離散的2目的最適化問題の最適性規準に関する再考察

RE-INVESTIGATION ON THE OPTIMAL CRITERIA FUNCTION FOR THE DISCRTE TWO-OBJECTIVE OPTIMAL PROBLEMS

三原徹治*・當間亮**・千々岩浩巳***

Tetsuji MIHARA, Ryo TOMA and Hiromi CHIJIIWA

*工博　九州共立大学大学院工学研究科教授　都市システム専攻（〒807-8585 北九州市八幡西区自由ヶ丘1-8）
** 九州共立大学大学院工学研究科　都市システム工学専攻
***博(工)　第一復建㈱　構造部

The multi-objective optimal problem has the Pareto solutions. In the case of the continuous problem, the satisficing trade-off method is very useful to find a Pareto solution on a set of aspiration level and extreme points. Authors had proposed a optimal criteria function based on the concept of the satificing trade-off method for the discrete problem which has the continuous optimal solution.
The purpose of this study is to find a optimal criteria function for the discrete two-objective optimal problems without the continuous optimal solution. Several optimal criteria functions are proposed by the way of trial and error. The coinciding rate of each function is examined numerically by the simple discrete two-objective optimal problems.

Key Words : Satisficing Trade-off Method, Discrete Two-objective Optimal Problem, Optimal Criteria Function

1. はじめに

多目的最適化問題の解は一般にトレードオフの関係にある解集合，すなわち Parete 解集合を形成する．問題を構成する変数がすべて連続数の場合には，満足化トレードオフ法 [1]によって選考解の選定を行うことができる．すなわち，各目的に対して設定した理想点および希求水準から各目的の満足度を算出し，その最大のものを最小化するという最適性規準（以後，本論文中ではZmin 規準と呼ぶ）に基づく手続きを経て，結果的に各満足度が均一化された解として Pareto 解のひとつを得るものである．主に希求水準値を変更することによって種々の Pareto 解を探索し，最終的に選考解を選定する．この選考解は意思決定者の満足度に着目したものであり，特に構造設計問題のような問題の解として適している．

しかしながら，問題を構成する変数が離散変数である場合には著者らが先に指摘したように，Zmin 規準による解が必ずしも意思決定者を満足させる解とはならない場合もある．この難点を克服する一方法として著者らは，対象とする多目的最適化問題の連続最適解が得られることを前提に満足度空間上において連続最適解が有する満足度と各離散解が有する満足度との偏差Nを最小にする離散解を最適解とするNmin 規準を提案した [2]．さらにNmin 規準が適用できない場合，すなわち，構造形式をも決定すべき離散変数として取扱った研究 [3]において顕著であったように何らかの理由で連続最適解を求めることができない，あるいは連続最適解を求めることが困難な離散的多目的最適化問題の場合への対応として．Nmin 規準に代わる最適性規準を試行錯誤的に提案し，その有効性を検討した [2]．この検討過程においてNmin 規準による解が，離散的 Pareto 解ではない場合があることが発見された．

本研究では，離散的 Pareto 解のみを対象としたNmin 規準による解を求め，すべての組合せを対象としたNmin 規準による解の不一致の程度を検証するとともに，先に提案していた種々の最適性規準による解との一致度の検証を目的として，非常にシンプルな離散的２目的最適化問題による数値実験結果について報告する．

2. 最適性規準の提示

離散的多目的最適化問題では，各離散解は各目的に対してそれぞれの満足度を有する．図-1のように各目的に対する満足度を軸とする空間を満足度空間と呼ぶこととすると，各離散解は満足度空間にプロットすることができる．ここに，連続最適解は等満足度線上にあり，しかも最小の満足度を有するため，連続最適解と原点を結ぶ等満足度線を対角線とする正方形の内側にはいずれの離散解も存在しないことになる．

このような満足度空間においてNmin規準は図-1に示すように，連続最適解が存在することを前提として，各離散解の満足度と連続最適解の満足度との偏差を最小にする規準であり，式表示すると次のようになる．

Nmin 規準：

$$N = \sum \left(Z^{c} - Z_{i}^{d}\right)^{2} \tag{1}$$

ここに，Z^{c}は連続最適解の満足度，Z^{d}_{i}はｉ番目の目的に対す

る離散解の満足度である．このNmin 規準による解が，ある理想点および希求水準を与えたときの離散的最適解になる．

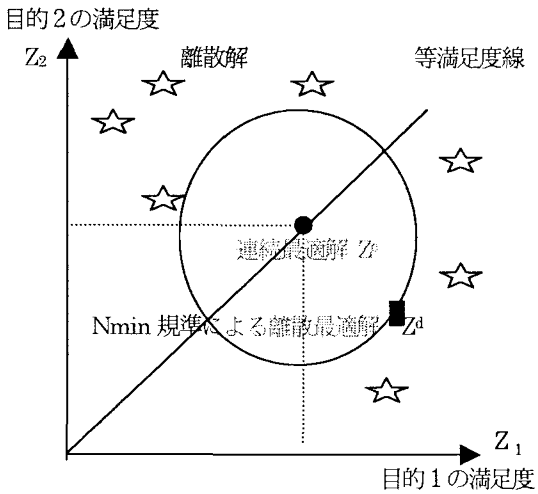

図-1　満足度空間と連続最適解，離散解の概念図

一方，連続的問題で用いられる最適性規準を Zmin 規準と呼ぶことにする．

Zmin 規準：

$$Z = \max\left(Z_i^d\right) \tag{2}$$

さらに本研究では，以下のような最適性規準を試行錯誤的に考案した．

Lmin 規準：

$$L = \sum\left(Z^W - Z_i^d\right)^2 \tag{3}$$

ここに，Z^W は Zmin 規準で得られた離散解の満足度の加重平均値である．

Bmin 規準：

$$B = \sum\left(Z_i^A - Z_i^d\right)^2 + L \tag{4}$$

ここに，Z_i^A は判定対象の離散解の満足度の算術平均値である．

Smin 規準：

$$S = \sum\left(Z^A - Z_i^d\right)^2 + L \tag{5}$$

ここに，Z^A は Zmin 規準で得られた離散解の満足度の算術平均値である．

式(3)～(5)で示される各最適性規準は連続最適解が得られないことを前提として，ｉ番目の目的に対する離散解の満足度 Z_i^d の関数となっている．

3. 数値実験対象問題

本研究で模索する最適性規準は連続最適解が得られず Nmin 規準を用いることができない場合への適用を目指しているが，その適用性を検討する場合にはNmin 規準による離散最適解との一致度を検証する必要がある．そこで，ここでは次のような２変数による２目的問題を設定し，数値実験を行うこととした．

２目的問題：

目的関数： $P = \left(X_P - X\right)^2 + \left(Y_P - Y\right)^2 \rightarrow \min$　　(8a)

$Q = \left(X_Q - X\right)^2 + \left(Y_Q - Y\right)^2 \rightarrow \min$　　(8b)

制約条件： $X \in (1,2,\ldots,10),\ Y \in (1,2,\ldots,10)$　　(8c, d)

ここに，目的関数Pは任意の座標（X_P, Y_P）の点と点（X, Y）との偏差を最小にするという目的を表しており，同様に目的関数Qは任意の座標(X_Q, Y_Q)との偏差の最小化を意味する．決定すべき変数（X, Y）は，それぞれ１から 10 までの整数とする．

なお，目的関数P，Qはいずれも最小化される関数であるため満足度を算出する際の理想点P_SおよびQ_Sは$P_S = Q_S = 0.0$とする．目的関数P，Qの希求水準P_AおよびQ_Aを数値実験パラメータとし，目的Pに対する希求水準P_AをP_A=1.0, 1.1,…, 5.0 と 0.1 刻みに 41 通り，目的Qの希求水準Q_AをQ_A=1.0, 1.1,…, 1.5 の６通りに設定し，総計 246 ケースとする．また，目的 P，Q の座標にはランダムに抽出した組合せから特徴的と判断された４組を採用し，それぞれの組合せを Case1～4 と呼ぶ．表-1 に各 Case の座標値を示す．

表-1　目的 P，Q の座標

Case	点Ｐの座標	点Ｑの座標
1	(7.6 , 3.3)	(2.3 , 8.4)
2	(4.5 , 2.3)	(1.5 , 6.2)
3	(1.5 , 6.2)	(1.0 , 1.0)
4	(1.0 , 1.0)	(4.5 , 2.3)

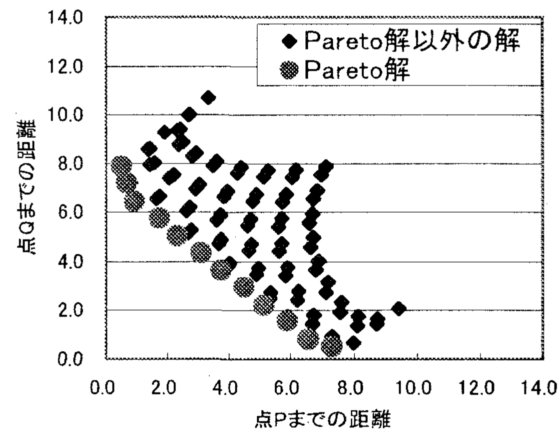

図-2　目的関数値空間における離散的 Pareto 解（Case1）

4. 数値実験の方法と結果

まず各 Case における離散的 Pareto 解を求めた．それぞれの設計変数の組合せに対して各目的関数値を算出し，目的関数値空間にプロットしたうえで離散的 Pareto 解を求めた．図-2 にはその一例として Case 1の全 121 組の解と 12 組の離散的 Pareto 解を示す．図-3 には，離散的 Pareto 解を目標とする P，Q 点とともに設計変数空間表示している．Case 2～4ではそれぞれ9組，6組，7組の離散的 Pareto 解が得られた．

この離散的 Pareto 解のみを対象として，希求水準値を変化させ，連続最適解，Nmin 規準による解，式(2)～(5)に示すそれぞれの最適性規準による解を求めた．次に離散的 Pareto 解の

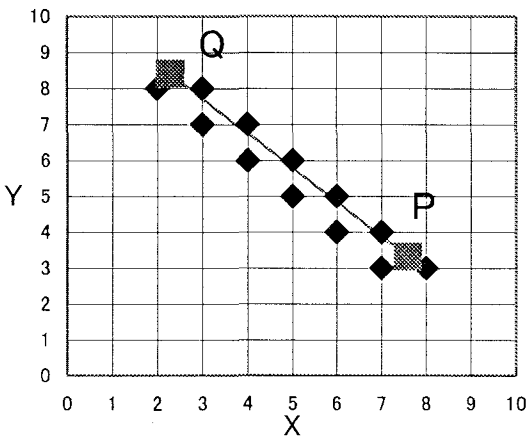

図-3 設計変数空間における離散的 Pareto 解（Case 1）

みを対象としたNmin 規準による解とすべての組合せを対象としたNmin 規準による解との一致度を調査し，相違の程度を把握しNmin 規準を最適性規準として用いる場合の留意点を究明する．さらにその上で各最適性規準による解と離散的 Pareto 解のみを対象としたNmin 規準による解との一致度を調べ，各最適性規準の有効性を検討した．

表-2 に調査結果の一部として，Case 1でQ_A=1.0，P_A=2.5～5.0 の 26 例を示す．表は，左列から，希求水準値，連続最適解の座標，全組合せを対象としたNmin 規準による解の座標と

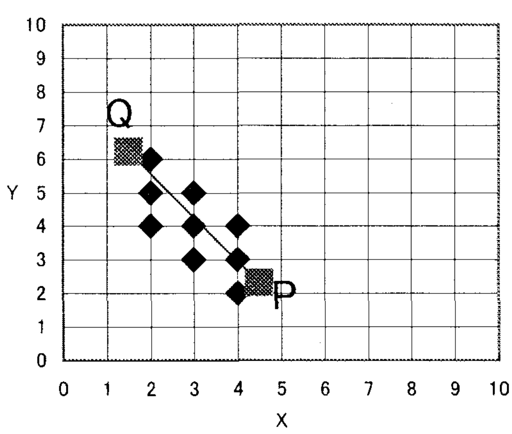

図-4 設計変数空間における離散的 Pareto 解（Case 2）

一致の是非，離散的 Pareto 解のみを対象としたNmin 規準および各最適性規準による解の座標であり，一致度には各最適性規準による解が離散的 Pareto 解のみを対象としたNmin 規準による解と一致した場合に○印を付し，そうでない場合には空欄としている．実際には全 246×4=984 ケースについて，このような表型式で調査を行った．

表-2 のP_A=2.8～3.4 およびP_A=4.4～5.0 に見られるように同じNmin 規準による解であっても全組合せを対象とした場合と離散的 Pareto 解のみを対象とした場合では異なる解が得られることがある．これは離散的 Pareto 解以外の解の中に式(1)で算出される N 値が小さい解がある場合もあることを意味している．従来，この全組合せを対象としたNmin 規準による解を基準として提案した最適性規準の適応性を検討してきたが，そのかなりの部分が意味のないものだった可能性を示すものである．

一方，離散的 Pareto 解のみを対象としたNmin 規準による解と他の最適性規準による解との比較においては，P_A=2.9 のときのようにNmin 規準による解と他の最適性規準による解が全く一致しない場合も見られたが，基準となるNmin 規準による解も他の最適性規準による解も離散的 Pareto 解のなかから選ばれるという解候補が限定されたということもあって，全般に高い一致率を観察することができた．中でも式(5)で算出される S 値を最小とする Smin 規準による解の一致率が高く，Case 1 全般を通して 98.73%というものであった．これに対して，式(2)で算出される Z 値を最小とする Zmin 規準の一致率は 83.74%とかなり低いものであった．

この Case 1 では目標点 PQ 間の距離が比較的大きく，点 P，Q の X 座標および Y 座標の変化も比較的大きく，設計変数空間を充分に生かした問題設定となっている．これに対して図-4 に示す Case 2 では Case 1 よりも PQ 間の距離が小さく，離散的 Pareto 解も Case 1 より少ない 9 であるが，同じ X 座標に対して 3 つずつの Y 座標を有する離散的 Pareto 解が存在する．また Case 3 では点 P，Q の X 座標の変化が小さく，Case 4 では逆に点 P，Q の Y 座標の変化が小さい．このような特徴を有する Case 1～4の一致度を集計すると表-3 が得られる．表-3 では，離散的 Pareto 解のみを対象としたNmin 規準による解との一致数とその比率を，全組合せを対象としたNmin 規準による解，離散的 Pareto 解のみを対象とした他の最適性規準による解の順に Case ごとに整理し，Case 1～4の平均一致率を最下段に併記している．

全組合せを対象としたNmin 規準による解との一致度は予期した以上に低く，平均で 67%強というものであった．これより今後，連続最適解が得られる離散的多目的最適化問題においてNmin 規準を用いる場合に，解が離散的 Pareto 解から選ばれるよう配慮しなければならないことがわかる．

また，Zmin 規準を除く 3 種の最適性規準による解の一致度は Case 4における Bmin 規準を除けば 93%以上の高い一致率を示している．中でも Smin 規準は Case 1～3で 95%以上の高い一致率を示し，平均でも 96.44%であり，限られた問題での数値実験結果であるものの，今回の検討結果からは Smin 規

準がNmin規準が適用できない問題において離散的多目的最適化問題の最適性規準として最有力と評価するものである．

5. おわりに

本研究では，連続的最適解が得られない場合の離散的多目的最適化問題の最適性規準を満足化トレードオフ法のコンセプトをベースとして基礎的に模索した．その過程においてNmin規準を適用する場合の留意点が明らかになった．さらに簡単な数値実験結果に限定されるが，Nmin規準による解との一致率が95%前後まで向上させる最適性規準としてSmin規準を発見することができた．この規準を用いることにより，連続的最適解が得られない場合の離散的多目的最適化問題においても満足度をベースとした意思決定者によるトレードオフを従来と同様に行うことが可能と思われる．離散的最適化手法として強力な遺伝的アルゴリズムとの融合なども含めて，今後の検討課題としたい．

参考文献

1)亀廻井寿明,杉本博之,中山弘隆:構造最適設計のための改良型満足化トレードオフ法に関する研究,土木学会論文集,第441号,pp.117-126,1992.1.

2)三原徹治,千々岩浩巳,兼松建男:満足度をベースとする離散的多目的最適化問題の最適性規準に関する基礎的研究,第7回システム最適化に関するシンポジウム論文集,pp.109-112,2001.12.

3)三原徹治,太田俊昭,日野伸一:GAを用いた多柱式合成高橋脚の予備設計法に関する基礎的研究,第5回システム最適化に関するシンポジウム講演論文集,pp.213～218,1997.12.

表-2 調査結果の一例（Case1，一部）

希求水準		連続最適解		Nmin (全組合せ)		一致度	(Pareto解のみを対象) Nmin		Zmin		Bmin		Smin		Lmin		一致度 Zmin	Bmin	Smin	Lmin
PA	QA	XC	YC	X	Y		X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	Zmin	Bmin	Smin	Lmin
2.5	1.0	3.81	6.94	4	7	○	4	7	4	7	4	7	4	7	4	7	○	○	○	○
2.6	1.0	3.77	6.98	4	7	○	4	7	4	7	4	7	4	7	4	7	○	○	○	○
2.7	1.0	3.73	7.02	4	7	○	4	7	3	7	4	7	4	7	4	7		○	○	○
2.8	1.0	3.69	7.06	4	8		4	7	3	7	4	7	4	7	4	7		○	○	○
2.9	1.0	3.66	7.09	4	8		4	7	3	7	3	7	3	7	3	7				
3.0	1.0	3.63	7.13	4	8		3	7	3	7	3	7	3	7	3	7	○	○	○	○
3.1	1.0	3.59	7.16	4	8		3	7	3	7	3	7	3	7	3	7	○	○	○	○
3.2	1.0	3.56	7.19	4	8		3	7	3	7	3	7	3	7	3	7	○	○	○	○
3.3	1.0	3.53	7.21	4	8		3	7	3	7	3	7	3	7	3	7	○	○	○	○
3.4	1.0	3.50	7.24	4	8		3	7	3	7	3	7	3	7	3	7	○	○	○	○
3.5	1.0	3.48	7.27	3	7	○	3	7	3	7	3	7	3	7	3	7	○	○	○	○
3.6	1.0	3.45	7.29	3	7	○	3	7	3	7	3	7	3	7	3	7	○	○	○	○
3.7	1.0	3.43	7.31	3	7	○	3	7	3	7	3	7	3	7	3	7	○	○	○	○
3.8	1.0	3.40	7.34	3	7	○	3	7	3	7	3	7	3	7	3	7	○	○	○	○
3.9	1.0	3.38	7.36	3	7	○	3	7	3	7	3	7	3	7	3	7	○	○	○	○
4.0	1.0	3.36	7.38	3	7	○	3	7	3	7	3	7	3	7	3	7	○	○	○	○
4.1	1.0	3.34	7.40	3	7	○	3	7	3	7	3	7	3	7	3	7	○	○	○	○
4.2	1.0	3.32	7.42	3	7	○	3	7	3	7	3	7	3	7	3	7	○	○	○	○
4.3	1.0	3.30	7.44	3	7	○	3	7	3	8	3	7	3	7	3	7		○	○	○
4.4	1.0	3.28	7.46	2	7		3	7	3	8	3	7	3	7	3	7		○	○	○
4.5	1.0	3.26	7.47	2	7		3	7	3	8	3	7	3	7	3	7		○	○	○
4.6	1.0	3.25	7.49	2	7		3	7	3	8	3	7	3	7	3	7		○	○	○
4.7	1.0	3.23	7.51	2	7		3	7	3	8	3	8	3	7	3	7			○	○
4.8	1.0	3.21	7.52	2	7		3	7	3	8	3	8	3	7	3	7			○	○
4.9	1.0	3.20	7.54	2	7		3	7	3	8	3	8	3	7	3	8			○	
5.0	1.0	3.18	7.55	2	7		3	7	3	8	3	8	3	7	3	8			○	

表-3 最適性規準別・Case別の一致度集計表

Case	Nmin規準 (全組合せ対象)	Zmin規準	Bmin規準	Smin規準	Lmin規準
1	152 (0.6179)	206 (0.8374)	233 (0.9472)	242 (0.9837)	238 (0.9675)
2	219 (0.8902)	194 (0.7886)	229 (0.9309)	236 (0.9593)	233 (0.9472)
3	127 (0.5163)	217 (0.8821)	238 (0.9675)	242 (0.9837)	241 (0.9797)
4	164 (0.6667)	200 (0.8130)	220 (0.8943)	229 (0.9309)	229 (0.9309)
平均	0.6728	0.8303	0.9350	0.9644	0.9563