SUBSET 法の確率微分方程式への応用

APPLICATION OF SUBSET SIMULATION TO STOCHASTIC CALCULUS

吉田郁政*　・佐藤忠信**

Ikumasa YOSHIDA and Tadanobu SATO

*工博　東電設計（株）　地盤・構造部（110-0015 東京都台東区東上野 3-3-3）
**工博　京都大学防災研究所　地震災害部門耐震基礎分野

Subset simulation technique, which is an efficient method to calculate a low failure probability, is applied to a problem which is formulated by a stochastic differential equation. Subset simulation is a method that a subspace close to a limit state is adaptively selected, and samples are generated in the subspace by using Markov Chain Monte Carlo simulation. The simulation method is applied to a diffusive model for random fatigue growth which is based on a stochastic differential equation, and then the failure probability is calculated.

Key Words : Markov Chain Monte Carlo Simulation, subset simulation, stochastic calculus, failure probability

1．はじめに

近年，数理ファイナンスを中心として確率微分方程式の有用性が注目され，初学者向けの教科書も数多く出版されている[例えば 1)2)]．土木建設分野においても数理ファイナンスの理論はリアルオプション等，アセットマネジメントへの適用性の期待から一部その研究が始められている．確率微分方程式の理論解であるBlack-Scholesの式が広く知られているが，弾性波動場の理論解と同様に適用できる問題は極めて限られているため，モンテカルロシミュレーションなどの数値解析法が注目されることとなる．

Tanaka[3)], Tanaka et.al[4)]は材料の亀裂進展や保険のリスク評価を対象として確率微分方程式によって問題を記述し，加重サンプリングの考え方を導入して低確率を効率的に求める方法について研究を行っている．確率過程に対する加重サンプリングであるため，その重みは測度変換として定式化され，ウィーナー過程で駆動されるシステムではGirsanov変換によって定義される．この方法でも通常の加重サンプリングと同様に，サンプリング関数の求め方が問題となる．通常の加重サンプリングであれば限界状態付近の点（設計点）を求め，その点周りにサンプルを発生させることがよく行われるが，確率微分方程式を対象としたTanakaの方法でも，ある関数（これを制御関数と呼ぶ）を設定してその関数周りにサンプル関数を発生させる．この制御関数の選び方が確率算定の効率を左右する．Tanakaは標準正規空間における設計点を求め，制御関数を決める方法を提案しているが，設計点の算定に時間がかかる場合があり，また非線形性の強いシステムでは効率が低下することが予想される．

感度解析を自動的に行い，効率的に損傷確率を算定するMCS手法としてsubset法が提案されている[5)6)]．この方法では損傷に対して危険な部分空間を自動的に絞り込み，その空間内へマルコフチェインモンテカルロシミュレーション[7)]（Markov chain Monte Carlo，以下，MCMCと記す）を用いてサンプルを発生させる．つまり，サンプリング関数が適応的に決められていくために設計点あるいは制御関数を探す必要は生じない．本研究ではsubset法を用いた低損傷確率算定法の，確率微分方程式で記述される問題に対する適用性について基礎的な検討を行う．

2．subset法による損傷確率の算定法

(1) 部分空間の絞り込み

不確定変数の空間内の損傷領域をFとし，損傷確率を$P(F)$と表わす．ここで，全体集合をF_0，その部分集合をF_iと表わし，$F_m=F$とする．

$$F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_m = F \tag{1}$$

損傷確率はこれらの部分集合を用いることにより次式で算定することができる．

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F_m) \\ &= P(F_m / F_{m-1})P(F_{m-1} / F_{m-2})\cdots P(F_1 / F_0) \end{aligned} \tag{2}$$

限界状態関数$z=f(x)$，不確定変数ベクトルxの確率密度分布$p(x)$が与えられるとし，損傷状態を$z<0$と定義して，損傷確率$P(z<0)$を算定する問題を考える．図-1にsubset法を用い

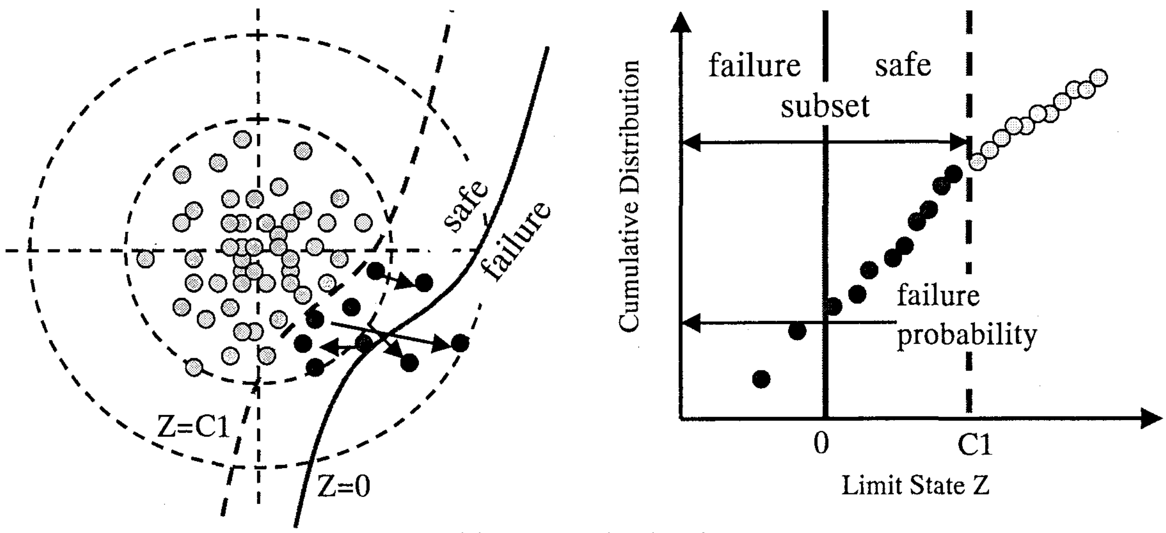


図-1　subset 法の考え方
Z<C1 となる部分空間(subset)を定め，MCMC を用いてサンプルを発生させる

た損傷確率算定の概念を示す．まず，１回目は通常のMCSと同様にサンプルを発生させ，その限界状態関数の値を算定する．限界状態を損なうサンプルが発生している場合にはその比率が損傷確率となるが，低損傷確率の問題ではサンプル数が十分に大きくないと損傷にいたるサンプルが発生しない．そこで，subset法では図-1に示すように１回目のMCS結果に基づきZ<C1となる部分空間（損傷空間よりも広い部分空間，C1>0）を定め，MCMCを用いてその部分空間内にサンプルを発生させる．これを繰り返し部分空間を徐々に小さくすることで損傷確率を算定する．

(2) MCMCによるサンプルの発生方法

MCMCにより任意の目標分布(target distribution) π(x)に従うサンプルを発生させることができる．その手順を以下に示す[7]．

1. 初期値x_0を任意に定める．カウンターをk=0とおく．
2. 適当に定めた確率密度分布$q(x'|x_k)$に従い，x_{k+1}の候補x'を発生させる．
3. 式(3)に示す採択率$\alpha(x', x_k)$を算定し，確率αで$x_{k+1}=x'$，確率1-αで$x_{k+1}=x_k$とする．
4. $k=k+1$として，ステップ２へ戻る．

以上の手順を所定のサンプル数になるまで繰り返す．$q(x'|x_k)$はx_{k+1}の候補x'を発生させるための適当な確率密度関数であり任意の関数でよいが，選び方によって計算効率が左右される．$q(x'|x_k)$はproposal distribution，解候補を発生させる方法をサンプラーと呼ぶ．また，採択率αは次のように定義される．

$$\alpha(x';x_k) = \min\{1, b(x', x_k)\} \tag{3}$$

ここで，

$$b(x';x_k) = \frac{\pi(x_k)q(x'|x_k)}{\pi(x')q(x_k|x')} \tag{4}$$

である．

(3) 部分空間の確率密度関数[6]

部分空間におけるサンプル発生を上記MCMCを用いて行う方法について示す．部分空間F_iにおける条件付確率密度関数$pdf(x/F_i)$は以下の式で表わすことができる．

$$pdf(x/F_i) = \frac{pdf(x)I_{Fi}(x)}{P(F_i)} \tag{5}$$

ここで，$I_{Fi}(x)$はxが部分空間F_iの内にある場合($z<Ci$)には1，外にある場合($z \geqq Ci$)には0となる関数である．

式(5)に従うサンプルの発生を一様分布に基づくMCMCを用いて行う．MCMCの定式化上は，確率変数を一様分布に従う変数uとするが，対数正規分布等，任意の分布に従う変数xはその累積分布関数を用いて一様分布uから変換できるため実用上問題はない．詳細については文献(6)を参照されたい．

３．確率微分方程式と損傷確率

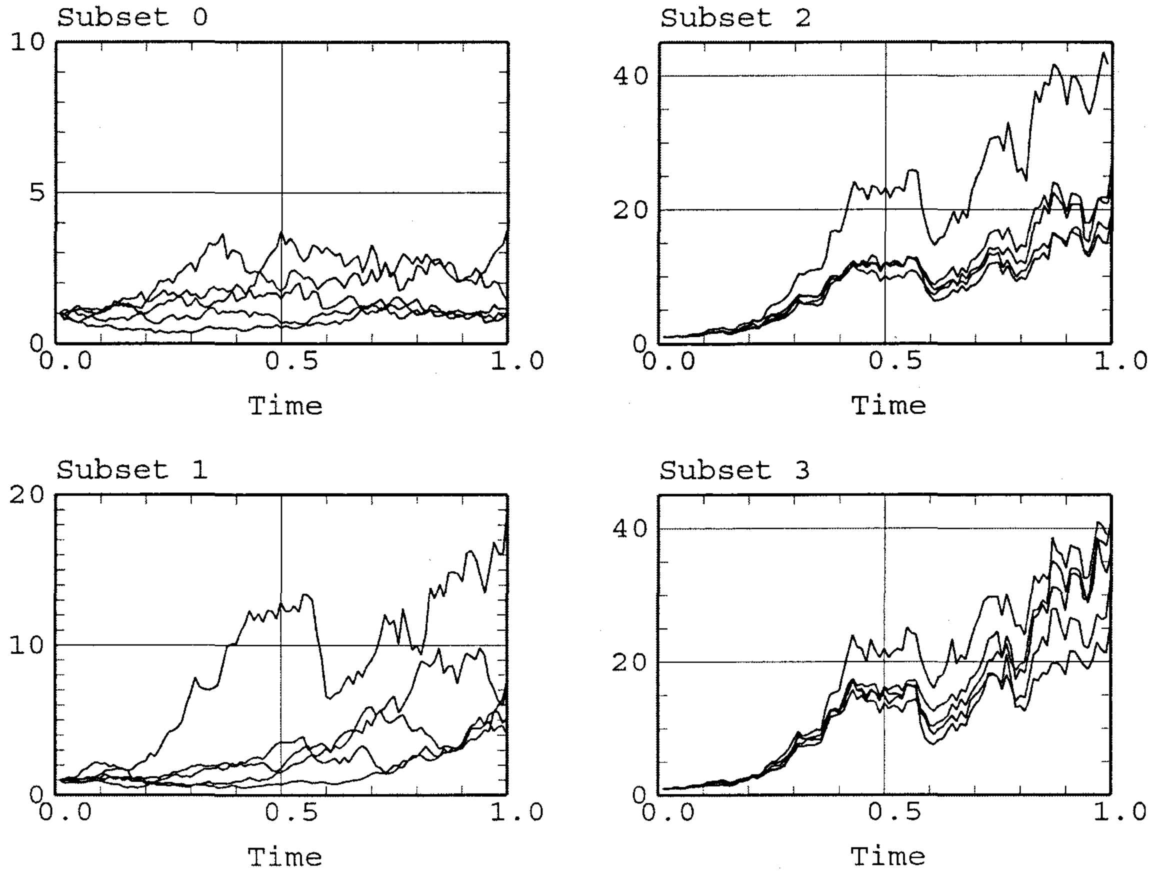
確率微分方程式で記述される例題として，疲労による亀裂の進展問題を考える．文献(3)に従い，亀裂の成長を次式で表すことができるとする．

$$\frac{dX(t)}{dt} = \mu(t)g(X)\left(1+\sigma(t)\gamma(t)\right) \tag{6}$$

ここで，$\mu(t), g(X)$は確定的に与えられる関数である．Xが基準値X_Cを超えた場合に損傷が生じるとして，その損傷確率を求める問題を考える．限界状態関数は以下の式で与えられる．

$$Z = X_C - X_{\max}, \quad X_{\max} = \max_{0 \le t \le T}(X) \tag{7}$$

係数関数$\mu(t)$がガウス性のホワイトノイズ$\gamma(t)$に従ってばらつくとすると，Wong-Zakai変換によって次式で表さ



図－2　サンプルパスの絞り込みの様子　全空間から部分空間３まで

れる確率微分方程式が求められる[3].

$$dX(t) = \mu(t)g(X)\left(1+\frac{1}{2}\mu(t)\sigma^2(t)g'(t)\right)dt + \mu(t)\sigma(t)g(t)dW(t) \tag{8}$$

ここで，$g'(t)=dg(t)/dt$, Wはウィーナー過程であり，次の性質をもった連続なガウス過程である.

$$E[W(t))] = 0.0, \quad E[W(t)W(s)] = \delta_{ij}\min(t,s) \tag{9}$$

確率微分方程式の効率的な数値シミュレーションスキームとして伊藤の積分公式に基づくMilsteinの方法が知られている[1]. 対象とする動的システムが以下の式で表されるとすると,

$$dX = \mu(t,X)dt + \sigma(t,X)dW(t) \tag{10}$$

その数値シミュレーションは以下の式で行うことができる.

$$X_i = X_{i-1} + \mu_i(t_{i-1},X_{i-1})\Delta + \sigma_i(t_{i-1},X_{i-1})\Delta W_i + \frac{1}{2}\sigma_i(t_{i-1},X_{i-1})\sigma_i'(t_{i-1},X_{i-1})\left((\Delta W_i)^2 - \Delta\right) \tag{11}$$

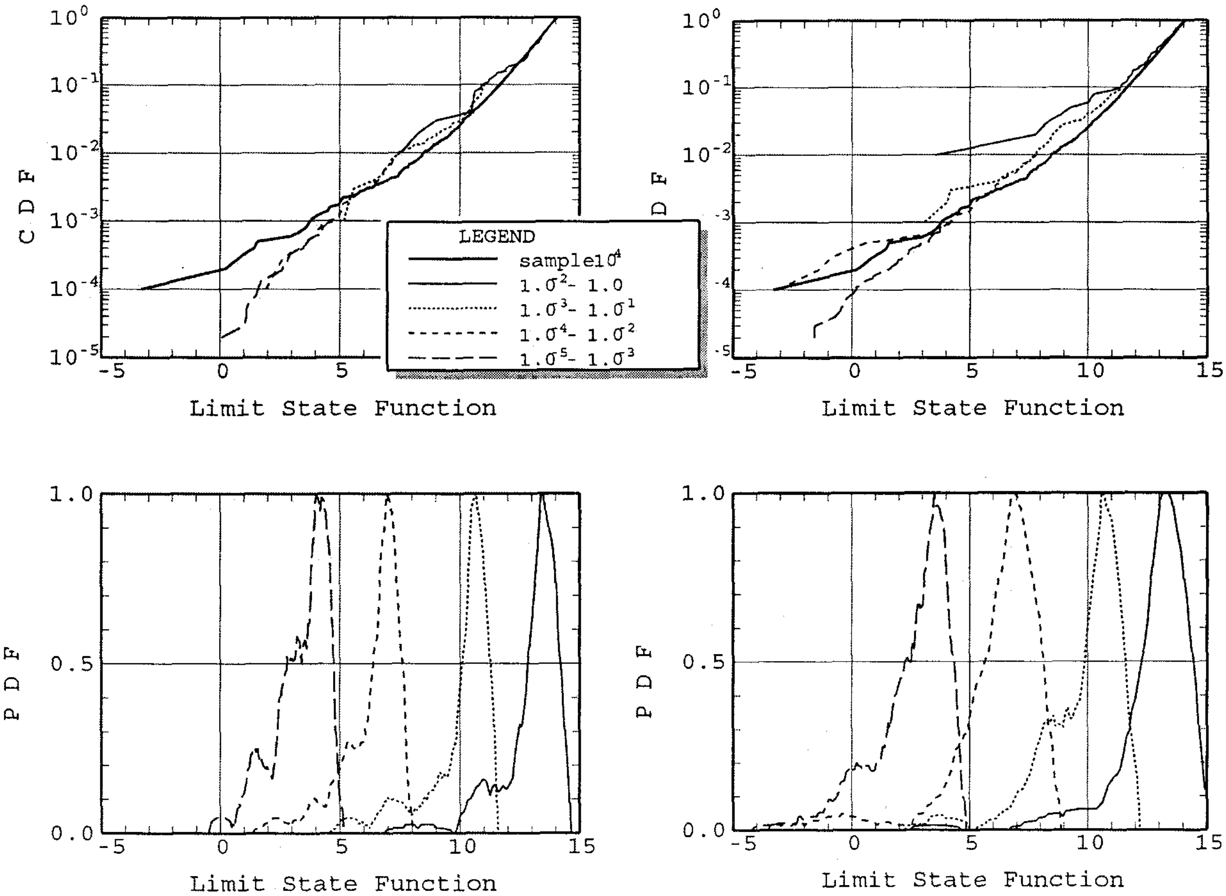
本研究では式(11)に対してMCMC, Subset法による部分空間の絞り込みを行い，効率的な損傷確率の算定を試みる.

Tanaka[3]と同じ問題, $g(X)=X$, $\mu(t)=0.5$, $\sigma(t)=2.0$, 初期値$X_0=1.0$について検討を行った．まず，全空間におけるサンプルパスを100個算定した．そのうち任意に選んだ５個を図-2の左上に示す．サンプルパスの最大値は総じて小さい. 次に2(1)に示したsubset法の考え方に従い，限界状態関数値Zが大きい方から上位10個を選び部分空間を定義し，MCMCを用いてこの部分空間内に100個のサンプルパスを発生させた．これを図-2の左下に示す．同様にして部分空間を絞り込みながらサンプルパスを発生させた．各部分空間についてそれぞれ任意に選んだサンプルパス５個ずつを図-2に示した．徐々に最大値が大きなサンプルパスが得られている様子がわかる.

基準値 X_C=15, 時間 T=0.5 の条件で損傷確率の算定を行った．サンプル数 100 の subset 法を実施し，得られた累積分布関数(CDF)を図-3 上段に示す．乱数の種を替えた２種類の結果をケース１，２として示した．サンプル数 10000 の通常の MCS も実施し，その限界状態関数値の累積分布関数も図-3 に示した. subset 法の結果については発生させたサンプルの密度分布関数も図-3 下段に示した. MCS の結果の限界状態関数値を z_iとして，まず密度関数を,

$$f(z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta(z - z_i) \tag{12}$$

とおく．ここで，δはディラックのデルタ関数である．これに対してParzenウィンドウ[8]処理を行って図化のための



(1)ケース１　　　　　　　　　　　　　　　　(2)ケース２

図－3　限界状態関数の比較　乱数の種を替えた２ケースについての例示

密度分布を求めた．最大値は1.0に基準化した．テイル分布に集中してサンプルが発生され損傷領域に向かって部分空間が絞り込まれている様子がわかる．各部分空間の確率密度の分布形状は比較的安定しており，滑らかな形をしている．しかし，得られた損傷確率（累積分布，Z=0の値）の精度はあまり良好ではない．乱数の種を替えて何回か計算を行ったが総じてサンプル数10000との一致度は良好ではなかった．さらなる工夫が必要と考えている．

4．まとめ

確率微分方程式で記述される動的問題を対象として，subset法の考え方を用いて，損傷確率を効率的に算定する方法について検討を行った．試算を行ったところ，限界状態に近い危険なサンプルパスが絞り込まれてはいくものの，算定される損傷確率は必ずしも安定した結果とはならなかった．

関数空間においても限界状態関数値に注目して適応的に部分空間を絞り込んでいくという基本的な考え方自体は，有望なアプローチと考えている．MCMCのサンプリングの方法等，今後手法の見直しを行い，精度の高いシミュレーション方法へと改良していきたい．

参考文献

1) Mikosch, T., Elementary Stochastic Calculus, World scientific, 1998
2) 森真，なっとくする数理ファイナンス，講談社，2001
3) Tanaka, H., An Importance Sampling Simulation Scheme for Time-dependent System Reliability Analysis Using the Girsanov Transformation, Proc. of ICOSSAR'97, Vol.1, pp.411-418, 1998
4) Tanaka, H., Ichida, Y. and Toyoda-Makino, M., Application of an Importance Sampling Method to Risk Models in Insurance Theory, Application of Statistics and Probability in Civil Engineering, pp.749-756, 2003
5) Au, S-K and Beck, J. L., Application of Subset Simulation to Seismic Risk Analysis, 15th ASCE Engineering Mechanics, 2002
6) 吉田郁政，佐藤忠信，MCMC を用いた損傷確率の効率的算定法，土木学会論文集，(投稿中)
7) Gilks, W.R., Richardson, S., Spiegelhalter, D.J., Markov chain Monte Carlo in practice, Chapman & Hall, 1996.
8) 大崎順彦，新・地震動のスペクトル解析入門，鹿島出版会，1994