2}{gA_0^3} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial h^2} \right)_0, \quad (154)$$

$$a_{21} = \kappa_0 \cos \theta_0 + h_0 \kappa_0^2 \cos \theta_0 + h_0 \sin \theta_0 \left(\frac{\partial \kappa}{\partial x} \right)_0 + \frac{Q^2}{C_0^2 R_0 A_0^2} \left\{ \frac{2}{C_0} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_0 \right. \\ \left. + \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)_0 + \frac{2}{A_0} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_0 \right\} - \frac{3\alpha Q^2}{gA_0^4} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_0^2 + \frac{\alpha Q^2}{gA_0^3} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right)_0, \quad (155)$$

$$a_{22} = \kappa_0 \sin \theta_0 + \frac{Q^2}{C_0^2 R_0 A_0^2} \left\{ \frac{2}{C_0} \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_0 + \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial R}{\partial h} \right)_0 + \frac{2}{A_0} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_0 \right\} \\ - \frac{3\alpha Q^2}{gA_0^4} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_0 \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_0 + \frac{\alpha Q^2}{gA_0^3} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial h} \right)_0. \quad (156)$$

これらの常数係数をもった(151)および(152)式を第2編第1章に示した方法で解析すれば特異点の種類とその水理学的意義も明らかにされる。

(3) 鞍形点の水理学的意義 特性方程式(119)は符号の異なる2実根をもつが, 正根を λ_2 , 負根を λ_1 , とすれば, $x' = (\lambda_2 - a_{11})\xi + (\lambda_1 - a_{11})\eta$, $h' = -a_{21}\xi - a_{21}\eta$ という一次変換によって(151)および(152)式を標準化して, 鞍形点を通る2個の積分曲線のもつこう配は

$$\left(\frac{dh'}{dx'} \right)_{c1} = -\frac{a_{21}}{\lambda_2 - a_{11}}, \quad \left(\frac{dh'}{dx'} \right)_{c2} = -\frac{a_{21}}{\lambda_1 - a_{11}} \quad (157)$$

によって計算されることがわかる。前者のこう配をもつ曲線を C1-曲線, また後者のものを C2-曲線とすると, a_{12} の正あるいは負によって, C1-あるいは C2-曲線が水理学的に意義をもつ, すなわち所要の水面形曲線となる。この場合, 他方のそれは鞍形点としての支配断面があらわれなくなる。いいかえれば下流における流れの影響が支配断面となるべき断面をこえて流れがもぐるようになる限界状態を示す水面形曲線となる。

実際に計算をすすめるには, 鞍形点が支配断面になれば(157)式によって初期水面こう配を求め, 以下もともとの非線型基礎方程式(146)および(147)を何らかの計算法によって解けばよい。

(4) 結節点の水理学的意義 このとき, 特性根は同符号の2実根をもっているが, 絶対値の大きい方を λ_2 とすると, 結節点ではすべての積分曲線は同一の水面こう配(158)式となることが, 前項で示した一次変換式を用

$$\left(\frac{dh'}{dx'} \right) = -\frac{a_{21}}{\lambda_2 - a_{11}} \quad (158)$$

いて示される。しかし, すでに示したように, 渦状点のそれと同じくこの点を通る解が水理学的に意義をもつことはほとんどなく, 上・下流水深の共役関係にともなう跳水によって流れは急激に射流から常流へとせん移する。

2. 水路底が変化する水路の漸変流

これまで示した一様でない水路における漸変流理論の例として, 水路幅 b が一定な長方形断面で底こう配のみが変化する水路における流れを解析しよう。この特殊な例は参考書^{2D)}などにみられるが, その理論的解析の最初は Massé²³⁾ によって行なわれている。

特異点の位置は, (148)および(149)式より

$$\left(1 + \kappa_0 h_0 \right) \sin \theta_0 = \frac{Q^2}{C_0^2 b^2 h_0^3} \left(1 + \frac{2h_0}{b} \right), \quad \cos \theta_0 = \frac{\alpha Q^2}{g b^2 h_0^3} \quad (159)$$

によって計算される。また係数 a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} は

$$\left.
 \begin{aligned}
 a_{11} &= -\kappa_e \sin \theta_e \\
 a_{12} &= \frac{3\alpha Q^2}{gb^2 h_e^4} = \frac{3 \cos \theta_e}{h_e} \\
 a_{21} &= \kappa_e \cos \theta_e (1 + h_e \kappa_e) + h_e \sin \theta_e \left(-\frac{\partial \kappa}{\partial x} \right)_e \approx \kappa_e \cos \theta_e \\
 a_{22} &= \kappa_e \sin \theta_e + \frac{N_e}{h_e} (1 + \kappa_e h_e) \sin \theta_e \approx \frac{3 \sin \theta_e}{h_e}
 \end{aligned}
 \right\} (160)$$

である。ここに、流れの平均流速公式として Chézy 公式、 $b \gg h_e$ および底こう配の変化はあまり急激でないという仮定を用いて係数を簡単化している。

特性方程式の根の性質より、 $(h_e \kappa_e / 3)$ が $-(1 - \cos \theta_e) / (1 + \cos \theta_e)$ より大きい、 $-(1 + \cos \theta_e) / (1 - \cos \theta_e)$ より小さいとき、特異点は鞍形点あるいは結節点となり、この中間領域では渦状点となる。また $\kappa_e \approx 0$ に対応

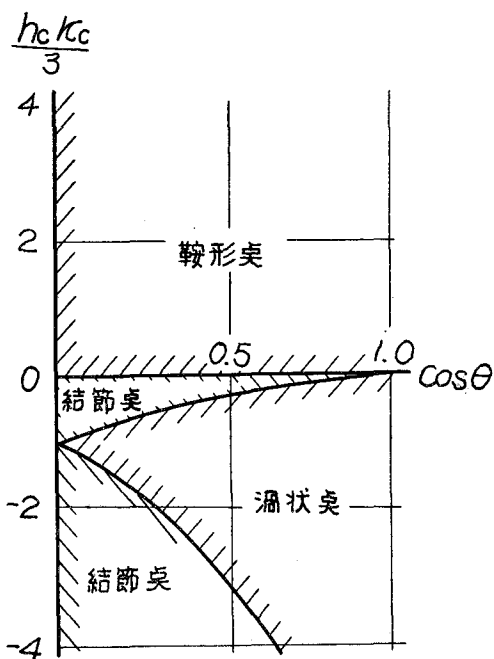


図-12 底こう配が変化する幅の広い
長方形水路における Chézy
の流れの特徴

して、鞍形点と結節点とに分類される。以上の計算を図示したものが図-12であり、またこれからえられる水面形状を説明すると図-13、-14、-15によって表わされる。すなわち、せきの頂部を越える流れでは $\kappa = d\theta/dx$ が正であるから、この付近の水面形状は図-13に示すように鞍形点によって特徴づけられ、またシルの近傍においては κ は負となるから、図-14、-15に示すような結節点および渦状点によって特徴づけられる。この場合実際には、下流水位の条件によって調節されることは明らかであろう。

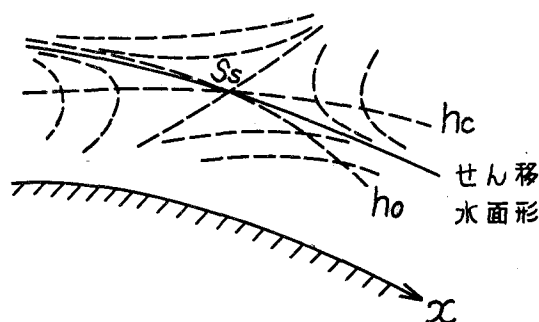


図-13 せき頂部付近の流れ

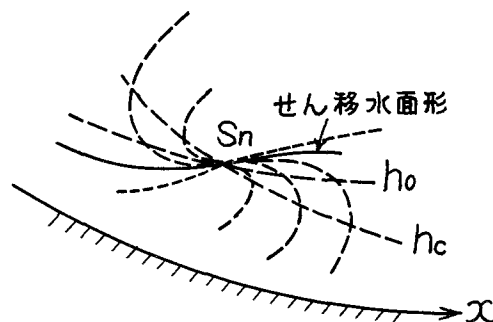


図-14 せきのシル部付近の流れ

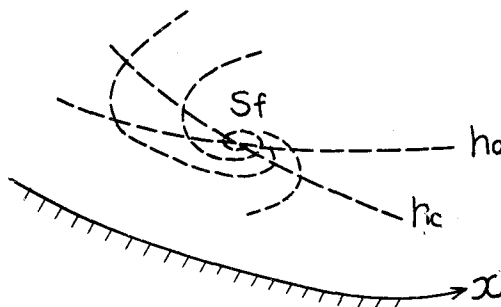


図-15 せきのシル部付近の流れ

3. 水路幅が変化する水路の漸変流¹²⁾

つぎに水路幅が変化する水路における漸変流の特徴を調べよう。これは、実際的な水工学上の諸問題とも関連をもち、とくに支配断面があらわれるようにしたものはフルームの基本形として重要な研究課題²⁴⁾を提供するものである。ここでは、平均流速公式として Manning 公式を用いて考察をすすめる。

(148)および(149)式より、特異点の位置は

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= \frac{Q^2}{C_e^2 b_e^2 h_e^3} \left(1 + \frac{2h_e}{b_e} \right) - \frac{\alpha Q^2}{g b_e^3 h_e^2} \left(\frac{db}{dx} \right)_e, \\ \cos \theta &= \frac{\alpha Q^2}{g b_e^2 h_e^3} \end{aligned} \right\} \quad (161)$$

によって計算され、また係数 a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{\alpha Q^2}{g h_e^6} 2\lambda_e^3 m_e, \\ a_{12} &= \frac{\alpha Q^2}{g h_e^6} 3\lambda_e^2, \\ a_{21} &= \frac{\alpha Q^2}{g h_e^6} \lambda_e^3 \left\{ \frac{2(3 + 10\lambda_e)(i_e + m_e \lambda_e) m_e}{3(1 + 2\lambda_e)} + h_e \left(\frac{d^2 b}{dx^2} \right)_e - 3\lambda_e m_e^2 \right\}, \\ a_{22} &= \frac{\alpha Q^2}{g h_e^6} \lambda_e^2 \left\{ \frac{2(5 + 6\lambda_e)(i_e + m_e \lambda_e)}{3(1 + 2\lambda_e)} - 2\lambda_e m_e \right\} \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

となる。ここに、 $\lambda_e = (h_e/b_e)$, $m_e = (db/dx)_e$ である。

この常数係数をもつ線型化方程式をこれまでに述べてきた解析法により計算すれば、水路幅が変化する水路における漸変流の性質が明らかにされるが、その一般的性質を把握することは、変数が多くて複雑であるから、ここでは特定のモデルに対するものを示して参考とする。

いま、水路底こう配が 0.004 で、次式に示す水路形状要素をもった長方形断面をモデルとする。

$$\left. \begin{aligned} b &= 0.2(x^2 - x + 1) & (m - \text{単位}) \\ m &= (db/dx) = 0.4x - 0.2 \\ d^2 b/dx^2 &= 0.4 \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

この区間より上・下流では一定幅の水路である。

特異点の位置は (161) 式より計算され、このモデルに対しては、流量 Q の大きさにほとんど無関係に $x =$

0.5095 m であることが証明される。また、この点で係数 a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} を計算し、 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ を作ると常に負となり、すなわち特異点は鞍形点であることがわかる。これらの結果から、 $n = 0.010$ (m -単位), $\alpha = 1.00$ として計算した等流水深曲線、限界水深曲線およびせん移水面形曲線を $Q = 5, 10, 15, 20$ l/sec に対して理論的に求めて図示したのが図-16である。ただし、この図では鞍形点(支配断面)におけるいま1つの積分曲線は示されていない。

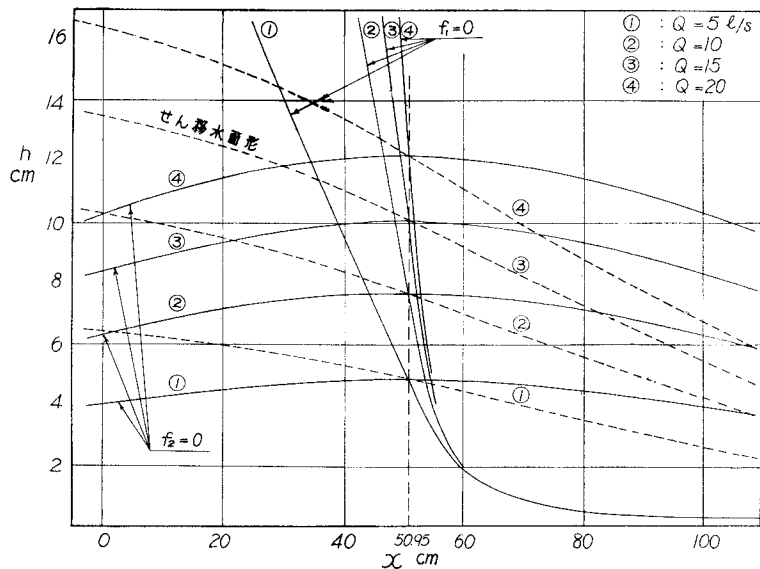


図-16

このモデルに対する理論解析の検証をトン板製フリュームによって実験したのが図-17、-18である。図-17は下流水位をせき上げない状態にして行なった実験値と理論曲線との比較であり、また図-18は下流水位を適当にせき上げて行なったものである。これらの図からもわかるように、理論曲線は実験値と一致し、これまでに示した解析法の妥当性を示す一例といえよう。

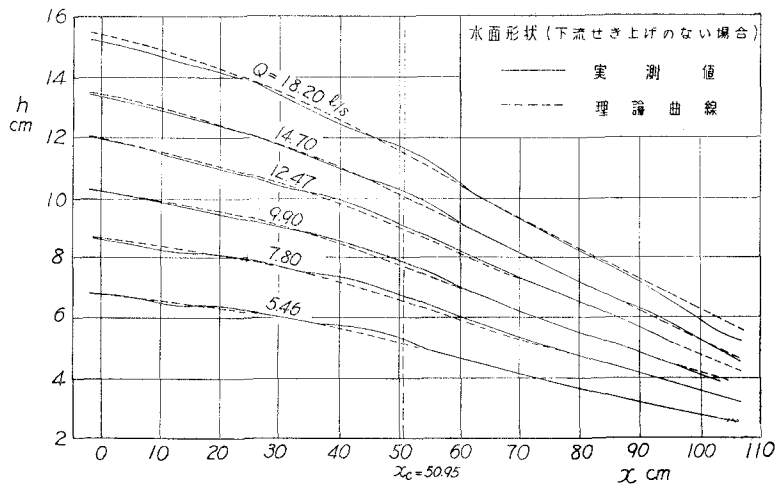


図-17

4. 水面形計算法

水面形状の計算は、与えられた境界特性をもつ水路に与えられた流量の水が流れるときそれぞれの目的によって定まる初期値を用いて基礎方程式を解くことに外ならない。実際に用いられるものとして、解析的にとく多くの公式、数値計算法としての標準逐次計算法、直接逐次計算法、米国標準逐次計算法など、また図解法としてのEESCOFFIER-

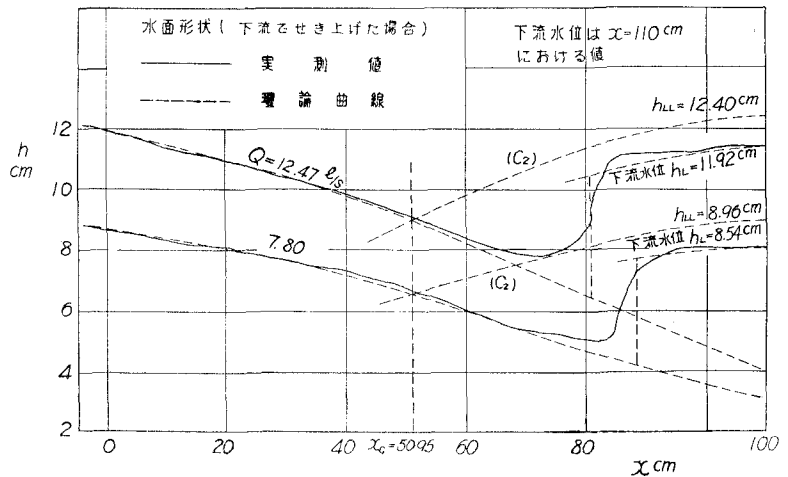


図-18

Raytchine-Chatelain 法, Ezra 法などがあることは周知のとおりであって、これらの方法にはそれぞれ長所・短所をもっていることは現場での経験から認識されていることと思う。

これらのいずれの計算法も単なる計算手段であって、要は基礎方程式のもつ無数の解のなかから、所要の条件を満足する1つの積分曲線をうることに外ならない。このためには、水面形計算に当って課せられた条件（水路特性および流量）で示す基礎方程式の性質を知らなければならない。以上の意味から、すでに示した微分方程式の定性的解析理論が必要となる。実際には、まず与えられた条件に対して計算すべき全領域における擬似等流水深曲線と限界水深曲線とを描き、特異点の存在を確かめる。もし特異点がなく、取り扱っている全領域で正則であれば、計算方法そのものは特別な考慮を必要とせず、どれかの方法によって水理学的に取り扱われる。しかし、特異点があらわれると、それが取り扱うべき流れにどのような影響を及ぼすかについて水理学的に判断しなければならない。これは、擬似等流水深曲線と限界水深曲線との位置関係、特異点の種類および与えられた初期値から推定される。特異点が直接水面形に影響を及ぼさないときは特異点がない場合と実質上同じように取り扱われるが、流れが支配断面によって常流から射流へのせん移をおこす場合や跳水現象によって射流から常流へせん移する場合には特異点によってその特性が明らかにされるから、この場合には十分注意を払う必要がある。

ここでは、水面形計算法における注意事項をのべたが、計算法そのものについては他の参考書に十分記載されているから、ここでは省略する。

第3章 流量が場所的に変化する漸変流の理論

前章に示した定常流の挙動はすべて流量が一定であるという流れであった。しかし、水工学における多くの実用問題、とくにわれわれが当面する水理構造物の機能設計では、流量が場所的に変化する漸変流の理論を基礎にして解析をすすめなければならないことが多い。ところが、この流れでは流量の場所的变化にともなう諸要素の解析的表示がむずかしいため、しかも基礎となる数学的理論も解明されていないこともあって、実用上きわめて重要な分野を占めるべきこの理論も体系化されておらず、従来においてはわずかに De Marchi²⁵⁾ の解析などがあるにすぎなかった。著者らも永年にわたって、この種の問題を手がけているが、いまのところ十分な成果をえていない。しかしここでは、従来の経験を基にしてこの理論の問題点を提示したいと思う。

1. 基礎方程式の水理学的特徴とその解析法

(1) 基礎方程式 流量が場所的に変化する漸変流の基礎方程式は、(98)～(100)式より一般に

$$\frac{dh}{dx} = \sin \theta (1 + \kappa h) - \frac{Q^2}{C^2 R A^2} + \frac{\alpha Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\alpha p q Q}{2 g A^2} \quad (164)$$

$$\frac{dx}{dX} = \cos \theta - \frac{\alpha Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial h} \quad (165)$$

$$\frac{dQ}{dX} = -q \left(\cos \theta - \frac{\alpha Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial h} \right) \quad (166)$$

と表わされる。ここに、 p は x および h によって変わる係数であり、エネルギー解析法では $3 - (u_0^2 / \alpha u_m^2)$ 、また一様な水路における運動量解析法 ($\kappa = 0$) では $4 - (2u_0 / \beta u_m)$ である。従来の研究によれば、 p は4あるいは2という値をもった式が用いられているが、流出入流量のもつ運動量を見捨てた結果が4であり、またそのエネルギーを見捨てたものが2となり、たまたま $u_0 \doteq u_m$ という結果と一致するに過ぎない。この境界面付近の流速 u_0 は積分操作上でくるものであって、実際はどの値を用うべきかわからない。 p に関して、著者らは横越れぜきを用いて行なった数年の結果ではわからないという結論しかえていない。

(2) 基礎方程式の特徴 流量が一定の漸変流理論は、水路自体の一様性という点で2つに分類される。ところが、流量が場所的に変化する漸変流理論は、水路自体の形状に加えて流下方向の単位長さ当りに対する流出入流量 q が与えられた自然的、人工的要素によって種々に変わるから、これらの形態をも考慮しなければならない。たとえば、せき高の一定な横越れぜきをもつ水路の分流機構では q は越流水深のみの関数であり、せき高が変化するときには越流水深のみならず x の関数となる。しかし、大抵の人工構造物による流出入流量は h のみの関数となることが多い。これらの特徴を考えに入れると、つぎのように分類されよう。

表-2 流量が場所的に変化する流れの分類

種 類	流出入流量形態	水 路 型 式	解 析 法	実 例
A	$q = \text{一定}$	一 様 水 路	2. 3. 4.	一様な強制流出入を行なう取水分水構造物、路面排水、道路側溝、樋、浸透性水路の流れなど
B	$q = \text{一定}$	一様でない水路	3. 4	一様な流出入を行なう取水分水構造物、道路側溝、浸透性水路の流れなど
C	$q = q(h)$	一 様 水 路	2. 4	取水分水構造物、浸透性水路の流れなど
D	$q = q(h)$	一様でない水路	4	Cと同じ
E	$q = q(x)$	一 様 水 路	3. 4	任意の強制流出入を行なう取水分水構造物など
F	$q = q(x)$	一様でない水路	3. 4	〃
G	$q = q(x, h)$	一 様 水 路	4	〃
H	$q = q(x, h)$	一様でない水路	4	〃

(3) 解析法 従来における理論的解析法は、De Marchi の理論のように、流量の変化によっても主流のエネルギーは変わらないという仮定のもとづくものか、あるいは基礎方程式(164)～(166)を与えられた条件によって数値積分法などを利用してその特解を求めるという方法にとどまっている。これらについては他の参考書など²⁶⁾に記載されているからここでは省略し、すでに述べた微分方程式の定性的理論による解析法にしたがう取り扱いを示そう。この観点に立てば、水路の型式および流入流出流量の形態によって、i) $Q \sim h$ 平面における二次元解析理論、ii) $x \sim h$ 平面における二次元解析理論、および iii) 3 個の autonomous equation によるものに分けられ以下に示すが、表-2にはそれぞれ、2, 3, 4 として分類している。

2. $Q \sim h$ 平面における解析理論

水路の型式が一様であれば、その断面形状および底こう配は x に無関係であり、しかも、流入流出流量の形態が一定あるいは h のみの関数(たとえば、せき高一定の横越流ぜき、越流トラフ、開度一定の底格子柵など)であれば、基礎方程式(164)～(166)の右辺はいずれも x を直接には含まないと考えられる。このような条件では、基礎方程式は

$$\frac{dh}{dX} = \sin \theta - \frac{Q^2}{C^2 R A^2} + \frac{\alpha p q Q}{2 g A^2}, \quad (167)$$

$$\frac{dQ}{dX} = -q \left(\cos \theta - \frac{\alpha Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial h} \right) \quad (166)$$

と表わされる。 x については、 $Q \sim h$ 平面での解析後に(165)式を用いて解けばよい。

特異点の位置は明らかに、

$$\sin \theta = \frac{Q_e^2}{C_e^2 R_e A_e^2} - \frac{\alpha p_e q_e Q_e}{2 g A_e^2}, \quad (168)$$

$$\cos \theta = \frac{\alpha Q_e^2}{g A_e^3} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_e \quad (149)$$

であり、この点の近傍における線型化方程式は、 C, R, A, m をいずれも h の関数と考え、

$$\frac{dQ'}{dX'} = a_{11} Q' + a_{12} h' \quad (169)$$

$$\frac{dh'}{dX'} = a_{21} Q' + a_{22} h' \quad (170)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{2q_e}{Q_e} \cos \theta, & a_{12} &= -\frac{M_e q_e}{h_e} \cos \theta, & a_{21} &= -\left(\frac{2}{Q_e} \sin \theta + \frac{\alpha p_e q_e}{2 g A_e^2} \right), \\ a_{22} &= \frac{N_e}{h_e} \sin \theta + \frac{\alpha p_e q_e Q_e}{2 g A_e^2} \left\{ -\frac{N_e}{h_e} - \frac{2}{A_e} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_e + \frac{1}{p_e} \left(\frac{\partial p}{\partial h} \right)_e + \frac{1}{q_e} \left(\frac{\partial q}{\partial h} \right)_e \right\} \end{aligned} \quad (171)$$

と表わされる。ここに、 q_e は流出に対して正、流入には負である。したがって、 a_{11} および a_{12} は流出か流入かによって逆の符号をとることがわかる。いま、特性方程式の判別式が正であるとの前提のもとで、 $(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})$ を作ると、つぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} & \frac{2q_e}{h_e Q_e} \sin \theta \cos \theta (N_e - M_e) + \frac{\alpha p_e q_e^2 \cos \theta}{g A_e^2} \left\{ \frac{1}{2h_e} (2N_e - M_e) - \frac{2}{A_e} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_e \right. \\ & \left. + \frac{1}{p_e} \left(\frac{\partial p}{\partial h} \right)_e + \frac{1}{q_e} \left(\frac{\partial q}{\partial h} \right)_e \right\} \end{aligned} \quad (172)$$

この正負によって、結節点か鞍形点かが判定される。

このままでは、この種の流れのもつ水理学的意義の一般的性格はわかりにくいから、水路幅のきわめて広い長方形断面水路に Chézy の流れが流下し、横越流ぜきあるいは底格子柵などによって流量配分が行なわれるときの水面形を考えてみよう。ただし、 $p = \text{一定}$ とする。明らかに、 $N_e = M_e = 3$ 、 $q_e > 0$ であり、各係数より(172)式は

$$\frac{\alpha p_e q_e^2 \cos \theta}{g b^2 h_e^2} \left\{ \frac{1}{q_e} \left(\frac{\partial q}{\partial h} \right)_e - \frac{1}{2h_e} \right\} > 0 \text{ (結節点)}, \quad < 0 \text{ (鞍形点)}$$

である。したがって、 $q = K h^{1/2}$ を境界線とし、これ以上のべき指数に比例して流出するとき(ほとんどすべての場合であろう。すなわち、横越流ぜきでは $q \propto h^{2/3}$ 、底格子柵型では $q \propto h^{1/2}$ である)、特異点は結節点と

なり、逆にそれ以下のべき指数に比例するとき鞍形点となる。

以上の事実を水理学的に説明すると、つぎのようである。すなわち、上下流接近水路は一般に緩こう配で底格子棚と連絡しているから、流出流量が $q \propto h^n$ ($n > 1/2$) と表わされれば、格子棚の始点（上流端）はあたかも支配断面（擬似鞍形点）のような作用を示し、結節点へつながる水面形状を呈する。このような流れの観察はすでに Coleman と Smith の行なっているところであり、また下流端水位を高めると流れは常流になることもこの理論から知ることができ、これは Engels の実験に外ならない。こうした点で、流れの諸型式に対する横越れぜき公式を求めた Frazer のもの（水理公式集改訂版参照）はやや進歩したものといえる。一方、 $n < 1/2$ であれば、支配断面は棚上にあらわれるようになる。図-19、-20はこうした流れの一般的な水面形状を示したもので、実際の流れは与えられた条件よりこのうち1つのものをとる。なお、ここですすめた解析はいずれも特異点があらわれるものとしたが、越流部や棚の延長が短いとこの区間中にはあらわれない。しかし、下流側水路の仮想的な位置にあたかもあらわれるような数学的結果がえられ、またその影響が水理学的には水面形状に示されることはいうまでもなからう。

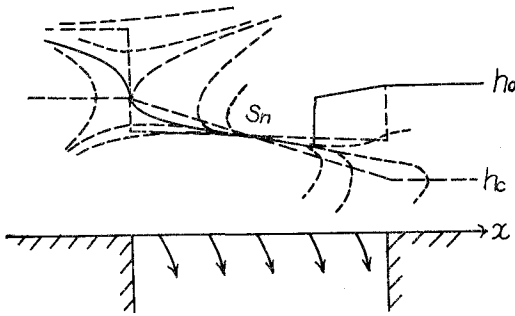


図-19 底格子棚上の流れのもつ水面形状（結節点）

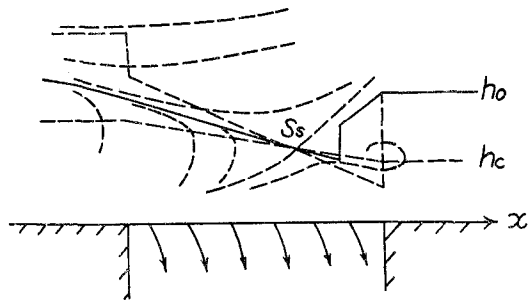


図-20 底格子棚上の流れのもつ水面形状（鞍形点）

3. $x \sim h$ 平面における解析理論

前節では、基礎方程式(164)～(166)の右辺がいずれも x を直接に含まない場合を取り扱った。ところが、流量 Q が x の関数として表示されるとき、基礎方程式より Q を消去して $x \sim h$ 平面における二次元問題として、この流れが解析される。たとえば、表-2の種類 A, B, E, F のように q が一定あるいは x の関数として表示されうる場合がその例である。

明らかに、基礎方程式は

$$\frac{dh}{dX} = \sin \theta (1 + \kappa h) - \frac{Q^2}{C^2 R A^2} + \frac{\alpha Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\alpha p q Q}{2 g A^2} \quad (164)$$

$$\frac{\alpha x}{dX} = \cos \theta - \frac{\alpha Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial h} \quad (165)$$

$$Q = Q_0 - \int_{x_0}^x q(x) dx \quad (173)$$

である。ここに、 Q_0 は基準点 x_0 （たとえば流入の初まる位置）における初期流量である。これらの3式より、まず Q を消去して、 $x \sim h$ 平面で解析をすすめるといいが、 q が明確でない限りその一般的表示はむずかしい。著者らはこれまでにこの種の応用例として、浸透性水路における流れの挙動²⁷⁾および層流状態における流れの路面排水を路面の横断形状との関連²⁸⁾より取り扱っている。ここでは、前者の結果のみを要約するにとどめる。

長方形断面をもつ浸透性水路では地下水位が相当低ければ $p = 4$ と考えられる。抵抗法則として Manning 公式を用いると、特異点の存在領域とその数および種類は図-21に示すようになる。鞍形点の位置は仮想的なところ、すなわち浸透性水路区間よりさらに上流の不浸透性水路にあることが多く、したがって浸透性水路の開始点はあたかも支配断面のようになり、流れの水理学的性質に影響を与える。また流れに直接影響を及ぼす要素は河道構成材のもつ浸透係数であって、水路底こう配、粗度係数などは浸透係数に較べて二次的な影響しかもたな

い。このように流れの示す水理学的挙動を解析すれば、天井川などの浸透性水路の河道計画法の基本的概念をつかむことができるようになる。

4. 3 Autonomous equations 系における解析

水路の形状および流入の形態がこれまでに示したような特殊の場合には、水深、流下距離、流量のうち後2者のいずれかを消去し、二次元問題として理論的に解析されることがわかった。しかし、さらに一般的な水路の形状および流入流量形態をもつ漸変流では、

基礎方程式系の右辺は常に、 x, Q, h の関数であるから3個の方程式を同時に解かなければならない。

基礎方程式(164)～(166)において、特異点の位置は初期値の x_0, Q_0 より出発し、適宜の x に対する(164)および(165)式の $Q \sim h$ 曲線から求めなければならない。これは、(166)式は(165)式に $-q$ を乗じたにすぎず、しかも $q \neq 0$ でなければならないからである。いま、仮りに特異点が定まったとすると、この点の近傍における線型化方程式はつぎのようになる。

$$\frac{dx'}{dX'} = a_{11}x' + a_{12}Q' + a_{13}h' \quad (174)$$

$$\frac{dQ'}{dX'} = -q_0(a_{11}x' + a_{12}Q' + a_{13}h') \quad (175)$$

$$\frac{dh'}{dX'} = a_{31}x' + a_{32}Q' + a_{33}h' \quad (176)$$

ここに、 $a_{11}, \dots, a_{33}$ は常数係数である。

(174)～(176)式系の特性方程式は

$$-q_0\lambda[\lambda^2 - (a_{11} + a_{33} - a_{12})\lambda + \{a_{33}(a_{11} - a_{12}) + a_{13}(a_{32} - a_{31})\}] = 0 \quad (177)$$

であり、1根は $\lambda = 0$ であり、他の2根は係数によって2実根あるいは2複素共役根となる。したがって、適宜の変換によって標準形になおすとわかるように、二次元問題に帰することになる。すなわち、(177)式の括弧内の特性根の性質によって二次元空間における流れの挙動はすでに示したものとなり、 $x \sim Q$ 面においては積分曲線は $Q' - q_0x' = \text{const.}$ という平行直線群からなることがわかる。

数学的理論からは以上のように説明されるが、現在の流量が場所的に変化する漸変流の挙動に対して著者は直接これらの理論を応用して解析をすすめたことがないので、解析に当たっての問題点などについて多くを知っていない。

本篇においては、開水路定常流の基礎理論として主として漸変流における水理学的挙動を理論的に取り扱った。しかし、流れの流体圧が静水圧的でないいわゆる急変流については、単なる基本的特性を示すにとどまり、実際に応用される例については全く触れていない。これは多くの急変流現象ではその力学的挙動を正しく数学的に表

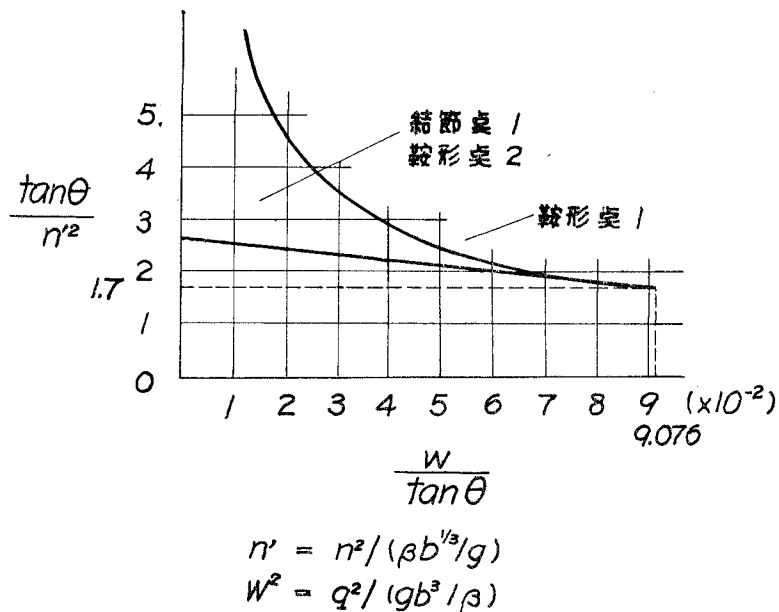


図-21 浸透性水路における流れの水理学的特徴

示されえないことが多く、大抵は何らかの経験的要素を導入しなければならないからである。ここでは、越流頂を越える流れのような急変流は流れが非回転であるという仮定のもとで十分に解析されることを示すにとどめておく。

第3篇 開水路における非定常流の基礎理論

第1章 非定常流の基本的特性

前篇においては流れの特性が時間とともに変化しない定常流の基礎理論を取り扱ったが、流れそれ自体の最も一般的な形態は場所的にも時間的にもその特性が変化する非定常流である。この種の例として、段波、洪水流、あるいは感潮河川の流れなどについては古くより多くの研究が行なわれているが、解析に用う直接的な対象は現象を比較的単純なモデルに置き換えた流れであって、その研究成果も定常流理論のそれに比較してあまり用いられていないようである。これは、もともと非定常流理論によって行なうべき多くの水工計画も現象の複雑性その他のために定常流理論によって代用されることとなり、非定常流理論そのものは現象説明の単なる手段に過ぎないことが多いからでもあろう。しかし、その本質はわれわれが理論的解析をすすめるに当たって行なう非定常流力学の数学的表示が完全に現象そのものを表わしえないことと、未知数の増加による解析手段の複雑化の増大による。すなわち、定常流理論の解析では、すでに述べた常微分方程式論が応用されるのに対し、非定常流理論では偏微分方程式論が用いられなければならないからである。

しかし、非定常流理論といってもその内容とするものは、問題の性質あるいは境界条件によってきめられる性格によって、多くの種類のものを含み、場合によっては単純化されるものもある。とくに近年、双曲型偏微分方程式の解法の1つとしての特性曲線法が流体力学の問題にとどまらず非定常流理論解析法へ全面的に用いられるようになって以来、非定常流理論の展開も大いに進歩されることとなった。

1. 非定常流の基礎方程式

非定常流における基礎方程式は、すでに述べた開水路流れにおける一次元基礎方程式そのものである。しかし、実際にあらわれる諸条件より、定常流理論において誘導に用いた諸前提を考慮しておく方が都合がよい。

連続方程式は、明らかに(90)式よりつぎのように表わされる。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + u_m \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial u_m}{\partial x} = -q \quad (178)$$

これは、越流頂部などにおける連続条件を満たさないが、普通にあらわれる程度の水路では例外なく基礎方程式と考えてよからう。

(1) エネルギー解析法における基礎方程式 開水路流れの一次元解析法におけるエネルギー式(96)において、定常流におけるものを誘導した諸前提に加えてつぎの条件を仮定する。

- i) 水路底の曲率半径は流れの水深に較べてきわめて大きく、 $\kappa h \ll 1$ である、
- ii) 水路幅は比較的広く、表面流速成分 $\bar{u}_s$ は水路幅方向に互って一様であるとみなされる、
- iii) 解析の簡単化のため、Coriolis のエネルギー係数 α および Boussinesq の運動量係数 β はそれぞれ一定と考える。

以上に述べた仮定は必ずしも正しくない。とくに、ii)のそれは境界面において $\bar{u}_s$ は0になるはずであるから、たとえば峡谷のような水路形状をもつ水路の場合不適当である。また、iii)のそれは流下距離や時間の関数と考える方がより一般的であるが、理論そのものの展開の上からは別段支障はない。これらの仮定を加えると、第2篇第1章2に示した方法と同様の計算によって、非定常流のエネルギー解析法における基礎方程式はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} \beta \frac{\partial u_m}{\partial t} + \alpha u_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{(\beta - \alpha)}{2} \frac{u_m}{A} \frac{\partial A}{\partial t} &= g \sin \theta (1 + \kappa h) \\ - \frac{\tau}{\rho R} \frac{u_b}{u_m} + \frac{\alpha q u_m}{2A} \left(1 - \frac{u_b^2}{\alpha u_m^2} \right) & \end{aligned} \quad (179)$$

これは、(109)式において、 α , β , λ を一定とした単純化方程式に外ならない。

(2) 運動量解析法における基礎方程式 運動量方程式はベクトル量であるから、水路は一様でなければ実際上の適用はきわめてむずかしくなる。ここでは、(104)~(106)式を誘導した前提条件と、前項の ii) および iii) の

仮定とを用いると、(92)式よりつぎのように表わされることが計算される。

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + \beta u_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + (1 - \beta) \frac{u_m}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} = g \sin \theta - \frac{\tau}{\rho R} + \frac{\beta q u_m}{A} \left(1 - \frac{u_s}{\beta u_m} \right) \quad (180)$$

この式と(179)式とを比較すると、その大略の形は似ており、しかも α および β の係数などを実用上しばしば用いられる数値で代用すれば、みかけ上同一の形にすることもできる。しかし、すでにしばしば述べたように、これらの両式の誘導過程は異なったものであるから、現在すすめている解析の近以理論では一致しないのが当然のことである。

2. 非定常流の特性

非定常流の基礎方程式は連続方程式(178)および力学的方程式としてのエネルギー方程式(179)あるいは運動量方程式(180)の2つの方程式系より成立っている。この系は独立変数として t および x 、未知関数として h および u_m という2独立変数2従属変数の連立偏微分方程式系である。したがって、われわれが非定常流の理論的解析を行なうに当って応用する数学的理論は2独立変数2従属変数に関する1階の連立偏微分方程式論である。とくに、開水路流れの基礎方程式は双曲型であるから、この型式のものが利用され、現在ではとりわけ特性曲線法が最も有効な解析手段となっている。

ところが、非定常流のなかでもその特性の性質によって簡単化されることが多い。たとえば、洪水流の流下機構の水理学的特性を取り扱う場合、多くは最高水位の減衰過程が議論の対象となる。このとき、力学的運動方程式は擬似定流状態のものに近以され、これと連続方程式とから平均流速 u_m を消去して、未知関数 h に関する1階偏微分方程式となり、この特性方程式を利用して解が求められることになる。こうした例として、山地流域における流出過程の問題があり、これはこの研修会における別の講義で論ぜられる流出解析法で示されるはずである。

一方、非定常運動が定常等流状態ないしは定常状態よりのわずかな変動によって構成されるものであれば、いわゆる微小変動理論が適用される。もちろん、実際の洪水などでは水位や流速の変化は微小と考えられないが、条件によっては問題が単純化され、この種のものに帰せられることがある。この場合、非定常流の基礎方程式は線型化され、常数係数をもつあるいは一般に2階の単一線型方程式となる。

以上に示すように、非定常流の力学的挙動を表わす基礎方程式はもとも2個の連立1階偏微分方程式系より構成されるが、流れのもつそれぞれの特性によって取り扱い方は単純化されることがあり、時には1階偏微分方程式に、また時には2階線型方程式になることもある。常微分方程式論においては、単一の高階常微分方程式は1階の常微分方程式系のそれと同一であるが、偏微分方程式論においては必ずしもそうでない。たとえば、非定常流の線型化方程式では未知関数1個に関する2階の単一偏微分方程式であり、これは3個の1階偏微分方程式系になるが、逆の場合、すなわち3個の1階偏微分方程式系が単一の2階偏微分方程式に帰す場合は特別の条件が必要となる²⁹⁾。したがって、非定常流の理論的解析の基礎は2個の1階偏微分方程式系であって、この理論の特殊の例として種々の場合へ拡張される。

第2章 特性曲線法

周知のように、偏微分方程式にはだ円型、放物型および双曲型とあるが、われわれの対象とする開水路における非定常流の基礎方程式は双曲型方程式である。だ円型方程式はいわゆる Dirichlet の問題として、場を囲む境界面の関数値を与えた場合の解を取り扱うのに対し、双曲型方程式の問題は場を囲む境界の一部における条件より解を求めるといういわゆる Cauchy の初期値問題である。もちろん、双曲型方程式の解法には種々のものがあるが、1つの有力な解法、とくに近年水理学のみならず流体力学、空気力学の分野で最も広く用いられるものは特性曲線法であって、ここにその概略を示すことにしよう。とりわけ、2個の独立変数をもつ特性曲線法理論はそれ自体が具体的にわかりやすく、また最も多くの研究が重ねられている。

1. 2独立変数、2従属変数に関する双曲型1階偏微分方程式における特性曲線法

たとえば、エネルギー解析法にしたがうと、基礎方程式は(178)および(179)式より、

$$A \frac{\partial u_m}{\partial x} = -q - \frac{\partial A}{\partial t} - u_m \frac{\partial A}{\partial x},$$

$$\alpha u_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + \beta \frac{\partial u_m}{\partial t} = g \sin \theta (1 + \kappa h) - \frac{\tau}{\rho R} \frac{u_b}{u_m} + \frac{\alpha q u_m}{2A} \left(1 - \frac{u_b^2}{\alpha u_m^2}\right)$$

$$- g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{(\beta - \alpha)}{2} \frac{u_m}{A} \frac{\partial A}{\partial t}$$

である。この連立方程式を $(\partial u_m / \partial x)$ および $(\partial u_m / \partial t)$ について解けば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_m^*}{\partial x} &= F(x, t, h, u_m, \partial h / \partial x, \partial h / \partial t), \\ \frac{\partial u_m^*}{\partial t} &= G(x, t, h, u_m, \partial h / \partial x, \partial h / \partial t) \end{aligned} \right\} \quad (181)$$

となるはずである。上式より $(\partial^2 u_m / \partial x \partial t)$ を計算すると、

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p} \right) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) + \left\{ \left(\frac{\partial G}{\partial q} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right) \right\} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \right) + \left(\frac{\partial G}{\partial h} \right) p - \left(\frac{\partial F}{\partial h} \right) q$$

$$+ \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) + F \left(\frac{\partial G}{\partial u_m} \right) - G \left(\frac{\partial F}{\partial u_m} \right) = 0 \quad (182)$$

がえられる。ここに、 $p = (\partial h / \partial x)$ 、 $q = (\partial h / \partial t)$ である。したがって、2 次微分に関する項の係数が u_m に無関係であれば、非定常流の基礎方程式は単一の 2 階偏微分方程式になる。しかし、上式を用いて計算すればわかるように、これらの係数は u_m に関係をもつから、基礎方程式系は単一のものとならない。

(1) 特性曲線と特性方程式 特性曲線は双曲型偏微分方程式においては 2 個の異なる実曲線群であり、通常つぎのようにして定義される。i) 微小な不連続の軌跡、ii) 積分面を作りうる唯一の曲線群、および iii) 積分面の連続性が不定となる線群。いま、われわれの取り扱う偏微分方程式系を簡単のためつぎのように表わし、iii) の方法にしたがって特性曲線とその方向を考えよう。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} A_1 h_x + B_1 h_t + C_1 u_{mx} + D_1 u_{mt} &= -E_1 \\ A_2 h_x + B_2 h_t + C_2 u_{mx} + D_2 u_{mt} &= -E_2 \end{aligned} \right\} \quad (183)$$

ここに、添字の x, t はそれぞれに関する微分係数を示し、また $A_1, \dots, E_2$ は、 x, t, h, u_m に関する関数である。いま、ある曲線 $\Sigma: x = x(\sigma), t = t(\sigma)$ (σ : パラメーター) にそって関数 h, u_m の値が与えられているものと仮定しよう。もし、(183)式より 1 次ならびに高次の微分係数および h, u_m の値が曲線上でわかれば、未知関数 h, u_m は Taylor 展開によって曲線をこえて連続される。この場合、微分係数、 h_x, h_t, u_{mx}, u_{mt} を決める条件は

$$\left. \begin{aligned} A_1 h_x + B_1 h_t + C_1 u_{mx} + D_1 u_{mt} &= -E_1 \\ A_2 h_x + B_2 h_t + C_2 u_{mx} + D_2 u_{mt} &= -E_2 \\ \dot{x} h_x + \dot{t} h_t &= \dot{h} \\ \dot{x} u_{mx} + \dot{t} u_{mt} &= \dot{u}_m \end{aligned} \right\} \quad (184)$$

である。ここに、 $\dot{}$ は σ に関する微分を表わしている。したがって、 $h_x, \dots$ はつぎの条件が成立する以外のとき一義的に決定されることになる。

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ \dot{x} & \dot{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{x} & \dot{t} \end{vmatrix} = a \dot{x}^2 - 2b \dot{x} \dot{t} + c \dot{t}^2 = 0 \quad (185)$$

ここに、 $a = [BD]$ 、 $2b = [BC] + [AD]$ 、 $c = [AC]$ 、また $[XY] = X_1 Y_2 - X_2 Y_1$ である。この場合、 $ac - b^2 > 0$ であれば、(185)式は複素根となり、これをだ円型といい、双曲型とは $ac - b^2 < 0$ のときである。明らかに 2 実根をもち、すでに示した定義より

* これらの式は無次元化した方が都合はよい。

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_+ = \zeta_+(x, t, h, u_m), \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_- = \zeta_-(x, t, h, u_m) \quad (186)$$

は特性曲線となる。また特性曲線にそって、 h および u_m の法線微分係数は不連続となる。

特性関係に関する第2の方程式は、(185)式が満足されるとき、つぎの条件も満たされると(184)式は解をもつということからえられる。すなわち、例として

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 & E_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 & E_2 \\ \dot{x} & \dot{t} & 0 & -\dot{h} \\ 0 & 0 & \dot{t} & -\dot{u}_m \end{vmatrix} = 0 \quad (187)$$

である。この式を計算すると、 $(\dot{x}/\dot{t}) = (dx/dt) = \zeta$ を用いてつぎのように表わされる。

$$[AB]\dot{h} + \{[AD] - [BD]\zeta\}\dot{u}_m + \{[AE] - [BE]\zeta\}\dot{t} = 0 \quad (188)$$

したがって、結局特性方程式としてつぎに示す4つの関係がえられることになる。

$$\left. \begin{aligned} \text{I}_+ : \left(\frac{dx}{dt}\right) &= \zeta_+ \\ \text{I}_- : \left(\frac{dx}{dt}\right) &= \zeta_- \\ \text{II}_+ : [AB]\frac{dh}{dt} + \{[AD] - [BD]\zeta_+\}\frac{du_m}{dt} + \{[AE] - [BE]\zeta_+\} &= 0 \\ \text{II}_- : [AB]\frac{dh}{dt} + \{[AD] - [BD]\zeta_-\}\frac{du_m}{dt} + \{[AE] - [BE]\zeta_-\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (189)$$

(2) 特性曲線の基本的性質³⁰⁾ 特性曲線に関する基本的な概念は従属領域および影響範囲である。図-19に示すように、 $x \sim t$ 面である曲線 K を考え、この曲線上の初期値が与えられているとしよう。 K 上に素分 ab をとると、 a を通る2つの特性曲線 ζ_+ , ζ_- があり、また b を通るものも2個ある。たとえば、 a を通る ζ_+ と b を通る ζ_- の交点を P とすると、 Pab 内の関数値は素分 ab にその初期値によって一義的に決定され、 ab 外の値には影響されない。この曲線 K の素分 ab を点 P の従属領域という。つぎに影響範囲は、図-20に示すよ

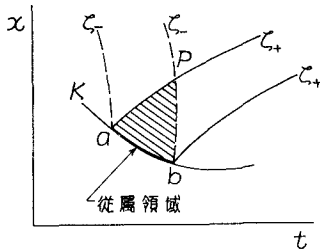


図-19 従属領域

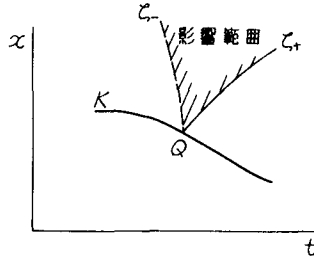


図-20 影響範囲

うに、点 Q における初期値によって影響される $x \sim t$ 面上のすべての点をいう。明らかに、影響範囲は Q を含む従属領域のすべての点 P より構成され、 Q を通る2つの特性曲線内に囲まれる領域は Q の影響範囲となる。もし初期値が1つの特性曲線にそってのみ与えられているときは、問題は解かれないが、2つの特性曲線にその初期値が与えられているならば、一義的に解は求められる。これは特性初期値問題といわれる。以上にのべたこれらの概念は擾乱の伝ばんを特性づけるものに外ならない。

(3) 計算法 双曲型方程式を特性曲線法によって解く場合、特性方程式の微分係数の代りに階差を用いるのが普通であって、こうした計算法には格子点法 (lattice method) と分割法 (field method) とがある。前者は特性曲線の交点としての格子点の位置とその点における関数値を求めるものであり、水理学の分野において常に用いられている。すなわち、既知の2格子点より(189)式の最初の2式を用いた階差式より、2特性曲線の交点としての第3の点の位置を計算する。この場合試算的に $\zeta_{\pm}$ の値を平均操作すれば計算精度は高められる。一方、この点の関数値は(189)式の第3、4式を用いてえられる。

一方、分割法は特性曲線群によって囲まれた各微小面積内では関数値は一定とし、特性曲線を越えて他の領域に入ると不連続的にその値が変わるといった仮定より計算をすすめるものである。この場合も既知の2領域の値より第3の領域における関数値は特性方程式と同様な形でえられる。この方法は格子点法に較べて明確さを欠くように見えるが、擾乱線としての特性曲線にそう不連続性を明らかにする点に利点がある。

2. 線型化方程式における方法

(1) 不連続伝ばん速度としての特性方程式 前節においては、擬似(準)線型双曲型偏微分方程式の特性曲線法について示した。一般に物理現象では、ある一定の状態からの変動が十分に小さいとき、たとえばいま取り扱っている非定常流が定常等流状態よりごくわずかに変動するようなものであれば、変動に関するすべての高次項が無視されても、現象自体にあまり影響を及ぼさないと考えられる。このような取り扱いはいくつかの微小変動論といわれ、基礎方程式は線型化される。明らかに、(181)式より

$$u_m = u_{m0} + u', \quad h = h_0 + h'$$

とおけば、 F, G はそれぞれ1次の代数関数となり、(182)式における $(\partial G / \partial p), \dots, (\partial F / \partial u_m')$ は一定値となるから、基礎方程式としての連立偏微分方程式系は常数係数をもつ単一の2階偏微分方程式となる。したがって、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right) &= a, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial q} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right) = 2b, \quad - \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right) = c, \\ \left(\frac{\partial G}{\partial h} \right) p - \left(\frac{\partial F}{\partial h} \right) q + \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) + F \left(\frac{\partial G}{\partial u_m} \right) - G \left(\frac{\partial F}{\partial u_m} \right) &= d \end{aligned}$$

とおけば、

$$a \left(\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \right) + 2b \left(\frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} \right) + c \left(\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} \right) = -d \quad (190)$$

と表わされる。一方、 σ をパラメーターとして、

$$\dot{p} = \dot{x} \left(\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \right) + \dot{t} \left(\frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} \right), \quad \dot{q} = \dot{x} \left(\frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} \right) + \dot{t} \left(\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} \right)$$

であるから、前節の(1)に示した iii)の方法より特性帯の条件を求めると、(185)式の誘導と同様に、

$$\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ \dot{x} & \dot{t} & 0 \\ 0 & \dot{x} & \dot{t} \end{vmatrix} = c\dot{x}^2 - 2b\dot{x}\dot{t} + a\dot{t}^2 = 0 \quad (191)$$

(191)式より、 $ac - b^2 < 0$ のとき、線型化方程式(190)は双曲型であり、特性曲線としての

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_+ = \zeta_+, \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)_- = \zeta_-$$

という2本の曲線群がえられる。ただし、係数 a, b, c は与えられた条件によって定まる常数であるから、 $\zeta_{\pm}$ は一定であり、これを物理的にいえば、微小擾乱の伝ばん速度は一定であると表わされる。

(2) 解析法 常数係数をもつ2階偏微分方程式を解く方法は数学的に解決されたものであって、普通には変動量の周期解を求めるために指数関数型において解を計算する方法と、線型方程式に対する Riemann 関数を用いる解法とがある。これらはいずれも数学書に記載されているから、ここでは省略する。

3. 1階偏微分方程式における特性曲線法

開水路の非定常流の基礎方程式は、すでにしばしば述べたように、2個の1階偏微分方程式系から構成される。しかし、非定常流といってもそれ自体のもつ流れの性格によって数学的表現がかわり、1個の1階偏微分方程式によって表わされることもある。たとえば、洪水流の水理学的解析のように、そのピーク付近の特性が知りたい場合には、力学的方程式における各項の大きさの比較より流れは定常等流状態に近いとみなされる。このような近似条件のもとでは、非定常流の連続方程式と定常等流の平均流速公式とを組み合わせることによって1個の1階偏微分方程式に帰せられる。こうした方法の解析には田中の洪水に関する擬似定流理論³¹⁾があり、また山地流域における流出機構の解析(これについては石原：流出解析法で説明がある)がある。1階偏微分方程式の解法は特性曲線法によって構成されるから、この理論を理解することが必要となる。

第3章 特性曲線法の開水路における非定常流への応用

前章においては、われわれの対象とする開水路の非定常流の力学的挙動を示す基礎方程式が双曲型の偏微分方程式であるということを前提として、その有力な解法の1つとしての特性曲線法の概略を示した。ここでは、その方法の開水路における非定常流への応用について示すことにする。もちろん、その計算は相当繁雑であって、しかもわれわれの対象とする初期値問題はあらかじめ与えられる条件と対象とする方程式とによって解が求められるから、その例を一つ挙げて説明することはむずかしく、ここでは単にその計算法への手順を示すにとどめる。

1. 開水路非定常流に対する特性曲線法

(1) エネルギー解析法による特性曲線 洪水の流れや感潮河川における流れは、その現象をここで示すような一次元解析法にしたがう限り、連続方程式(178)および力学的方程式(179)あるいは(180)によって表わされる。これを再記すれば、

$$\frac{\partial A}{\partial t} + u_m \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial u_m}{\partial x} = -q, \quad (178)$$

$$\beta \frac{\partial u_m}{\partial t} + \alpha u_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{(\beta - \alpha)}{2} \frac{u_m}{A} \frac{\partial A}{\partial t} = g \sin \theta (1 + \kappa h) - \frac{g u_m^2}{C^2 R} + \frac{\alpha p q u_m}{2 A} \quad (189)$$

ここに、境界面にそうせん断力のなす仕事を表わすために Chézy 型の流速公式を用い、また流出入にともなうその係数として p で表わしている。

流水断面積としての A は流下距離 x および水深 h の関数であり、 h は x および時間 t の関数である。しかも、断面形状があらかじめ与えられていない限り、流水断面積 A を解析的に表示することはできないから、ここでは簡単に A は x に関係するものと h に関係するものとに分け、

$$A = \psi(x)\phi(h)$$

とおくことにする。もちろん、水路が一樣であれば、 $\psi(x)$ は1となり、 $\phi(h) = A$ とおけばよい。これと同様なことは流下方向の単位長さ当りの流出入流量 q についてもいえる。このような前提条件のもとで、(183)式に示す各係数 $A_1, \dots, E_2$ を求めると、これらはそれぞれつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} A_1 &= u_m \psi \frac{\partial \phi}{\partial h}, & B_1 &= \psi \frac{\partial \phi}{\partial h}, & C_1 &= \psi \phi, & D_1 &= 0, & E_1 &= u_m \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} + q, \\ A_2 &= g \cos \theta, & B_2 &= \frac{\beta - \alpha}{2} \frac{u_m}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial h}, & C_2 &= \alpha u_m, & D_2 &= \beta, \\ E_2 &= -g \sin \theta (1 + \kappa h) + \frac{g u_m^2}{C^2 R} - \frac{\alpha p q u_m}{2 \psi \phi} \end{aligned}$$

この係数値より、(185)式における係数 a, b, c を計算すれば、

$$a = [BD] = \beta \psi \frac{\partial \phi}{\partial h}, \quad b = \frac{3\alpha + \beta}{4} u_m \psi \frac{\partial \phi}{\partial h}, \quad c = \alpha u_m^2 \psi \frac{\partial \phi}{\partial h} - g \cos \theta \cdot \psi \phi$$

である。これらの係数より $(ac - b^2)$ を作ると、

$$\begin{aligned} ac - b^2 &= -\beta g \cos \theta \psi^2 \phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial h} \right) - \frac{(9\alpha - \beta)(\alpha - \beta)}{16} u_m^2 \psi^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial h} \right)^2 \\ &= -\beta g \cos \theta \cdot \psi^2 \phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial h} \right) \left\{ 1 + \frac{(9\alpha - \beta)(\alpha - \beta)}{16\beta} \frac{u_m^2}{g \cos \theta} \frac{\partial}{\partial h} (\log \phi) \right\} \end{aligned}$$

この値の正負は α, β あるいは ϕ の形によって定められるが、われわれの過去の理論あるいは経験より、 $\alpha \geq \beta$ 、また $(\partial/\partial h)(\log \phi)$ も正であることを知っている。このような事実を用いると、開水路における非定常流の示す基礎方程式は常に双曲型であることがわかり、これまですすめてきた議論の前提条件が正しかったといえることになる。

したがって、(185)式を解き、(186)式の示す2個の特性曲線群を示す方程式を求めると、これらはそれぞれつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
 \left(\frac{dx}{dt} \right) = \zeta_+ &= \frac{3\alpha + \beta}{4\beta} u_m + \sqrt{\frac{g \cos \theta \cdot \phi}{\beta (\partial \phi / \partial h)}} \cdot \\
 &\left\{ 1 + \frac{(9\alpha - \beta)(\alpha - \beta)}{16\beta} \frac{u_m^2}{g \cos \theta} \frac{\partial}{\partial h} (\log \phi) \right\}^{1/2}, \\
 \text{および} \\
 \left(\frac{dx}{dt} \right) = \zeta_- &= \frac{3\alpha + \beta}{4\beta} u_m - \sqrt{\frac{g \cos \theta \cdot \phi}{\beta (\partial \phi / \partial h)}} \cdot \\
 &\left\{ 1 + \frac{(9\alpha - \beta)(\alpha - \beta)}{16\beta} \frac{u_m^2}{g \cos \theta} \frac{\partial}{\partial h} (\log \phi) \right\}^{1/2}
 \end{aligned} \right\} \quad (192)$$

また特性曲線にそって成立するいま2つの特性関係は、(188)あるいは(189)式における〔AB〕, 〔AE〕, および〔BE〕を計算し、(189)式にきとともに入代入すればえられる。しかし、一様でない水路におけるものはきわめて複雑な表示となることはいうまでもない。

(2) 一様水路における特性曲線 すでに示したように、一様水路では $\psi = 1$, $\phi = A$, $\kappa = 0$ とおけばよいから、特性曲線に関する(180)および(181)式はそれぞれつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
 \left(\frac{dx}{dt} \right) = \zeta_+ &= \frac{3\alpha + \beta}{4\beta} u_m + \sqrt{\frac{g \cos \theta \cdot A}{\beta (\partial A / \partial h)}} \cdot \\
 &\left\{ 1 + \frac{(9\alpha - \beta)(\alpha - \beta)}{16\beta} \frac{u_m^2}{g A \cos \theta} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right) \right\}^{1/2}, \\
 \text{および} \\
 \left(\frac{dx}{dt} \right) = \zeta_- &= \frac{3\alpha + \beta}{4\beta} u_m - \sqrt{\frac{g \cos \theta \cdot A}{\beta (\partial A / \partial h)}} \cdot \\
 &\left\{ 1 + \frac{(9\alpha - \beta)(\alpha - \beta)}{16\beta} \frac{u_m^2}{g A \cos \theta} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right) \right\}^{1/2}
 \end{aligned} \right\} \quad (193)$$

さらに実用上の見地から、 $\alpha = \beta = 1$ とおくと、これらは

$$\left. \begin{aligned}
 \left(\frac{dx}{dt} \right) = \zeta_+ &= u_m + \sqrt{\frac{g \cos \theta \cdot A}{(\partial A / \partial h)}}, \\
 \left(\frac{dx}{dt} \right) = \zeta_- &= u_m - \sqrt{\frac{g \cos \theta \cdot A}{(\partial A / \partial h)}}
 \end{aligned} \right\} \quad (194)$$

となり、またいま2つの特性関係は

$$\begin{aligned}
 [AB] &= -g \cos \theta \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right), & [AD] &= u_m \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right), & [BD] &= \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right), \\
 [AE] &= -u_m \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right) \left(g \sin \theta - \frac{g u_m^2}{C^2 R} + \frac{p q u_m}{2A} \right) - g q \cos \theta, \\
 [BE] &= - \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right) \left(g \sin \theta - \frac{g u_m^2}{C^2 R} + \frac{p q u_m}{2A} \right)
 \end{aligned}$$

を用いて、

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{du_m}{dt} + \sqrt{\frac{g \cos \theta}{A}} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right) \frac{dh}{dt} &= g \sin \theta - \frac{g u_m^2}{C^2 R} + \frac{p q u_m}{2A} - q \sqrt{\frac{g \cos \theta}{A}} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right), \\
 \text{および} \\
 \frac{du_m}{dt} - \sqrt{\frac{g \cos \theta}{A}} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right) \frac{dh}{dt} &= g \sin \theta - \frac{g u_m^2}{C^2 R} + \frac{p q u_m}{2A} + q \sqrt{\frac{g \cos \theta}{A}} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (195)$$

である。さらに簡単のため、単位幅当りの二次元流れを考えると、(194) および (195) 式より特性関係は周知のようにつぎの関係式によって与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
 \text{I}_+ : \left(\frac{dx}{dt} \right) &= \zeta_+ = u + c \\
 \text{I}_- : \left(\frac{dx}{dt} \right) &= \zeta_- = u - c \\
 \text{II}_+ : d(u_m + 2c) &= \left\{ g \sin \theta - \frac{g u_m^2}{C^2 h} + \frac{q}{h} \left(\frac{p}{2} u_m - c \right) \right\} dt \\
 \text{II}_- : d(u_m - 2c) &= \left\{ g \sin \theta - \frac{g u_m^2}{C^2 h} + \frac{q}{h} \left(\frac{q}{2} u_m + c \right) \right\} dt
 \end{aligned} \right\} \quad (196)$$

ここに、 $c = \sqrt{gh \cos \theta}$ という水深 h をもつ静水での長波の伝はん速度である。

(3) 運動量解析法による特性曲線 一樣水路では流れの力学的挙動は運動量方程式によってより簡単に、しかもより正しく表わされる。この場合、(180) 式より

$$A_2 = g \cos \theta, \quad B_2 = (1 - \beta) \frac{u_m}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right), \quad C_2 = \beta u_m, \quad D_2 = 1$$

$$E_2 = -g \sin \theta + \frac{g u_m^2}{C^2 R} - \frac{\beta p q u_m}{A}$$

である。明らかに、 $(ac - b^2)$ は

$$ac - b^2 = - \left\{ \beta (\beta - 1) u_m^2 \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)^2 + g \cos \theta A \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right) \right\} < 0$$

となるから、運動量解析法によって非定常流の力学的挙動を表わせば、その基礎方程式は常に双曲型であることがわかる。

また、 a, b, c さらに $[AB], [AE], [BE]$ を計算すると、特性関係が求められる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} I_+ : \left(\frac{dx}{dt} \right) &= \zeta_+ = \beta u_m + c \sqrt{1 + \beta(\beta - 1)F^2} \\ I_- : \left(\frac{dx}{dt} \right) &= \zeta_- = \beta u_m - c \sqrt{1 + \beta(\beta - 1)F^2} \\ II_+ : \frac{c}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right) \left\{ (1 - \beta)F^2 - 1 \right\} \frac{dh}{dt} &+ \left\{ (1 - \beta)F - \sqrt{1 + \beta(\beta - 1)F^2} \right\} \frac{du_m}{dt} \\ &= \left(g \sin \theta - \frac{g u_m^2}{C^2 R} + \frac{\beta p q u_m}{A} \right) \left\{ (1 - \beta)F - \sqrt{1 + \beta(\beta - 1)F^2} \right\} \\ &- (1 - \beta) \frac{u_m q}{A} \left\{ \beta F + \sqrt{1 + \beta(\beta - 1)F^2} \right\} + \frac{g q c \cos \theta}{c(\partial A / \partial h)} \\ II_- : \frac{c}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right) \left\{ (1 - \beta)F^2 - 1 \right\} \frac{dh}{dt} &+ \left\{ (1 - \beta)F + \sqrt{1 + \beta(\beta - 1)F^2} \right\} \frac{du_m}{dt} \\ &= \left(g \sin \theta - \frac{g u_m^2}{C^2 R} + \frac{\beta p q u_m}{A} \right) \left\{ (1 - \beta)F + \sqrt{1 + \beta(\beta - 1)F^2} \right\} \\ &- (1 - \beta) \frac{u_m q}{A} \left\{ \beta F - \sqrt{1 + \beta(\beta - 1)F^2} \right\} + \frac{g q c \cos \theta}{c(\partial A / \partial h)} \end{aligned} \right\} \quad (197)$$

ここに c は $\sqrt{g \cos \theta A / (\partial A / \partial h)}$ で表わされる静水中における波の伝はん速度である。これらの式において、水路幅が限りなく広く、 $\beta = 1$ とおけば (196) 式と同様の表示式がえられる。これは実用上用いられてきた特性方程式に外ならない。

(4) 特性曲線の性質 双曲型偏微分方程式では以上に示してきた議論からも明らかなように、ある 1 点を通る特性曲線は必ず 2 つあって、 $x \sim h$ 平面においてそれぞれこう配 ζ_+ および ζ_- をもっている。この場合、簡単のため (196) 式によって考えると、 u が c より大きいかわるいは小さいか、すなわち流れがその点においてその時刻に射流であるか常流であるかによつて、2 個の特性曲線のこう配はともに正かあるいは一方が正で一方が負になるかのいずれかである。これは射流では流れの影響が上流側へ伝わらないことを表わすとともに、実際の計算においても与えられた条件に対する解が種々の条件におけるものに影響されることがわかる。すなわち、非定常流が常流であれば、計算を始める時刻における全区間にわたる初期条件によって解が定められる領域、初期条件と上流端条件によってきまる領域、初期条件と下流端条件とによってきまる領域および上下流端条件によってのみきまる領域とに分けられる。一方、射流であれば、初期条件によってのみきまる領域、初期条件と上流端条件による領域、および上流端条件のみによる領域となる。

2. 微小変動をもつ非定常流

前節においては、非定常的に変化する水理量は必ずしもその変化が小さいとは限らなかったが、定常等流状態から微小な変動にともなう非定常流について考えてみよう。この問題は洪水の流れや感潮河川における潮せきの遡上との問題との関連においてしばしば論ぜられている。もちろん、これらの現象それ自体は、微小な変動をともしものでないから、量的な解析においては必ずしも十分ではないが、こうした問題のもつ定性的な性格の

基本を形成することにはほぼ間違いがない。ここでは、以上の意味から簡単に扱うことにする。

もともとの流れが定常等流状態であれば、これは一様水路において生起される。したがって、運動量の解析法によるものとする、基本式はつぎようになる。

$$\frac{\partial u_m}{\partial x} = -\frac{u_m}{A} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + \beta u_m \frac{\partial u_m}{\partial x} = -g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - (1 - \beta) \frac{u_m}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + g \sin \theta - \frac{g u_m^2}{C^2 R}$$

いま、 $u_m = u_{m0} + u'$ 、 $h = h_0 + h'$ において上式を線型化し、 $(\partial u'/\partial x)$ および $(\partial u'/\partial t)$ について解けば、それぞれつぎのように表わされる。

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{u_{m0}}{A_0} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_0 p - \frac{1}{A_0} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_0 q$$

および

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = \left\{ \frac{\beta u_{m0}^2}{A_0} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_0 - g \cos \theta \right\} p + (2\beta - 1) \frac{u_{m0}}{A_0} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_0 q$$

$$- \frac{2g \sin \theta}{u_{m0}} u' + g \sin \theta \left\{ \frac{2}{C_0} \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_0 + \frac{r_0}{A_0} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_0 \right\} h'$$

したがって、(181)および(182)式より $(\partial G/\partial p) \dots\dots (F/\partial u')$ を計算すると、これらの両式より線型化された1個の2階偏微分方程式がえられる。すなわち、

$$\left\{ \frac{\beta u_{m0}^2}{A_0} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_0 - g \cos \theta \right\} \left(\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \right) + 2\beta \frac{u_{m0}}{A_0} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_0 \left(\frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} \right) + \frac{1}{A_0} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_0 \left(\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} \right)$$

$$+ \frac{g \sin \theta N_0}{h_0} p + \frac{2g \sin \theta}{u_{m0} A_0} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_0 q = 0 \quad (198)$$

ここに、 N_0 は第2篇で示した断面形状による水力指数である。

この式は明らかに双曲型であって、その微小な擾乱の伝ばん速度を示す特性曲線の式は(191)式より計算され、つぎようになる。

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_\pm = \zeta_\pm = \beta u_{m0} \pm \sqrt{\beta(\beta - 1)u_{m0}^2 + g \cos \theta A_0 / (\partial A / \partial h)_0} \quad (199)$$

この式は常流の流れに対し、 $+$ は下流側に、また $-$ は上流側に伝わる微小擾乱の速度といわれるものである。この微小擾乱の時間的増加減衰過程を取り扱う手段が開水路流れの不安定性に関するVedernikov数解析の理論的方法である。

(198)式で表わされた微小擾乱による線型化方程式の解は、指数関数といて解析され、このような立場から洪水流の挙動を論じたものに林³²⁾やCagniard³³⁾の研究があり、またRiemann関数を用いて解くこともできる。しかしここでは省略する。

3. 特性曲線法以外による非定常流の解析

本篇においては、開水路の非定常流を一次元解析法によって表現するとき、その基礎方程式が双曲型偏微分方程式になることから解析法として例外なく特性曲線法を用いることを説明した。しかし、非定常流現象が自然界にあらわれるとき、その境界条件や対象とする特定の現象によっては非定常流の力学的挙動が別の数学的モデルで置き換えられることがある。たとえば、力学的方程式において加速度項を省略するとき、あるいは洪水流のピーク付近のみを取り扱うために擬似定流条件を導入すると、基礎方程式は放物型の熱伝導方程式と同様な形をもつことになる。さらに、条件を単純化すれば1階偏微分方程式にも帰せられる。しかし、問題の本質はわれわれの当面する流れという現象をできるだけ忠実に記述することであって、取り扱う研究者の見方によって結果的には種々のモデルがあらわれたに過ぎない。したがって、われわれが水理学における種々の問題を理論的に解析するに当たって注意すべきことは、数学的手法というものはあくまで1つの手段にすぎないという点を認識し、自然現象に対して謙虚な気持ちで接しなければならない。

あ と が き

この論文は、開水路の流れの力学的挙動を一次元解析法によって取り扱い、その定常ならびに非定常現象の理

論的解析法を基礎となる数学的理論との関連において示したものである。もちろん、ここで述べたものは開水路水理学のすべてを網羅したものではなく、たとえば経験的要素を多分に導入しなければならない急変流の現象、あるいはむしろ理論的に取り扱われやすい境界層の解析法については全く触れていない。しかし、著者は開水路流れに関する一次元水理解析法の基礎についてはできるだけ記述し、何らかの参考に立てばよいと思っている。これらは著者が基礎水理学の勉強を初めて以来10数年にわたる結果の一部であるが、もとより水理学の本質を把握したものではない。内容に対する十分の批判を頂き、今後とも勉強に努めたいと考えている。最後に、この期間にわたりたえず懇切な御指導を賜った石原藤次郎教授に心から感謝の意を表するとともに、京都大学水工学関係の先輩、同僚および後輩の諸氏の御支援に厚く御礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) Wright, J. E. ; Invariant of Quadratic Differential Forms, Cambridge, 1908.
- 2) Sokolnikoff, I. S. ; Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York, 1956.
- 3) Hunter Rouse ; Advanced Mechanics of Fluids, John Wiley, New York, 1959.
- 4) 石原藤次郎, 今本博健 ; 開水路流れにおける拡散過程について, 土木学会第 19 回年次学術講演会講演概要, 昭 39.5.
- 5) 日野幹雄 ; モンテカルロ法による乱流現象のシミュレーションの試み, 土木学会第 19 回年次学術講演会講演概要, 昭 39.5.
- 6) Böss, P. ; Berechnung der Wasserspiegellage beim Wechsel des Fliesszustandes, Springer, Berlin, 1919.
- 7) Bélanger, J. B. Ch. ; Notes sur le cours d'hydraulique, Mém., Ecole nat. Ponts et Chaussées, Paris, 1849~50.
- 8) 岩佐義朗 ; 開水路における定常流の一般理論について, 土木学会論文集 第 69 号, 昭 35.
- 9) Jaeger, C., Contribution à l'étude des courants liquides à surface libre, Rev. gen Hydraulique, Nos. 33-34, 1934.
- 10) Jaeger, C. ; Engineering Fluid Mechanics, Blackie, London, 1956.
- 11) Nemytskii, V.V., and Stepanov, V.V. ; Qualitative Theory of Differential Equations, Princeton Univ. Press, Princeton, 1960.
- 12) 岩佐義朗 ; 幅の漸変する水路における水流の遷移現象と境界特性との関連に関する理論的研究, 土木学会論文集. 第 59 号, 別冊 (3-1) , 昭 33.11.
- 13) Bradley, J. N., and Peterka, A. J. ; The Hydraulic Design of Stilling Basins, Proc. ASCE, Journal, Hydraulics Division, Vol. 83, No. HY5, Paper 1401, Oct. 1957.
- 14) Forchheimer, Ph. ; Hydraulik, Teubner, Leipzig und Berlin, 1930.
- 15) Brahms, A. ; Anfangsgründe der Deich- und Wasserbaukunst, Aurich, 1754 and 1757.
- 16) Lindquist, E. ; On Velocity Formulas for Open Channels and Pipes, Trans. World Power Conference, Sectional Meeting, Scandinavia, Stockholm, 1933.
- 17) Reichardt, H. ; ZAMM, Band 18, 1939.
- 18) Laufer, J. ; The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow, NACA Report 1174, 1954.
- 19) Iwasa, Y., and Muramoto, Y. : On the Velocity Defect Law of Open Channel Flow, Memoirs of the Fac. of Eng., Kyoto University, Vol. XXV, Part 1, Jan. 1963.
- 20) 岩佐義朗 ; 開水路水流の不安定限界について, 土木学会誌, 第 40 卷, 第 6 号, 昭 30.6.
- 21) Chow, V. T. ; Integrating the Equation of Gradually Varied Flow, Paper 838, Proc. ASCE, Vol. 81, Nov. 1955.
- 22) 本間仁 ; 水理学 (技術者のための流体の力学) , 丸善, 東京, 昭 27.7.

- 23) Masse, P. : Ressaut et ligne d'eau dans les cours d'eau à pente variable, Rev. gén. Hydraulique, Nos. 19 - 20, 1938.
- 24) 岩佐義朗, 上田 治 ; 支配断面の水理とそのフリュームへの適用について, 第 19 回土木学会年次学術講演会講演概要, 昭 39.5.
- 25) De Marchi, G. ; Saggio di teoria del funzionamento degli stramazzi laterali, L'Energia elettrica, Vol. 11, No. 11, Nov. 1934.
- 26) Chow, V.T. ; Open Channel Hydraulics, McGraw-Hill, New York, 1959 (石原藤次郎訳 : 開水路の水理学, 丸善).
- 27) 石原藤次郎, 岩佐義朗, 松尾和幸 ; 天井川に関する二, 三の水理学的特性, 京都大学防災研究所年報, 第 5 号, 創立 10 周年記念号, 昭 37.3.
- 28) 岩佐義朗, 山田雄績 ; 路面排水よりみた道路の縦横断形状について, 昭和 34 年度土木学会関西支部年次学術講演会講演概要, 昭 34.11.
- 29) Courant, R., and Hilbert, D. : Method of Mathematical Physics, Vol. II, Partial Differential Equations, Interscience, New York, 1962.
- 30) Courant R., and Friedrichs, K. O. ; Supersonic Flow and Shock Waves, Interscience, New York, 1948.
- 31) Tanaka, K. ; On the Quasi-Steady Flow in the Open Channel, Technology of the Osaka Univ., Vol. 2. No. 44, 1952.
- 32) Hayashi, T. ; Mathematical Study of the Motion of Intumescences in Open Channels of Uniform Slope, Trans. JSCE, No. 11, 1951.
- 33) Cagniard, L. ; Hydrodynamique fluviale-regimes variables, Rev. gén. Hydraulique, 1937.