満足度をベースとする離散的多目的最適化問題の最適性規準に関する基礎的研究

ON THE OPTIMAL CRITERIA FUNCTION FOR THE DISCRTE MULTI-OBJECTIVE OPTIMAL PROBLEMS

三原徹治*・千々岩浩巳**・兼松建男***

Tetsuji MIHARA, Hiromi CHIJIIWA and Tateo KANEMATSU

*工博 九州共立大学教授 工学部土木工学科（〒807-8585 北九州市八幡西区自由ケ丘1-8）

**博(工) 第一復建(株) 構造部

***第一復建(株) 技術本部

The multi-objective optimal problem has the Pareto solutions. In the case of the continuous problem, the satisficing trade-off method is very useful to find a Pareto solution on a set of aspiration level and extreme points. Authors had proposed a optimal criteria function based on the concept of the satificing trade-off method for the discrete problem which has the continuous optimal solution.

The purpose of this study is to find a optimal criteria function for the discrete multi-objective optimal problem with the unknown continuous optimal solution. Several optimal criteria functions are proposed by the way of trial and error. The good hit rate of each function is examined numerically for the simple problems.

Key Words : Satisficing Trade-off Method, Discrete Multi-objective Optimal Problem, Optimal Criteria Function

1. はじめに

多目的最適化問題の解は一般にトレードオフの関係にある解集合，すなわち Parete 解集合を形成する．問題を構成する変数がすべて連続数の場合には，満足化トレードオフ法[1]によって選考解の選定を行うことができる．すなわち，各目的に対して設定した理想点および希求水準から各目的の満足度を算出し，その最大のものを最小化するという最適性規準（以後，本論文中ではZmin 規準と呼ぶ）に基づく手続きを経て，結果的に各満足度が均一化された解として Pareto 解のひとつを得るものである．主に希求水準値を変更することによって種々の Pareto 解を探索し，最終的に選考解を選定する．この選考解は意思決定者の満足度に着目したものであり，特に構造設計問題のような問題の解として適している．

しかしながら，問題を構成する変数が離散変数である場合には著者らが先に指摘したように，Zmin 規準による解が必ずしも意思決定者を満足させる解とはならない場合もある[2]．このため著者らは，対象とする多目的最適化問題の連続最適解が得られることを前提に満足度空間上において連続最適解が有する満足度と各離散解が有する満足度との偏差Nを最小にする離散解を最適解とするNmin 規準を提案した[2]．ただし，構造形式をも決定すべき離散変数として取扱った研究[3]において顕著であったように連続最適解を求めることができない離散的多目的最適化問題の場合には，Nmin 規準を用いることができないという難点に気付かされた．この種問題の解法として離散的 Pareto 解集合を求めることを目的とした多目的 GA 手法[4]も提案されているが，離散的 Pareto 解集合が確実に得られる保証はなく，また意思決定者による解の選考に資する情報も得られにくい手法である．

本研究では，連続最適解が得られない離散的問題の場合でも連続的問題のときと同じように意思決定者が選考解を選定できるようにNmin 規準に替わる規準を模索することを目的とし，種々の新規準を提示するとともに，その有効性を簡単な問題を対象とした数値実験によって検証したものである．

2. 最適性規準の提示

離散的多目的最適化問題では，各離散解は各目的に対してそれぞれの満足度を有する．図-1 のように各目的に対する満足度を軸とする空間を満足度空間と呼ぶこととすると，各離散解は満足度空間にプロットすることができる．ここに，連続最適解は等満足度線上にあり，しかも最小の満足度を有するため，連続最適解と原点を結ぶ等満足度線を対角線とする正方形の内側にはいずれの離散解も存在しないことになる．

このような満足度空間においてNmin 規準は図-1 に示すように，連続最適解が存在することを前提として，各離散解の満足度と連続最適解の満足度との偏差を最小にする規準であり，式表示すると次のようになる．

Nmin 規準：

$$N = \sum \left(Z^c - Z^d_i\right)^2 \tag{1}$$

ここに，Z^c は連続最適解の満足度，Z^d_i は i 番目の目的に対する離散解の満足度である．このNmin 規準による解が，あ

る理想点および希求水準を与えたときの離散的最適解になる．

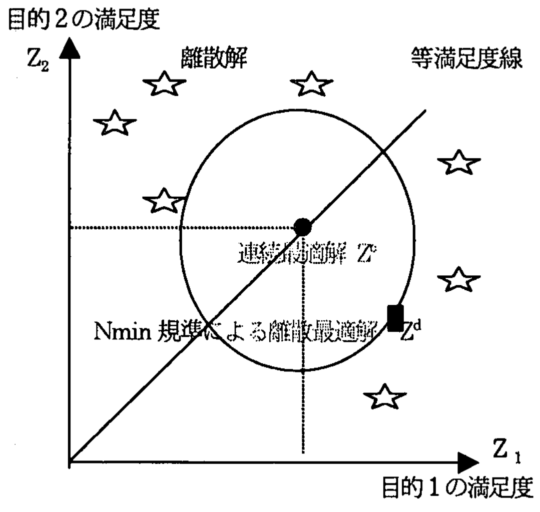

図-1　満足度空間と連続最適解，離散解の概念図

一方，連続的問題で用いられる最適性規準を Zmin 規準と呼ぶことにする．

Zmin 規準：

$$Z = \max\left(Z_i^d\right) \tag{2}$$

さらに本研究では，以下のような最適性規準を試行錯誤的に考案した．

Lmin 規準：

$$L = \sum\left(Z^W - Z_i^d\right)^2 \tag{3}$$

ここに，Z^W は Zmin 規準で得られた離散解の満足度の加重平均値である．

Smin 規準：

$$S = 2\left\{\sum\left(Z^A - Z_i^d\right)^2\right\} + Z \tag{4}$$

ここに，Z^A は Zmin 規準で得られた離散解の満足度の算術平均値である．

Hmin 規準：

$$H = L + S \tag{5}$$

Pmin 規準：

$$P = \left|Z^W - Z^A\right| + H \tag{6}$$

Bmin 規準：

$$B = \sum\left(Z^A - Z_i^d\right)^2 + L \tag{7}$$

式(3)～(7)で示される各最適性規準は連続最適解が得られないことを前提として，i 番目の目的に対する離散解の満足度 Z^d_i の関数となっている．

3. 数値実験対象問題

本研究で模索する最適性規準は連続最適解が得られず Nmin 規準を用いることができない場合への適用を目指しているが，その適用性を検討する場合には Nmin 規準による離散最適解との一致度を検証する必要がある．そこで，ここでは次のような２変数による 2 目的問題と 3 目的問題を設定し，数値実験を行うこととした．

２目的問題：

目的関数：
$$P = \left(X_P - X\right)^2 + \left(Y_P - Y\right)^2 \rightarrow \min \tag{8a}$$
$$Q = \left(X_Q - X\right)^2 + \left(Y_Q - Y\right)^2 \rightarrow \min \tag{8b}$$
制約条件：
$$X \in (1,2,\ldots,10),\quad Y \in (1,2,\ldots,10) \tag{8c, d}$$

ここに，目的関数Ｐは任意の座標（X_P, Y_P）の点と点（X, Y）との偏差を最小にするという目的を表しており，同様に目的関数Ｑは任意の座標（X_Q, Y_Q）との偏差の最小化を意味する．決定すべき変数（X,Y）は，それぞれ 1 から 10 までの整数とする．

なお，目的関数Ｐ，Ｑはいずれも最小化される関数であるため満足度を算出する際の理想点P_SおよびQ_Sは$P_S = Q_S = 0.0$ とする．目的関数Ｐ，Ｑの希求水準P_AおよびQ_Aを数値実験パラメータとする．

３目的問題：

目的関数：
$$P = \left(X_P - X\right)^2 + \left(Y_P - Y\right)^2 \rightarrow \min \tag{9a}$$
$$Q = \left(X_Q - X\right)^2 + \left(Y_Q - Y\right)^2 \rightarrow \min \tag{9b}$$
$$R = \left(X_R - X\right)^2 + \left(Y_R - Y\right)^2 \rightarrow \min \tag{9c}$$
制約条件：
$$X \in (1,2,\ldots,10),\quad Y \in (1,2,\ldots,10) \tag{9d, e}$$

式(9)に示した３目的問題は，式(8)の２目的問題に目的関数Ｐ，Ｑと同様の意味の目的関数Ｒを付加したものであり，目的関数Ｒの理想点R_SはやはりR_S=0.0 とする．

4. 数値実験の方法と結果

２目的問題では，まず目的Ｐ，Ｑの座標をランダムに定めた．（X_P, Y_P）＝（7.6,3.3）と（X_Q, Y_Q）＝（2.3,8.4）である．次に目的Ｐに対する希求水準P_AをP_A=1.0,1.1,…,5.0 と 0.1 刻みに 41 通り，目的Ｑの希求水準Q_AをQ_A=1.0,1.1,…,1.5 の 6 通りに設定し，総計 246 ケースについて，連続最適解，Nmin 規準による解，式(2)～(7)に示すそれぞれの最適性規準による解を求めた．その上で各最適性規準による解とＮmin 規準による解との一致度を調べた．

表-1 に調査結果の一部を示す．表は，左から①～⑫の通し番号，希求水準値，連続最適解の座標，各最適性規準による解の座標であり，一致度には各最適性規準による解がNmin 規準による解と一致した場合に○印を付し，そうでない場合には空欄としている．実際には全 246 ケースについて，このような表型式で調査を行った．

表-1　2目的問題の調査結果の一例

	希求水準		連続最適解		Nmin		Zmin		Lmin		Smin		Hmin		Pmin		Bmin		一致度					
	P_A	Q_A	X^C	Y^C	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	Zmin	Lmin	Smin	Hmin	Pmin	Bmin
①	1.5	1.0	4.42	6.36	4	6	4	6	4	6	4	6	4	6	4	6	4	6	○	○	○	○	○	○
②	2.0	1.0	4.07	6.70	3	6	4	7	4	7	3	6	3	6	4	7	3	6			○	○		○
③	2.1	1.1	4.12	6.65	3	6	4	7	3	6	5	8	3	6	3	6	3	6		○		○	○	○
④	2.2	1.1	4.07	6.70	3	6	4	7	4	7	3	6	3	6	4	7	3	6			○	○		○
⑤	2.3	1.2	4.12	6.65	3	6	4	7	3	6	5	8	3	6	3	6	3	6		○		○	○	○
⑥	2.4	1.2	4.07	6.70	3	6	4	7	4	7	3	6	3	6	4	7	3	6			○	○		○
⑦	2.5	1.3	4.11	6.66	3	6	4	7	3	6	5	8	3	6	3	6	3	6		○		○	○	○
⑧	2.6	1.3	4.07	6.70	3	6	4	7	4	7	3	6	3	6	4	7	3	6			○	○		○
⑨	2.7	1.4	4.11	6.66	3	6	4	7	3	6	5	8	3	6	3	6	3	6		○		○	○	○
⑩	2.8	1.4	4.07	6.70	3	6	4	7	4	7	4	7	4	7	4	7	3	6						○
⑪	2.9	1.5	4.11	6.66	3	6	4	7	3	6	5	8	3	6	3	6	3	6		○		○	○	○
⑫	3.0	1.5	4.07	6.70	3	6	4	7	4	7	4	7	4	7	4	7	3	6						○

表-2　3目的問題の調査結果の一例

	希求水準			連続最適解		Nmin		Zmin		Lmin		Smin		Hmin		Pmin		Bmin		一致度					
	P_A	Q_A	R_A	X^C	Y^C	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	Zmin	Lmin	Smin	Hmin	Pmin	Bmin
①	2.0	3.0	1.5	2.04	2.53	2	3	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	3		○		○		○
②	2.0	2.5	2.0	2.18	3.18	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	○	○	○	○	○	○
③	2.0	2.0	2.5	2.46	3.84	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	○	○	○	○	○	○
④	2.0	1.5	3.0	3.04	4.73	3	5	2	4	3	5	3	5	3	5	3	5	3	5		○	○	○	○	○
⑤	1.5	3.0	2.0	2.72	2.74	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	○	○	○	○	○	○
⑥	1.5	2.5	2.5	2.99	3.43	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	○	○	○	○	○	○
⑦	1.5	2.0	3.0	3.81	4.39	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	○	○	○	○	○	○
⑧	1.0	3.0	2.5	3.44	2.97	3	3	4	3	3	3	4	3	4	3	4	3	3	3		○				○

表-3　最適規準別・対象問題別の一致度集計表

	Zmin	Lmin	Smin	Hmin	Pmin	Bmin
2目的問題 全ケース＝246	139 73.7%	226 91.9%	222 90.2%	229 93.1%	229 93.1%	232 94.3%
3目的問題 全ケース＝76	56 73.7%	72 94.7%	64 84.2%	71 93.4%	64 84.2%	73 96.1%

また表-3 には，各最適性規準別および対象問題別に各最適性規準による解がNmin 規準による解と一致した数と一致率を併記している．

3目的問題では，2目的問題の目的P，Qの座標に加えて目的Rの座標を（X_R,Y_R）＝（1.0,1.0）に設定した．各目的に対する希求水準は，P_A，Q_A およびR_A をそれぞれ 1.0,1.5,…,3.0 と0.5刻みに5通りとした．全ケース数は5^3=125 ではなく 76 である．これは希求水準値（P_A,Q_A,R_A）の組合せが，たとえば（1.0,1.0,1.0）と（1.5,1.5,1.5）とのように，あるいは（1.0,1.5,1.0）と（2.0,3.0,2.0）とのように比率が等しい場合には最適化における意味がまったく同じあるため得られる解も一致するので，このような希求水準値の組合せを除外したためである．

各最適性規準による解とNmin 規準による解との一致度の調査は 2 目的問題と同様に行った．その一例を表-2 に示す．調査した 76 ケース全体の一致度は表-3 に 2 目的問題の場合と併記している．

式(2)に示す Zmin 規準は，連続的問題における最適性規準であるが，表-3 に示すように他の規準に比較して Nmin 規準による解との一致度はかなり低い．表-2①や表-3②，③，⑤，

⑥，⑦のように Zmin 規準による解が Nmin 規準による解と一致するときには他の規準による解も一致しているケースが多く観察された．この Zmin 規準による解が離散的多目的問題の解として必ずしも適当ではないということから Nmin 規準を提唱したという過去の研究経緯からすれば当然の結果ともいえるが，Nmin 規準による解との一致率はかなり低く，2 目的問題でも 3 目的問題でも奇しくも同じ 73.7%であった．

式(3)に示す Lmin 規準は，式(1)の Z^C を Zmin 規準で得られた離散解の満足度の加重平均値 Z^W で置換えたものである．Z^C が真の連続最適解の満足度であるため，式(3)は Z^W を仮の連続最適解の満足度とみなす規準と解釈される．この Lmin 規準による解は 2 目的問題においても他の規準と遜色ない一致度を示した．さらに 3 目的問題においては，Bmin 規準に次ぐ高い一致率 94.7%を示し，表-2⑧のようにこの Lmin 規準と Bmin 規準による解だけが Nmin 規準による解と一致するケースも観察された．これは本研究で対象とした問題では Z^C 値と Z^W 値とが大きく異なることが少なかったためと思われる．

この Lmin 規準と類似の関数形が，Smin 規準（式(4)）の｛｝内および Bmin 規準（式(7)）の第 1 項に存在する．この関数は式(1)の真の連続最適解の満足度 Z^C を Zmin 規準で得られた離散解の満足度の算術平均値 Z^A で置換えたものであり，本研究の研究過程ではひとつの独立した最適性規準（Amin 規準と呼んだ）として検討したが，その一致度はきわめて低く提示できる最適性規準として棄却せざるを得なかったものである．同じ Zmin 規準で得られた離散解の満足度を用いているにもかかわらず加重平均値 Z^W の Lmin 規準と算術平均値 Z^A の Amin 規準では結果に大きな差異があることがわかり，仮の連続最適解を特定することが不可能であることを数値実験の上でも再確認することができた．このような棄却された Amin 規準と先述したようにさほど一致度の高くない Zmin 規準とを組合わせたものが S min 規準（式(4)）である．ここに第 1 項の乗数 2 は，2 目的問題を対象に試行錯誤的に決定された値である．2 目的問題に対してチューニングされた結果，2 目的問題では 90%以上の一致率であるが，3 目的問題では 85%以下の一致率に留まっている．チューニングという多目的最適化問題の加法型スカラー化手法と同様の取扱い難さが致命的であるが，それぞれではさほど高くない一致度のふたつの規準を組合わせると一致度が向上する現象は注目に値する．

式(5)に示す Hmin 規準はふたつの規準の組合わせである Smin 規準にさらに Lmin 規準を組合わせたものであり，いずれの問題に対しても 93%以上の比較的高い一致率を示している．ただし，Smin 規準を含んでいるため取扱いの面での難点が指摘される．この Hmin 規準にさらに 1 項付加されたものが式(6)の Pmin 規準である．付加された 1 項は，連続最適解では各目的の満足度が均一化されるという性質を指向したものである．この Pmin 規準による解は，2 目的問題ではかなり高い一致度を示したが，3 目的問題では Smin 規準とほぼ同様の低い一致度であった．

表-3 において最も高い一致度を示したのは式(7)の Bmin 規準であった．この規準は，単独でもかなり高い一致度を示した Lmin 規準をさらに改良することを目指して考案された数種の関数のひとつである．Hmin 規準や Pmin 規準もその過程において考案されたものであるが，先述のように 2 目的問題では Lmin 規準を上回った一致度も 3 目的問題では下回る結果に終わっており，取扱いの難しさと相まって，総合的に Lmin 規準より良好とは判定できないものであった．これらに対して予想外の好結果を示した Bmin 規準は，Lmin 規準と Amin 規準とを単純に結合したものである．Zmin 規準で得られた離散解の満足度の加重平均値 Z^W と算術平均値 Z^A を用いることから仮の連続最適点を 2 箇所想定し，満足度空間上においてそれぞれの点から離散解自身までの偏差の合計によって離散最適解を判定するものである．Bmin 規準の一致度は，2 目的問題で 94.3%，3 目的問題で 96.1%といずれにおいても Lmin 規準を上回るのみならず，他の規準の一致度よりも高い値を示した．限られた問題での数値実験結果であり，また単独では決して良好とはいえない Amin 規準の果たす役割など解明すべき点が多く残されているが，現状において Bmin 規準が離散的多目的最適化問題の最適性規準として最有力と評価するものである．

5. おわりに

本研究では，連続的最適解が得られない場合の離散的多目的最適化問題の最適性規準を満足化トレードオフ法のコンセプトをベースとして基礎的に模索してきた．簡単な数値実験結果に限定されるが，連続的多目的最適化問題の最適性規準として用いられている Zmin 規準では 70%強である一致率を 95%前後まで向上させる関数を発見することができた．この規準を用いることにより，連続的最適解が得られない場合の離散的多目的最適化問題においても満足度をベースとした意思決定者によるトレードオフを従来と同様に行うことができる．ただし，現在のところあくまでも限定された数値実験結果だけが根拠であり，理論的考察に関してはその可能性の検討すらなされていない状況である．離散的最適化手法として強力な遺伝的アルゴリズムとの融合なども含めて，今後の検討課題としたい．

なお，本研究の数値計算・結果整理に関して九州共立大学工学部土木工学科学生川口博之君の労を得た．記して謝意を表する．

参考文献

1)亀廻井寿明,杉本博之,中山弘隆:構造最適設計のための改良型満足化トレードオフ法に関する研究,土木学会論文集,第 441 号,pp.117～126,1992.1.

2)三原徹治,千々岩浩巳:満足化トレードオフ法に基づく離散的 2 目的最適塑性設計に関する基礎的考察,構造工学論文集,Vol.38A,pp.477～486,1992.3.

3)三原徹治,太田俊昭,日野伸一:GA を用いた多柱式合成高橋脚の予備設計法に関する基礎的研究,第 5 回システム最適化に関するシンポジウム講演論文集,pp.213～218,1997.12.

4)Chunlu LIU and Yoshito ITOH: Lifecycle Management of Network-level Bridges, NUCE Research Report, No.9703, 1997.3.