

CA による鋼製ラーメン橋脚の最適耐震補強

APPLICATION OF CELLULAR AUTOMATON
TO OPTIMUM ASEISMATIC REINFORCEMENT OF STEEL RIGID PORTAL PIERS

倉田一平*, 白木 渡**, 保田敬一***, 堂垣正博****

Ippei KURATA, Wataru SHIRAKI, Keiichi YASUDA, and Masahiro DOGAKI

* 学士(工学), 関西大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒564-8680 吹田市山手町 3-3-35)

** 工博, 香川大学教授 工学部信頼性情報システム工学科 (〒760-8526 高松市林町 2217-20)

*** 工博, (株)ニュージェック 総合計画・環境部 (〒542-0082 大阪市中央区島之内 1-20-19)

**** 工博, 関西大学教授 工学部土木工学科 (〒564-8690 吹田市山手町 3-3-35)

The aim of this study is to apply a cellular automaton (CA) to optimum reinforcement of steel rigid portal frames. This system is a kind of artificial life (AL), and consists of many cells that change its condition according to a simple local rule. The optimum reinforcement of steel bridge piers is studied. And so, we divided a bridge pier into many cells and changed its thickness by using the local rule. This rule is indicated by the simple mathematical expression. As a result, we got numerical value reflected on the stress condition in the rigid frames. It is cleared that the optimum reinforcement by CA is possible. Also, we proposed a new local rule activating under the plastic area. In this method, we decide the location of reinforcement based on the plastic hinge.

Key Words: Cellular Automaton, Optimum Reinforcement, Local rule, Plastic Hinge

1. まえがき

わが国における道路などの社会資本は、欧米とは異なり、戦後に始まる高度経済成長とともに急速に整備されたものがほとんどで、わが国固有の問題を抱えている。当時は、構造物の維持管理よりも社会資本の新設を優先した国土開発が全国的に展開された。それから数十年経過した現在、これらに欠陥や老朽化、損傷などの兆候が出始めている。

このような状況下の平成7年1月17日、兵庫県南部地震が発生した。これによって道路や橋梁、ガスや水道などのライフラインをはじめ、多くの土木構造物がダメージを受けた。その後、道路橋示方書では耐震設計編の改訂がなされ、地震時保有水平耐力法や動的解析など、新しい設計法が導入された。また、規準に満たない既存の橋梁には改修が義務づけられた。このような構造物の老朽化や自然災害から認識を新たに、設計荷重の増大が求められ、既存の構造物を新しい設計荷重に対して如何に補強するかが重要な課題となりつつある。

一般に、社会基盤施設は、他の構造物に比べて公共性が強く、長期にわたって供用される。そのため、計画、設計、施工には細心の注意が払われ、供用期間中も適切

な維持管理が求められる。小規模で簡易的な補強は以前から行われてきたが、建設技術の進歩に伴い、構造物の幾何形状が複雑化し、補強工事も複雑化・大型化してきた。これに対処するため、最適設計の概念が補強設計にも導入されようとしている。補強最適化問題には、目的関数の設定で、総補強量やコストを最小とする補強形態が決定できる利点がある。反面、最適解の予測が困難で、問題が定式化できても極めて複雑な組合せ最適化問題になるという欠点もある。

ここでは人工生命 (Artificial Life : AL) 技術の一種であるセル・オートマトン (Cellular Automaton : CA) なる最適化手法で構造物の補強最適化問題の解析を試みる。

2. 人工生命技術について

AL 技術は、アメリカのラングトン博士によって提唱され、1987 年に国際会議で発表された理論である。これは、コンピュータ上で生命現象をプログラミングし、生物の行動やメカニズムを再現し、未解決問題に対処する技法である。AL 技術には CA 手法の他に遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm : GA)、ニューラルネットワーク (Neural Network : NN) などがあるが、本研究では、構造最

適化問題の解決に成果をあげている CA 手法を採用する。

2.1 CA について

CA は離散化手法の一種である。これは、ある空間に細胞状に区切られたセルを設け、セル間に簡単なローカルルールを導入し、これを構造全体に展開して時刻ごとの解を求め、その操作を時間発展させた場合の収束状態を観察する手法である。これによれば、大量の情報を取り扱わなくても簡単なローカルルールだけで大規模な最適化問題を比較的小規模な計算機で解くことができる。従来、本手法は流体解析などのシミュレーションに使用されることが多かった^{1),2)}。最近では構造物の安全性を維持するために必要な強度を保ちつつ、余分な構造部分を除去するいわゆる構造最適化問題に広く応用されている。

2.2 CA の構造最適化問題への適用例

伊能・下平・小林³⁾は、多数のセルに分割した構造物に荷重を載荷し、有限要素解析によって相当応力分布を求めた。つぎに、各セルの相当応力を目標応力に近づけるため、数式によって表現されたローカルルールで各セルのヤング率を更新した。彼らは、多様な初期状態を仮想し、ヤング率がゼロに近いセルは存在しないものとして除去することで、さまざまな位相構造を生成した。

石田・白神⁴⁾は、ローカルルールを定式化せず、注目セルの上下左右に位置する 4 セル（ノイマン近傍）の応力状態によって、注目セルの生成と消去を行う方法を考案した。この手法により、注目セルの応力値が近傍セルより小さいときは注目セルを消去し、逆の場合は注目セルを補強して位相構造を生成した。

尾田・主税⁵⁾は、小規模構造物を対象に、構造最適化のためのローカルルールを確立し、これが同種の構造物にも汎用的に適用できるとして大規模構造物の構造最適化を行った。ここでは、ローカルルールを数式で表現し、それを構成するパラメータを GA で設定し、各セルの板厚を変化させた。

尾田・小石⁶⁾は、発案者の主観や経験則によってローカルルールを設定するという従来の発想を転換した。すなわち、CA に GA を組合せてローカルルールを最適化し、それを大規模構造物の構造最適化に利用した。彼らは、近傍セルの板厚を染色体に置き換え、GA によって最適化する方法と、GA によっていくつかの領域に分割した座標平面の縦軸に注目セルの応力、横軸に近傍セルの応力から決定される注目セルの重要度を設定し、入力値の交差する点が表す状態変化を注目セルに施し、最適化する方法を考案した。

上述の CA と GA を組合せた構造最適化は、山本・佐々木⁷⁾によっても報告されている。彼らは、CA によって単一の荷重状態に対する構造最適化を行い、それらを重ね合わせることで、複数の荷重状態に対する最適な板厚分布を求めた。彼らは、重ね合せ時の重み係数の設定に GA を用いた。

ここでは、CA により総補強量を最小とする制約条件のもとに構造物の補強最適化を試みる。ここでの補強最適化は、セルを補強するのみで消去しない。したがって、前述の構造最適化とは、内容が若干異なる。しかし、構造最適化におけるセルの増加は一種の補強と考えられるため、CA の補強最適化への応用も十分可能であると考えられる。また、既往の研究では、弾性問題への適用が大半で、塑性領域まで拡張した CA の研究は見あたらない。ここでは弾塑性域での動作ルールについても考える。

2.3 CA と最適化問題の融合

人体は、一般に、日常生活のなかで頻繁に使用するとこころほど丈夫になる。固い食物を摂ることで顎が強化されたり、利き腕が他方の腕より太くなったりするのはそのよい例である。このような現象は、外部からの刺激に適応して細胞の形状や密度が変化することに起因する。これはリモデリング現象と呼ばれ、ここでは最小重量・最大強度の法則に基づいて形態形成がなされる。この様子を模式的に表せば、図-1(a)のようになる。このような

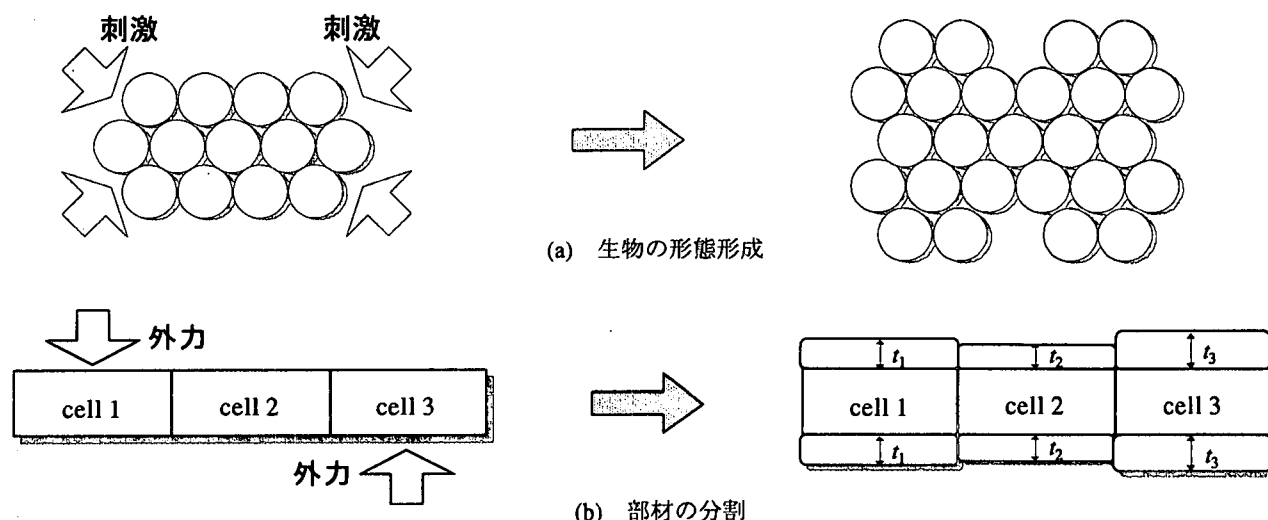


図-1 CA と最適化問題の融合

形態形成をスムーズに行うためには、各細胞（セル）間にローカルルールと呼ばれる特殊なルールが設けられる。各セルは、外部からの刺激を近傍セルから受け取り、ローカルルールによってその形状や密度を変化させる。その結果、組織の生長が発現する。

本研究では、CA 手法によって鋼製ラーメン橋脚の補強最適化を試みる。CA 手法と補強最適化問題を融合するため、対象構造物を多数のセルに離散化する。図-1(b)は一部材を 3 つのセルに分割した例である。左のセルから cell 1, cell 2, cell 3 と名づける。これに外部からの刺激すなわち外力を作用させ、生物の例にならって各セルの板厚を変化させる。部材の“生長”に必要なローカルルールは、応力を指標に定められる（ローカルルールの定式化は、後述する。）。なお、制約条件には、許容応力度設計法に基づく関係式を用いる。

補強量最小化の最適化問題には、ある制約条件のもとに目的関数を満たす板厚が発現するまでローカルルールに従って板厚を変化させる必要がある。この最適化は、

$$\text{目的関数} : \sum_{i=1}^3 t_i \rightarrow \min \tag{1}$$

$$\text{制約条件} : \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \leq \sigma_a \tag{2}$$

$$\text{設計変数} : \{t\} = \{t_1, t_2, t_3\} \tag{3}$$

で表される。ここに、 t_i と σ_i ($i=1-3$) はそれぞれ各セルの板厚と最大応力である。

3. 数値解析法、ならびに数値解析結果とその考察

3.1 解析対象の鋼製一層門形ラーメン

図-2 に示す 6 主桁からなる非合成連続 I 桁橋を支える鋼製一層門形ラーメン橋脚を解析の対象とする。ラーメンは完全弾性体で、その寸法諸元はつぎのようである。

構造寸法

- ・柱高 : $l_c = 15,000$ mm
- ・間口 : $l_b = 15,000$ mm
- ・主桁間隔 : $l = 2,700$ mm

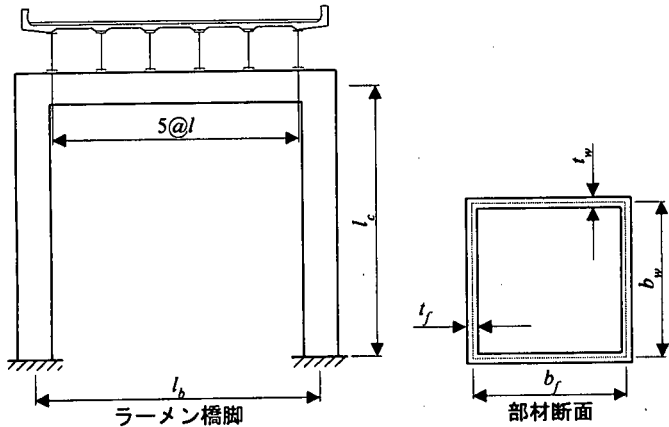


図-2 解析対象の鋼製一層門形ラーメン

部材の断面形状

- ・フランジ幅 : $b_f = 400$ mm
- ・腹板高 : $b_w = 400$ mm
- ・初期板厚 : $t_f = t_w = t_0 = 20$ mm

材料特性

- ・鋼種 : SM 490
- ・許容応力度 : $\sigma_a = 186$ MPa
- ・ヤング率 : $E = 206$ GPa

3.2 数値解析の手順

2.で述べた CA の簡単な例を参考に、本数値解析の手順を以下に述べる。すなわち、

①図-3 に示すように、ラーメンのはりと柱をそれぞれ 15 のセル（要素）、合計 45 セルに離散化する。

②離散化したラーメンに表-1 に示す上部構造による死荷重と地震力に相当する水平荷重を作用させ⁸⁾、有限要素法で各セルに生じる応力を求める。

③各セルにおける絶対最大応力を求め、その最大値 $\sigma_{\max}$ が許容応力度 σ_a に関する収束条件

$$0.95\sigma_a \leq \sigma_{\max} \leq \sigma_a \tag{4}$$

を満たしているかどうか照査する。

④満たしておれば、計算を終了し、ステップ⑥に移る。一方、満たしていない場合には、つぎのステップ⑤を実行する。

⑤ローカルルール³⁾

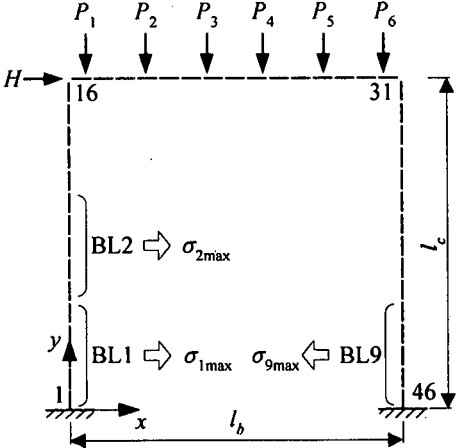


図-3 要素の分割と補強ブロック

表-1 荷重条件と載荷点の座標

荷重	記号	大きさ(KN)	x(mm)	y(mm)
鉛直荷重	P_1	1,200	750	15,000
	P_2	1,200	3,450	15,000
	P_3	1,200	6,150	15,000
	P_4	1,200	15,000	15,000
	P_5	1,200	11,550	15,000
	P_6	1,200	14,250	15,000
水平荷重	H	$\alpha \sum_{i=1}^6 P_i$	0	15,000

$$t^{r+1} = t^r \left(1 + \beta \frac{\sigma_{\max} - \sigma_a}{\sigma_a} \right) \quad (5)$$

によって、すべてのセルの板厚を同一の値に同時に更新し、手順②へ戻る。ここに、 T は計算ステップ、 t^{r+1} と t^r は更新後と更新前の板厚、 β は収束速度に関する比例定数である ($\beta=0.1$ とする)。

以上の手順によって、外力に耐える断面が決定される。この場合を初期設計とする。

つぎに、設計基準などの見直しによって設計荷重が増されたとする。この場合、先の荷重によって決定された断面では応力の制約条件を満たさないことは明らかである。それゆえ、各部材を補強する必要がある。そのため、前述の手順と同様、つぎのような解析を実施する。

これを補強設計と呼ぶ。すなわち、

⑥設計されたラーメンに前述の水平荷重に対して γ 倍の荷重を作用させる。ここでは仮に $\gamma=4$ とする。

⑦図-3 に示すように、45 セルを9 つにブロック化する。ブロックごとにそれに属するセルの中で最大応力が発生しているセルを探索する。

表-2 鋼板の状態数 (mm)

1.20	1.40	1.60	1.80	2.00
2.30	2.50	2.80	3.20	3.60
4.00	4.50	5.00	5.60	6.00
6.30	7.00	8.00	9.00	10.00
11.00	12.00	12.70	13.00	14.00
15.00	16.00	18.00	19.00	20.00
22.00	25.00	25.40	28.00	32.00
36.00	38.00	40.00	45.00	50.00
55.00	60.00	65.00	70.00	75.00
80.00	85.00	90.00	95.00	100.00

表-3 初期設計の結果 (収束ステップ数 73)

セル 番号	最大応力 (Mpa)	セル 番号	最大応力 (Mpa)	セル 番号	最大応力 (Mpa)
1	87.61	16	47.47	31	185.99
2	82.85	17	72.48	32	166.57
3	78.10	18	95.14	33	145.54
4	73.35	19	105.96	34	125.32
5	68.60	20	113.82	35	105.10
6	63.85	21	119.83	36	84.87
7	59.09	22	118.02	37	64.65
8	54.34	23	108.70	38	44.43
9	49.59	24	97.73	39	52.64
10	44.83	25	87.87	40	72.87
11	40.08	26	60.56	41	93.10
12	35.32	27	31.40	42	113.33
13	30.56	28	63.58	43	133.55
14	25.80	29	107.55	44	153.78
15	21.04	30	167.91	45	174.01

⑧応力を照査する。その結果、全ブロックにおいて、

- ・最大応力が式(4)を満たしている
- ・満たさないが、許容応力度の 95%未満でかつ更新後の板厚が更新前のそれより薄くなる

の場合には、⑩へ進む。ただし、後者の場合、板厚を変えない。最大応力が許容応力度を越えている場合には、ステップ⑨に進む。

⑨ローカルルールに従ってブロックごとに板厚を更新する。更新後、左右に対称的なブロック (たとえば、1 番と 9 番) に対して、更新後の両板厚を比較する。それらのうち、厚い板厚を統一して両ブロックに採用する。ただし、ブロック 5 は、単独で板厚を更新する。その後、手順⑦へ戻る。

⑩市場に流通する鋼板を参照し、連続量として求められた板厚を離散量へ再修正し、補強断面とする。鋼板の状態数を表-2 に示す^{9),10)}。

3.3 数値解析結果とその考察

(1) 数値解析の結果

初期設計に対する数値解析結果を表-3 に示す。この場合、20mm の板厚から解析を始め、最終的に 27.02mm の板厚で解が収束した。最大応力は 31 番のセルに生じ、185.99MPa、また最小応力は 15 番のセルに生じ、21.04MPa であった。これらのセルはラーメンの隅角部に位置する。左側の隅角部での応力値が小さいのは、水平荷重と鉛直荷重によって生じる曲げモーメントが相殺されるからである。また、はり中央部 (21 番のセル付近)、右側の柱とはりの隅角部 (31 番のセル)、および、右側の柱基部 (45 番のセル) に大きな応力が生じている。

つぎに、ラーメンを9つのブロックに分割し、補強設計した場合、その数値解析結果は表-4 のようになる。表から明かなように、1 番と 8 番のブロックでは、初期設計時における 1~5 番と 36~40 番のセルの最大応力 (その平均値はそれぞれ 78.10MPa、63.89MPa) に比較して、大幅に増加している。また、7 番と 9 番のブロックでは、初期設計時における 31~35 番と 41~45 番のセルに比較して、高い応力を保持している。逆に、式(4)を満

表-4 補強設計の結果

BL 番号	板厚 (mm)	最大応力 (MPa)
1	74.42	131.34
2	33.31	143.10
3	64.73	91.66
4	62.81	107.65
5	28.68	182.26
6	62.81	185.98
7	64.73	185.98
8	33.31	185.77
9	74.42	185.87

表-5 修正後の結果

BL 番号	板厚 (mm)	最大応力 (MPa)
1	75.00	130.23
2	34.00	139.81
3	65.00	91.56
4	65.00	104.12
5	29.00	180.45
6	65.00	179.68
7	65.00	185.48
8	34.00	181.53
9	75.00	184.27

たすブロックは1番と6～9番であった。

全体的な傾向として、すべてのブロックで板厚が更新された。構造的には、すべてのブロックで最大応力が許容応力度付近に収まるのが最善であると考えられる。しかし、本解析では更新後の板厚が更新前のそれを下回らないようなルールとしたため、各ブロックの板厚が著しく増加し、最大応力は低く抑えられた。このようなルールを設定しないと、余分な板厚が過度に除去され、他のブロックが負担しなければならない応力が増加し、構造全体のバランスが悪くなるだけでなく、解が収束しなくなる恐れがあったためである。

表-4の板厚を市場の製品に合わせて離散量に再修正した場合の数値解析結果を表-5に示す。修正前と比較して、すべてのブロックで最大応力が減少し、離散量に変更することの可能性が明らかになった。ただし、ブロック6～9では、初期設計の板厚より補強鋼板の方が厚くなっている。これは、弾性解析で断面が肥大化したためと考えられる。

4. CAと塑性設計を融合した補強最適化

構造物に大きな荷重が作用すると、いくつかの箇所に塑性が生じる。載荷後の構造物の補修や補強を考えた場合、塑性の発生位置は作業の難易に深く関わる。一般に、ラーメン橋脚の隅角部に塑性が生じると、作業が困難になると思われる。ここではラーメン橋脚の隅角部に塑性が発生しないような補強形態をCAによって創発するため、3つのローカルルールを考える。

4.1 補修が容易にできる領域を定める方法

これは、補修が容易に行える領域をあらかじめ定め、

その領域に塑性の生じることを期待する方法である。これを手法Ⅰとし、その概念図を図-4に示す。図中、影付きの部分は、補修が容易な領域を示す。

水平荷重 H を H_1 まで漸増させ、①に示す箇所に塑性が生じたとする。この場合、この箇所は影付きの領域ではないため、計算を数ステップ戻し、②のように損傷箇所を重点的に補強し、塑性の発生を抑える。さらに、荷重を H_2 まで増加させると、③の状態ですべて影付きの領域に塑性が生じることにする。これが最適な補強形態となる。この構造物に地震荷重が作用した場合、大きさが H_2 までの荷重であれば、基部の付近に塑性の箇所を導くことができる。しかし、一般に、橋脚に水平荷重が作用した場合、最初に塑性化する箇所は基部であるため、このようなローカルルールは非現実的である。

4.2 柱基部と隅角部の塑性を考慮する方法

水平荷重 H を H_1 まで漸増させ、右側柱の基部に最初の塑性が生じたとする。この時点で、この部分を直ちに補強する方法を手法Ⅱ、ある程度の塑性の進行を容認し、隅角部の塑性を防ぐように補強する方法を手法Ⅲとする。

図-5に示すように、手法Ⅱは右側柱の基部を水平荷重 H_1 の段階で直ちに補強したのち、荷重が H_2 に達し隅角部が塑性化すれば、その部分も補強する方法である。一方、手法Ⅲは、水平荷重 H_1 の段階では直ちに補強せず、右側柱の基部の塑性化で変形を進行させ、変形能でエネルギーを吸収させながら隅角部の塑性化を極力防ぎ、荷重が H_3 に達した時点で隅角部が塑性した場合のみ補強する方法である。

いずれの場合も塑性が生じるセル周辺を補強することになる。塑性が生じる問題の場合、その時点より数ステップ前に解析を遡り、補強することで塑性の発生を抑え

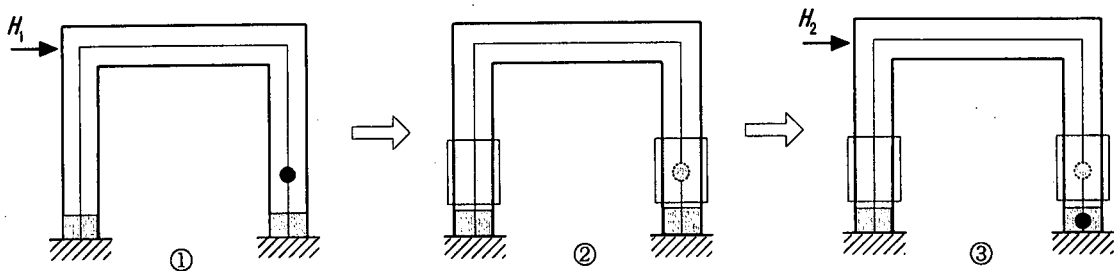


図-4 補修が容易にできる領域を定める方法（手法Ⅰ）

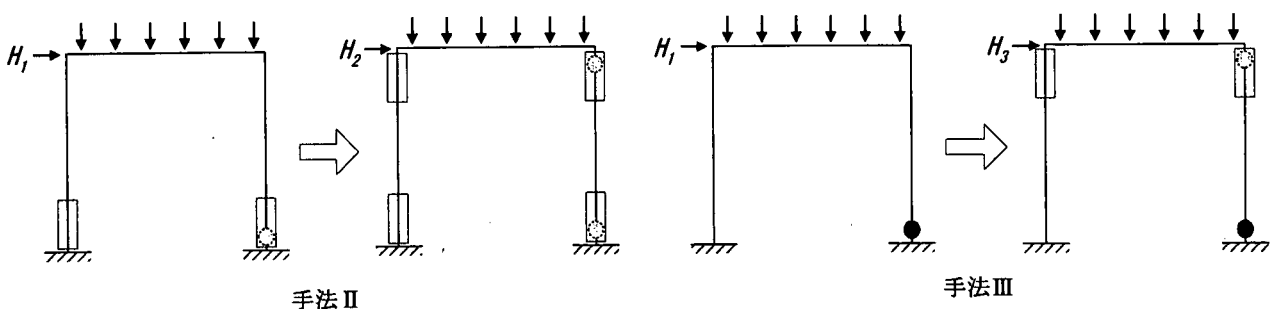


図-5 柱基部と隅角部の塑性を考慮する方法

るようにプログラミングする必要がある。また、水平荷重が右方向に作用する場合には、塑性箇所が右側の柱の2カ所に発生する場合のみを考えればよい。仮に、左側の柱に塑性が生じることを想定しても、断面の塑性化と補強の判断に必要な曲げモーメントと軸力は右側の柱が大きいので、不要である。右側の柱を断面力に見合うように補強すれば、塑性の発生が抑えられ、必然的に左側の柱の塑性も生じなくなる。

4.3 問題点

上述の3方法は、過大な荷重を受けた構造物の補修・補強に着目したもので、塑性の発生箇所をターゲットに補強位置を決定しようとするものである。補強量は塑性が生じる曲げモーメントと軸力によって決まる。したがって、許容応力度に基づいて補強量を決定した弾性問題のローカルルールとは、当然、性質が異なる。式(5)で表されるローカルルールでは、最大応力と許容応力度の相対誤差によって補強量が決定されるため、補強量を最小にしつつ、力学的に有利な構造を創発するのに適している。一方、ここで提案したローカルルールでは、隅角部に塑性が生じるのを回避することに主眼を置くもので、必ずしも補強量は最小にはならない。しかしながら、構造最適化問題の目的関数には、総補強量だけでなく、水平耐力、塑性箇所の数、コストなど、さまざまな要素が考えられる。今後、CAによる塑性域をも勘案した補強最適化を展開するには、どの要素に注目し、最適化すればよいのかを明確にしなければならない。また、構造物そのものが崩壊しないように、ラーメン部材の各箇所でのたわみ角が限界値を越えてはならないなどの制約条件を設定する必要もある。

5. あとがき

AL技術の一種であるCAを用い、鋼製ラーメン橋脚の補強最適化問題の解析を試みた。CAはローカルルールに基づく簡単な反復計算によって複雑な問題の最適解を創発させることができる。また、構造最適化問題だけでなく、流体や交通流のシミュレーションなど様々な分野でも活発に利用されている。本来、CAは生物の形態形成を模倣して考案されたシミュレーション技法であるが、モデリング現象によって説明できるCAの動作は、構造物の補強問題に十分応用できると確信する。

ここでは、構造物を多数のセルに離散化し、補強最適化にCAを適用した。ラーメンを完全弾性体とし、有限要素法で解析した。また、ローカルルールを関数で表現し、各セルの板厚を設計変数として、補強量が最小となる断面決定に主眼を置いた。初期設計では、すべてのセルの板厚を同時に更新する等断面設計とした。一方、補強設計では、補強ブロックごとに板厚を更新する変断面設計とした。また、数値解析結果を連続値から離散値へ

再修正し、より現実的な補強設計を試みた。

数値解析の結果を分析したところ、ラーメン橋脚の柱基部や隅角部で板厚の増加が目立ち、構造物の応力分布を十分に反映した結果となった。増し板の部分が初期の板厚を上回り、やや現実性を欠いているものの、CAが補強最適化問題に適用可能であることが証明された。

さらに、塑性域をも含めた補強最適化問題を試みるため、CAと塑性設計を融合し、構造物が大きな荷重を受けた後の補修・補強に着目した3つのローカルルールを提案した。ラーメン橋脚の隅角部に塑性を生じさせないように、柱基部に発生する塑性を利用する方法であるが、目的関数が明確に示せなかったなどの課題が残る。今後の改良が必要であると思われる。

CAによる補強最適化の最終的な目的は、設計者の基本設計に対する支援である。これが叶えば、設計の自動化によって人件費や時間の削減が可能になるであろう。今後は、前述の課題を克服し、現行設計基準に対応したシステムを構築する所存である。

参考文献

- 1) 吉沢克巳、高橋亮一：セルオートマトン法による流れの数値解析、日本機械学会論文集（B編）、Vol.57, No.540, pp.2663-2670, 1991-8.
- 2) 森下 信：セルオートマトン法による流れ解析、機械の研究、Vol.49, No.1, pp.209-214, 1997.
- 3) 伊能教夫・下平真子・小林弘樹：力学構造物を自己組織化するセル・オートマトン（ローカルルールによって生じるシステム全体の挙動）、日本機械学会論文集（A編）、Vol.61, No.586, pp.1416-1422, 1995-6.
- 4) 石田良平・白神愛：セル・オートマトンを用いた二次元構造物の位相設計、日本機械学会論文集（A編）、Vol.64, No.628, pp.2895-2900, 1998-12.
- 5) 尾田十八・主税雅裕：局所ルールによる大規模構造物の最適化について、日本機械学会論文集（A編）、Vol.63, No.606, pp.425-430, 1997-2.
- 6) 尾田十八・小石照之：進化的セル・オートマトンによる構造最適化の研究、日本機械学会論文集（A編）、Vol.64, No.628, pp.2883-2888, 1998-12.
- 7) 山本広祐・佐々木康彦：セルオートマトンとGAの組み合わせ利用による多目的構造最適化、土木学会第54回年次学術講演会講演概要集、CS-81, pp.162-163, 1999-9.
- 8) 川島一彦・大志万和也・長谷川金二・運上茂樹・桶田憲一・前原康夫：道路橋の耐震設計計算例、山海堂、1992-2.
- 9) 鋼材倶楽部編：土木技術者のための鋼材知識、技報堂出版、1968.
- 10) 日本鋼構造協会編：建設用鋼材資料集、技報堂出版、1985-5.