

非線形反復計算による構造形態形成に関する研究

RESEARCH OF STRUCTURAL LAYOUT DESIGN
USING NONLINEAR REPEATED ANALYSIS

飯居 紅美子* ・ 有尾 一郎**

Kumiko Ii and Ichiro Ario

*広島大学工学部第四類(建設系) 在学中 (〒 739-8527 広島市鏡山 1-4-1)

**広島大学大学院工学研究科社会環境システム専攻 博士(工学) (同上)

The stiffness control models on the ground structure are employed to simulate the creation of structure design of the optimum layout problem. The lattice truss are modeled as assemblages of a number of unit cells, which repeat to undergo finite element analysis to feed back stress's results to the stiffness of each member. Through the repeated this analysis, truss model are represented to form the topological materials and the structural shape with the use of the local stress condition without mathematical optimum tools. It is successful to analyse the shape-layout problem as numerical examples on the truss problem.

Key Words : *Nonlinear Analysis, Structural Layout Design, Michell Problem, MBB Problem*

1. はじめに

構造物の最適設計に関する研究は、与えられた設計条件下で構造部材の最適な断面積や断面寸法、部材長さなどを決定するサイジング問題が従来より行われてきた。最近では部材あるいは構造物の最適形状を求める位相最適化問題が盛んに行われ、その方法として、均質化法^{1)~4)}や、構造物の体積制約条件下でコンプライアンスを最小化(剛性を最大化)することを目的とするグラッドストラクチャー法などが挙げられる^{5)~9)}。しかし、これらの手法は、構造の構成要素のうちどの要素間を結合させ、どの要素を取り除くかを決定するといった組み合わせ最適化問題としての側面が強いため、選択可能な解がいくつも存在することが少なくない。

一方で、組み合わせ最適化問題において存在する多数の選択可能な解を、同時に得ることができる手法として遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithms : GA)^{10),11),12)}やセルラオートマタ (Cellular Automata : CA)^{13),14),15)}といった創発的手法を応用した研究も行われ、局所的な情報を記述する法則(ローカル・ルール)を用いることによって、多様な位相構造を容易に生成することを可能にしている。こうした複雑系を用いた形状最適化は盛んに研究が行われているが、いずれも要素数の少ない基本的なトラス構造の最適化問題にとどまっており、大規模な構造モデルになると、安定な収束解を得ることは困難とされている。

本研究は、構造システム全体では幾何学的非線形性を持つ有限要素モデルを採用し、この部材要素内の局所ルールによって、その部材の剛性を決定させるといった数理的に単純な反復方法によって、構造形態を決定

させていく手法である。すなわち、設計領域内に仮想的なトラスで離散化した上で境界条件や荷重条件を与え、この離散系の力の流れをもとに局所・マクロ的視点で構造形態を創生させていく。このため、単純なアルゴリズムを組み合わせることで多様な位相構造を容易に生成できるという利点を持つ。

本研究の数値解析例として、位相最適化問題でよく知られている「コート掛け問題」を取り上げ、様々な支持条件と格子トラス分割数の上で解析し従来の最適化手法と比較して、最適な形態が得られることを確認した。また、形成した構造形態をピクセルやコンターに表現することで、得られた形態に作用する力の流れの再現も行った。さらに、離散化最適構造例として設計領域を極座標に分割することにより、Michell のトラス解に酷似した解が得られ、この解析手法の信頼性の高さを示すことができた。これによって、構造物の形状レイアウト設計や材料配置問題に対して工学的に有用なデザインを検討でき、設計を支援するツールとしてその価値は高いものと思われる。

2. 形態形成解析

この論文ではローカルな部材応力に主眼を置いた構造形態の形成法について述べる。

2.1 反復法による形態形成

ある設計領域 Ω を M 部材からなる有限の設計変数

$$\mathbf{x} = (\dots, x^{(m)}, \dots)^T \in \mathbf{R}^M \text{ in } \Omega \quad (1)$$

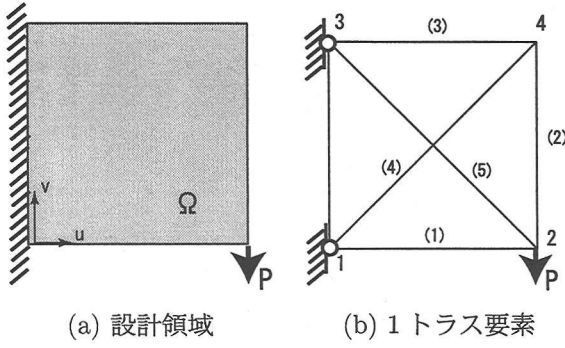


図-1 設計領域とトラス構造

で満たされるものとする。釣合方程式を

$$F(u, p, x) = \mathbf{0} \quad (2)$$

とする。ここに、 $u \in \mathbf{R}^N$ は変位ベクトルを、 $p \in \mathbf{R}$ は荷重パラメータとする。最終的に、離散系の釣合式を満足する解 (u, p, x) を求める。方程式 (2) の釣合点の近傍で局所線形化を行うと、増分釣合式

$$J\tilde{u} + \frac{\partial F}{\partial p}\tilde{p} + \frac{\partial F}{\partial x}\tilde{x} = \mathbf{0} \quad (3)$$

として表せる。ここに $\tilde{\cdot}$ は増分変数であり、 J は接線剛性行列である。

本研究では、剛性行列の修正は各部材の応力応答のフィードバック系とし、これを釣合式に満たすように剛性をコントロール(剛性制御)する。いま、初期設計変数 $x_{(0)}$ を設定し、荷重制御や変位制御によって釣合点 $(u, p, x_{(0)})$ が得られたとしよう。このときの、部材応力は

$$\sigma_{\text{Lower}} \leq \sigma^{(m)} \leq \sigma_{\text{Upper}}, \quad m = 1, \dots, M \quad (4)$$

$$\sigma_{(\nu)} = f(u_{(\nu)}), \quad \nu = 0, 1, \dots \quad (5)$$

各部材の変形状態の関数とする。ここに、 $\sigma_{(\nu)} = (\dots, \sigma_{(\nu)}^{(m)}, \dots)^T$, $u_{(\nu)} = (\dots, u_{(\nu)}^{(m)}, \dots)^T$ を表すこととする。さらに、構造形態を決めていく設計変数も部材応力によって

$$x_{(\nu+1)} = f(\sigma_{(\nu)}), \quad \nu = 0, 1, \dots \quad (6)$$

と支配され、当然剛性行列も更新されることになる

$$J(u, p, x_{(\nu+1)})\tilde{u}_{(\nu+1)} = \frac{\partial F}{\partial p}\tilde{p} \quad (7)$$

の釣合方程式の解を $(u_{(\nu+1)}, p, x_{(\nu+1)})$ を求めることになる¹ この解を式 (5) に再び代入することで、一連の反復計算を行い、応力あるいは変位の収束条件を満たすようにする。すなわち、節点変位と新しい設計変数は釣合式の反復計算より

$$\begin{aligned} u_{(\nu)} &= f(p, x_{(\nu)}), \\ x_{(\nu+1)} &= f(\sigma(u_{(\nu)})), \quad \nu = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

¹ いま、この解は荷重制御にて変位ベクトル $u_{(\nu+1)}$ を求めたこととして表記する。

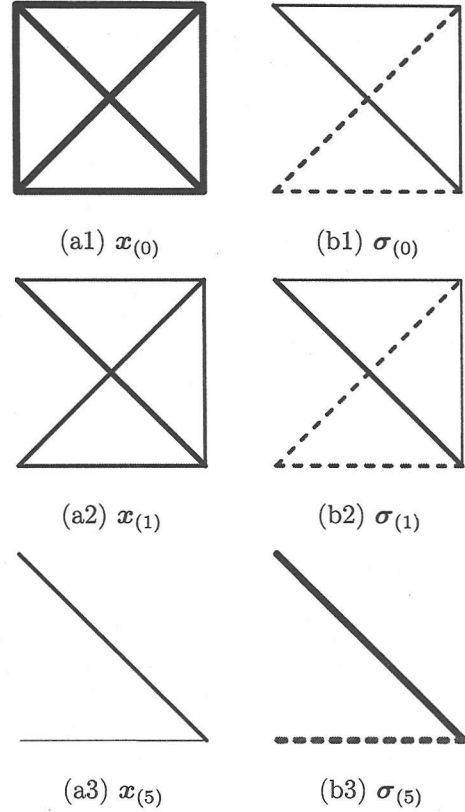


図-2 断面剛性変化と応力分布の経過の一例

と表すことができる。したがって、典型的な多元多重型の非線形反復式

$$\begin{aligned} x_{(\nu+1)} &= f(x_{(\nu)}) = f(f(\dots f(x_{(0)}))), \\ &= f^\nu(x_{(0)}), \quad \nu = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

として書ける。この研究では、応力や変位の制約条件をできるだけ単純なローカルルールを採用し、反復計算によって構造形態のコントラスト(レイアウト)を明確にしていける手段をとる。

2.2 単純なトラスの形態形成例

図-1(a)に示す片持ち構造の設計領域 Ω の先端下部に荷重 p が作用する場合の形態形成を考えよう。このときの骨組構造の一例として、同図(b)のような単純なトラスを設定し、部材の少数化・軽量化・力学的必要性を探るための形態形成を調査する。

この弾性体の補ひずみエネルギー最小の原理を用いて形態形成の仕組みについて述べる。いま、節点1と3は固定されているので、この間の部材は考えないで、節点1の鉛直方向の反力 V_1 を未知力 X とおくと、それぞれの部材力を $N^{(m)}(X, P)$ と表す。補ひずみエネルギー最小は

$$\frac{\partial U^*}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \sum_{m=1}^M \frac{1}{2} \int_{V^{(m)}} \sigma^{(m)} \varepsilon^{(m)} dV$$

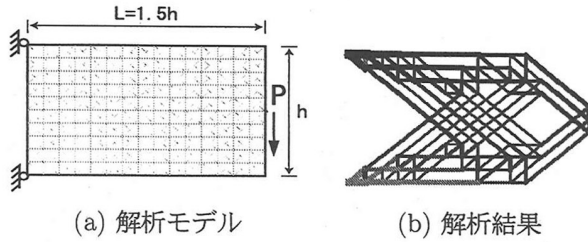


図-3 コート掛け問題 10 × 15 分割 (625 要素)

$$= \frac{\partial}{\partial X} \sum_{m=1}^5 \frac{(N^{(m)}(X, P))^2 \ell^{(m)}}{2E^{(m)} A^{(m)}} = 0 \quad (10)$$

と表される。ここに、部材断面積を設計変数 $A^{(m)}$ とすると式 (10) は

$$\frac{\partial U^*}{\partial X} = \frac{\ell}{E} (\alpha X - \beta P) = 0$$

のように整理され、このときの未知力を求めると

$$X = \frac{\beta}{\alpha} P = \left(\frac{\frac{1}{A^{(1)}} + \frac{2\sqrt{2}}{A^{(5)}}}{\frac{1}{A^{(1)}} + \frac{1}{A^{(2)}} + \frac{1}{A^{(3)}} + \frac{2\sqrt{2}}{A^{(4)}} + \frac{2\sqrt{2}}{A^{(5)}}} \right) P$$

となる。この β/α による非線形性が各部材力に伝播することになる。また、部材応力は

$$\sigma_{(\nu)}^{(m)} = \frac{N_{(\nu)}^{(m)} \left(\frac{\beta}{\alpha} P, P \right)}{A_{(\nu)}^{(m)}}, \quad m = 1, \dots, M$$

によって得られ、この部材応力がある制約条件下で設計変数である断面積に

$$A_{(\nu+1)}^{(m)} = f(\gamma, \sigma_{(\nu)}^{(m)}), \quad m = 1, \dots, M, \nu = 0, 1, \dots$$

と式 (9) のような関数形でフィードバックされる。ここに γ は応力を部材剛性に反映させる割合とする。この非線形応答の蓄積によって、この領域での形態が形成されていくことになる。すなわち、設計変数である $A_{(\nu)}^{(m)}$ の反復非線形性が各部材の応力応答に伝播し、その応答が設計変数にフィードバックされ、図-2に示するような形状レイアウトのプロセスを得ることになる。

3. 形態解析例

3.1 コート掛け問題

固定壁からある位置に荷重 p を載荷するとき、力を伝達するための構造形態を設計する問題として「コート掛け問題」が知られている。ここでは、この形態問題を本解析法を用いてレイアウトすることにする。

格子場を図-3(a) に示すようにアスペクト比が 1.5 になるように設定し、設計領域を 10 × 15 要素に分割する。設計変数である部材剛性の初期値はすべて均一 ($EA = 1$) とし、許容最大剛性を $EA_{\text{up}} = 6$ 、荷重レベルは $p = 0.005$ 、フィードバックのための反映率は $\gamma = 0.1$ とし、弧長制御法を用いて各部材の応力を算出した。弧長制御法は増分量の決定に試行錯誤を伴うが、

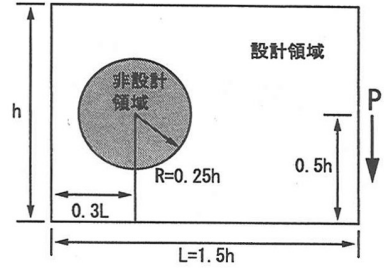
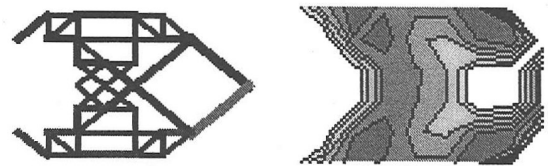
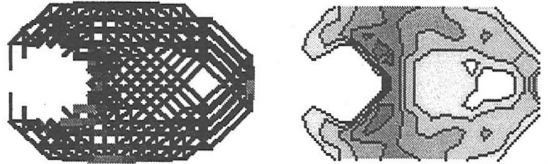


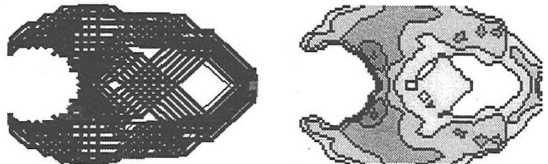
図-4 解析モデル



(a) 6 × 10 分割 (256 要素)



(b) 12 × 20 分割 (992 要素)



(c) 20 × 33 分割 (2693 要素)

図-5 解析結果

複雑な釣り合い経路を探索することが可能である。その結果、得られる応力分布を次の設計変数 $x_{(1)}$ に反映し、繰り返し数値解析を行った。図-3(b) は本解析結果を示したものである。部材の太さはその応力のレベルを反映し、灰色は圧縮、黒色は引張部材を表す。部材数は初期状態に比べて 35% に削減されている。この数値は最適化されているとは言えないものの、従来の最適化手法である均質化法やグランドストラクチャー法に示す形態と大局的に良く似た位相を示していることがわかる。

3.2 Michell のトラス問題

構造の最適レイアウト問題を取り扱った最も古い研究の一つが 1904 年の Michell のトラス解である。この方法の適応範囲はごく限られた単純な幾何形状に限られているが、数少ない解析解の一つとして知られている。この問題に対して本手法を用いる。図-4に示すよ

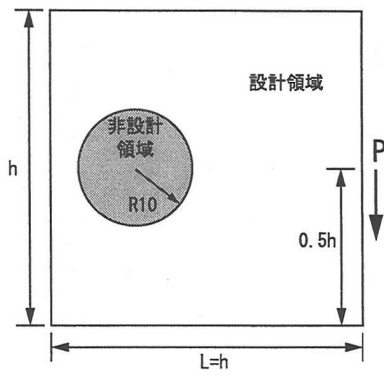


図-6 拡張された解析モデル

うな長方形設計領域とその内部の円形の非設計領域とし、その非設計領域回りの節点を固定して、設計領域の右端中央に荷重をかける。非設計領域は計算上他の部材に比べて高い剛性に設定し、常に材料が存在しているものとして、円周状にピンジョイントで支持されているという条件のもとに数値解析を行った。解析結果を図-5の左列に示す。全設計領域を 6×10 , 12×20 , 20×33 要素の格子トラスに分割して数値解析を行う。荷重レベルは $p = 0.003$, 初期部材剛性は全て均一 ($EA = 1$) として、図-5(a) では許容最大剛性を $EA_{up} = 4$, 反映率を $\gamma = 0.1$ とし、図-5(b) では $EA_{up} = 4$, $\gamma = 0.06$, 図-5(c) では $EA_{up} = 3$, $\gamma = 0.03$ で解析を行った。図-5(a) ではまだメッシュが粗く Michell の解に近いとは言えないが、図-5(c) においては滑らかな曲線が示されており、互いの部材も直交している。Michell は設計空間やトラス格子の節点数を増加させるほど、より最適な解が導けることを証明している。こうした裏付けからも本研究の解析手法が良好な結果を導き出しているといえる。

また各分割領域において、設計領域に作用する応力状態をコンター表現を用いて表したものを図-5の右列に示す。この表現方法により解析で得られた形態に作用する力の流れを読み取ることができる。この結果から、上端と下端の応力の流れが切れていることを考慮して、設計領域を正方形に拡張した領域とし、次節にて数値解析を行うことにする。

3.3 Michell のトラス問題 2

図-6に示すように、先の Michell のトラス問題で取扱った解析例の設計領域を上下に拡張し、正方形領域にしたものを再び解析する。それぞれ 20×20 , 30×30 に分割し、数値解析を行った。初期剛性と荷重レベルは前節の例と同様にし、 20×20 分割モデルでは $EA_{up} = 4$, $\gamma = 0.045$, 30×30 分割モデルでは $EA_{up} = 4$, $\gamma = 0.025$ とした。このときの応力分布変化(形態変化)は図-7(a) および (b) のように移行する。この結果の興味

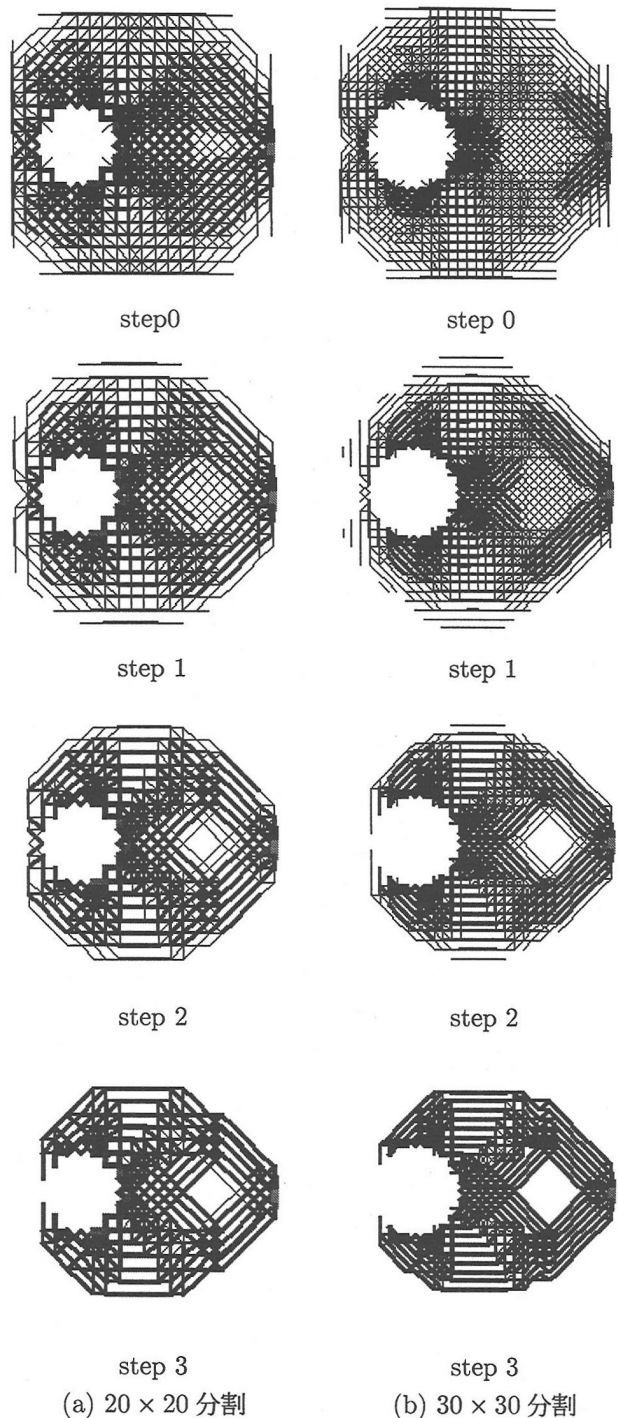


図-7 形態変化

深い点として、長方形領域で解析した結果では、分割数を変えることによって異なった形態が得られたのに対して、十分な設計領域を与えて解析した結果、図-7に示されるように、分割数を変えても非常に似た形態が得られることである。このことから、本研究の提案する手法が十分な設計領域において、その分割数の違いに依存せず、同一の結果が安定して得られることを示唆

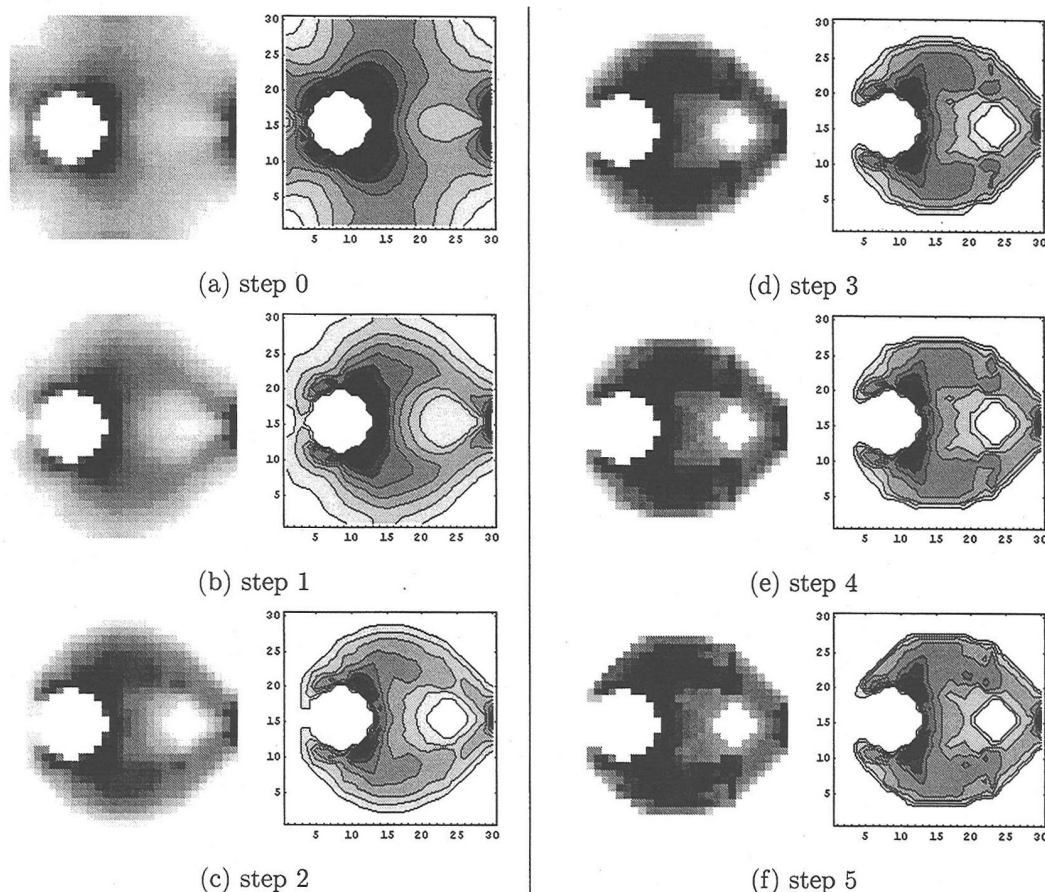
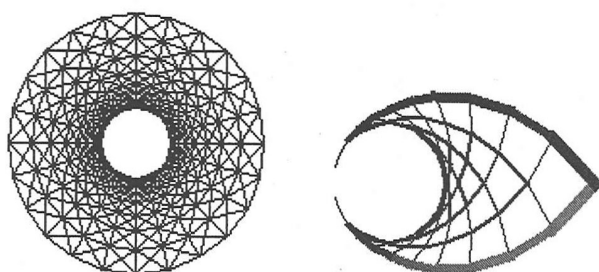


図-8 30 × 30 ピクセルとコンター表現による解析結果

している。図-8に 30 × 30 分割の解析結果で得られた形態に働く応力分布の様相をピクセル表現とコンター表現で示す。領域内に働く応力の流れが解析結果と同様の形態を浮き彫りにしていることが示されている。

次にトラスの構成が異なるモデルとして図-9に設計領域内を極座標で分割した格子トラス要素を挙げ、数値解析を行った。この結果は主応力線図によく一致し、Michell の解に酷似しており、本手法の信頼性の高さを十分評価することができる。



(a) 解析モデル

(b) 解析結果

図-9 Michell モデルの創生

4. はりモデルの数値解析

4.1 MBB はりの解析

MBB はりモデルの数値解析を行う。解析モデルは図-10と図-12に示すように、縦横比が 1/3 と 1/6 とする。図-10では格子トラス分割は 10 × 30 で、初期剛性は $EA = 1$ 、許容最大剛性は $EA_{up} = 4$ とし、荷重レベルは $p = 0.065$ として、図-12では格子トラス分割が 8 × 48 で、初期剛性は $EA = 1$ 、許容最大剛性は $EA_{up} = 6.5$ とし、荷重レベルは $p = 0.113$ としてこのときの解析結果を図-11と図-13に示す。灰色の圧縮部材がアーチアクションの様子をよく表している。こ

の結果に近い構造形態として、文献⁹⁾で示されたグラウンドストラクチャー法や均質化法でも同様の形態を得ており、今回のモデルはそれに近い形態を有している。

4.2 形態解析の応用例

最後に、形態形成解析の応用例として、コンクリートを想定した梁内部の強度発現部分の解明を、本手法を用いて試行する。連続体から不連続体となる場合の応力解析は破壊規準やひびわれ挙動とあいまってその

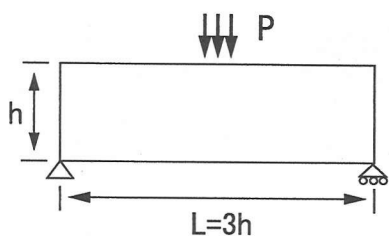
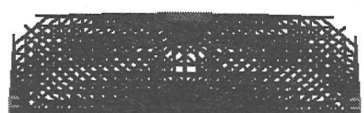


図-10 解析モデル



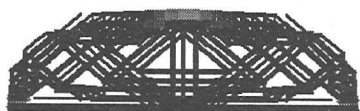
(a) step 0



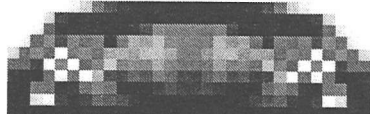
(b) step 1



(c) step 2



(d) step 3



(e) ピクセル表現

図-11 解析結果 (10 × 30 分割)

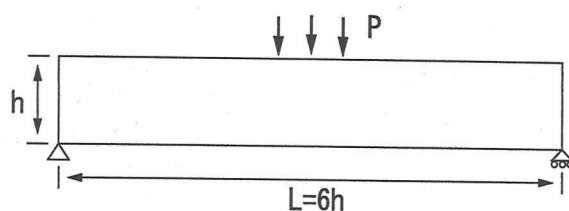
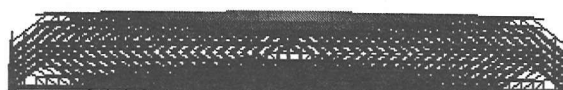


図-12 解析モデル



(a) step 0



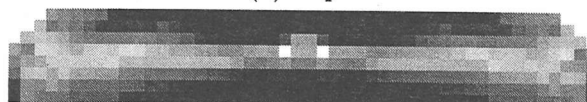
(b) step 1



(c) step 2



(d) step 3



(e) ピクセル表現

図-13 解析結果 (8 × 48 分割)

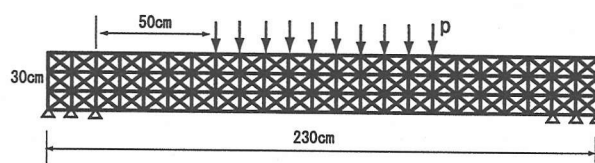


図-14 はりのモデル (23 × 3)

解析は一般に困難を伴う。ここでは、図-14に示す設計領域の自由度が $3 \times (4 \times 24) = 288$ 、部材数が 302 からなる格子トラスモデルを用いて、そのトラス部材にあるひずみ値になったら脆性的に破断する弾脆性モデルを組み入れ、その部材応力の大小によって、梁内部のどこの部分が強度に寄与しているのかを逐次とらえることを考える。すなわち、形態形成解析の特徴でもある制約条件を利用し、部材応力が応力条件を満たしていた引張部材が剛性制御によって次のステップで満たさない状態となったときその部分が脆性した（つまり、クラックが発生した）と想定する。そのときの、解析結果を図-15に示す。このような粗いトラスモデルでも力の流れを明確に認識できる。図-15(a)の灰色の圧縮部

分はアーチアクションが、黒色の部分は折り曲げ鉄筋と同じ形で両端部はフックのような形まで部材応力が再現できており、これから力の流れを認識することができる。従って、この引張応力が作用している部分に主鉄筋を配置することが賢明であることがわかる。当然、曲げモーメントが最大となる中央部の上下端に位置する部分には脆性破壊（クラック進展）した様相がとらえられている。また、圧縮力と引張力が交叉するせん断破壊付近では、応力集中の様相が良く分かる。

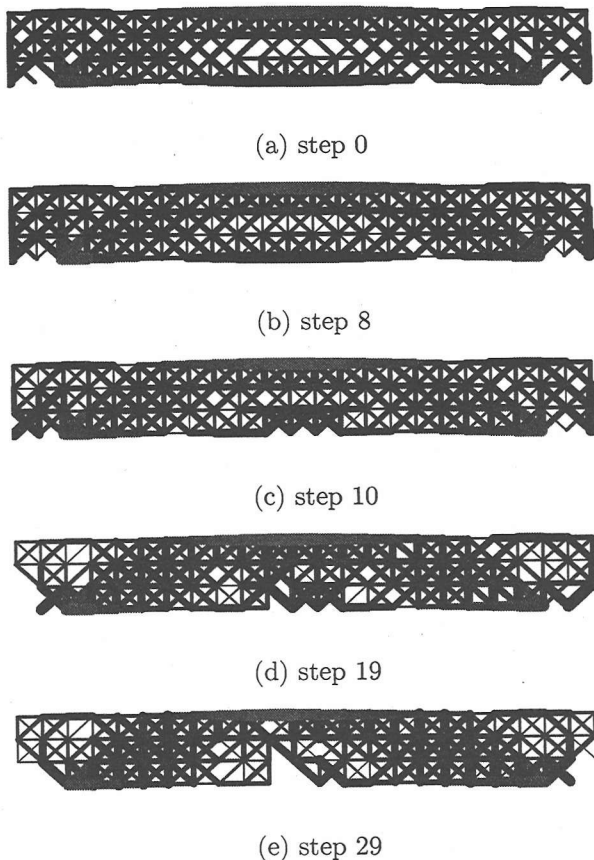


図-15 はりのモデル (23 × 3) の形態形成

5. 結論

本論文では、設計領域内を仮想トラスで離散化し領域内の応力分布を把握し、剛性変化にフィードバックさせることで、構造形態を形成する手法を示した。本手法の特徴としては、従来均質化法やグランドストラクチャー法で問題となっていた、設計領域内の分割数によって得られる構造形態が変化するという問題を解決した点にある。また、比較的部材数の多い解析モデルも安定した解析結果を得ることができた。

まず、本手法の有効性を「コート掛け問題」を取り上げ検討した。次に、Michell のトラス問題に拡張し、ピクセルやコンター表示といった視点から考察することでその形態レイアウトを示した。

MBB はりのモデルでは、スパン比を変えて解析を行った。この例題では、一点固定、一点ピン支持の単純はりを用いた。その結果、多少斜材に振動は残るものの、均質化法やグランドストラクチャー法と方向的に良く似た形態を創出することができた。最後にコンクリート梁を想定したモデルを解析し、梁内部の強度発現部分を解明し、本手法を用いて不連続体のひび割れ進展モデルを示すことができた。

参考文献

- 1) M. P. Bendsoe and N. Kikuchi : Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.71, pp.197-224, 1988.
- 2) M. P. Bendsoe : Optimal Shape Design as Material Distribution Problem, *Structural Optimization*, Vol.1, pp.193-202, 1989.
- 3) K. Suzuki and N. Kikuchi : A homogenization method for shape and topology optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.93, pp.291-318, 1991.
- 4) R. J. Yang and C. H. Chuang : Optimal topology design using linear programming, *Computers & Structures*, Vol. 52, No.2, pp.265-275, 1994.
- 5) Ringertz, U.T. : A branch and bound algorithm for topology optimization of truss structures, *Engng. & Optimization*, **10**, pp.111-124, 1986.
- 6) Kirsch, U. : Optimal topologies of truss structures, *Comput. & Struct.*, **72**, pp.15-28, 1989.
- 7) M. Zhou and G.I.N. Rozvany : The COC algorithm Part II : Topological, geometrical and generalized shape optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.89, pp.309-336, 1991.
- 8) M. P. Bendsoe : Optimization of structural topology, shape and material, Berlin, Heidelberg, New York : Springer, pp.139-180, 1995.
- 9) 藤井大地・松本慎也・藤谷義信・菊池昇 : グランドストラクチャー法による骨組構造物の位相最適化, *日本建築学会構造工学論文集*, No.46B, pp.1-8, 2000.
- 10) Jenkins, W.M. : Towards structural optimization via the genetic algorithm, *Comput. & Struct.*, **40**, pp.1312-1327, 1991.
- 11) Ohsaki, M. : Genetic algorithm for topology optimization of trusses, *Comput. & Struct.*, **57**, pp.219-225, 1995.
- 12) 大森博司・鬼頭伸彰 : 遺伝的アルゴリズムを用いたトラス構造物の形態創出, *日本建築学会構造系論文集*, Vol.520, pp.85-92, 2001.
- 13) 伊能教夫・下平真子・小林弘樹 : カ学構造物を自己組織化するセル・オートマトン (ローカルルールによって生じるシステム全体の挙動), *日本機械学会論文集 (A編)*, Vol.61, No.586, pp.1416-1422, 1995.
- 14) 伊能教夫・上杉武文 : カ学構造物を自己組織化するセル・オートマトン (さまざまな位相構造の生成とその形態比較), *日本機械学会論文集 (A編)*, Vol.61, No.585, pp.241-278, 1995.
- 15) 豊田哲也・北 栄輔・磯村 忠 : ローカル・ルールを用いたトラス構造最適化について, *計算工学講演会論文集*, Vol.4, pp.483-484, 1999.

(平成 13 年 10 月 6 日 受付)