

Double & Clumpによる初通過確率の算定

A Study on Double & Clump Procedure for First Passage Probability

須藤 敦史*・星谷 勝**

Atsushi SUTOH and Masaru HOSHIYA

* 博士(工学) (株) 地崎工業 土木技術部 主席研究員(〒105-8488 東京都港区西新橋2-23-1)

** Ph.D. 武蔵工業大学教授 工学部土木工学科 (〒158-8557 東京都世田谷区玉堤1-28-1)

Various procedures to extend the applicability and increase the efficiency of Monte Carlo Simulation (MCS) for the analysis of complex dynamical systems are discussed. But, direct MCS procedures require too much computational effort for this problem. Hence, several advanced MCS procedures have been applied to structures under dynamic excitation. This paper is to develop the techniques, to compute efficiently failure probability of dynamical systems by Double & Clump (D&C) procedure. To calculate effectively the probability, several controlled criteria are introduced in the numerical procedure so as to obtain the low probability effectively.

Key Words: Advanced Monte Carlo Simulation, Stochastic Processing, First Passage Probability

1. はじめに

風や地震など不規則な荷重を受ける構造物は非線形な挙動を示すため、安全性の評価には非線形不規則振動理論による信頼性解析が必要となり、評価は破壊規範によって大きく2つに分類される。

1) 初(閾値)通過問題 2) 累積損傷問題¹⁾

この中で初通過問題は図-1に示すように応答値 $Z(t)$ が規定した閾値 λ を越えた状態を限界とし、複数の不規則外乱が作用している時間内に応答値が閾値を超過する確率を定量的に求め、信頼性を評価するものである。

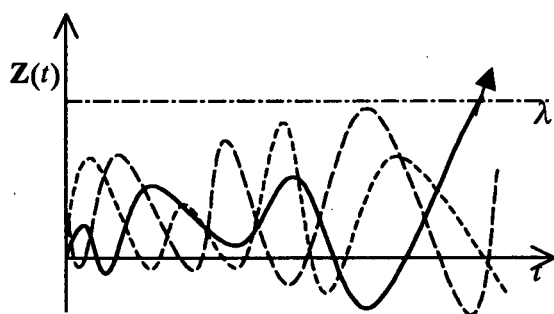


図-1 First Passage Probability

この初通過確率の求め方はa) Fokker-Planck-Kolmogorov式を初期値・境界値問題として解く方法²⁾, b) Level-Crossing法³⁾が挙げられるが, a)は応答の包絡振幅のマルコフ性を仮定してStochastic Averaging法³⁾によって解くため線形低自由度

でかつガウス性のホワイトノイズ入力という特殊な場合のみ理論解が得られる。b)では応答のpoisson過程が成り立つ以外では異なる時間で変位および速度の同時確率密度関数または初期通過時間の同時確率密度関数が必要となるため、どちらも限定された解法であり多自由度・非線形な場合では初通過確率を正確に求めることは難しい。

そこで、多自由度や非線形の影響を受けない解法としてMonte Carlo Simulation⁴⁾ (以下 MCS)が用いられているが初通過確率は非常に小さい値を示すため、精度良く求めるには膨大なサンプル(不規則)波形を必要とする。

そこで、破壊事象の発生確率の高い領域にサンプルを集中させ計算量の減少を図ったDouble and Clump⁵⁾, Russian Roulette and Splitting⁶⁾, Importance Sampling Method¹⁰⁾¹¹⁾などの手法が提案されている。

一方、生物の進化過程を最適化アルゴリズムに適用したGenetic Algorithm: GA¹²⁾やMCSを基本とした離散最適化手法¹³⁾¹⁴⁾は複数の候補の中から最適解を得ようとするものであり、目標とする領域を探索するサンプル操作などにおいて共通した考え方や技法が見られる。

したがって、MCSを基本とした解法を用いて初通過確率を精度良く求めるためには、GAなどの離散最適化手法と同様にアルゴリズムの考え方やプログラミング技法の良否が解析精度に大きな影響を与えることになる。

そこで本研究では初通過確率を効率良く算出することを目的として、Double and Clump においてサンプルを破壊確率の高い領域に誘導する判断基準を提案し、同時に数値解析によりその効果を検証している。

2. 初通過確率と Monte Carlo Simulation

初通過確率は複数の不規則外乱を受けたシステムの応答値 $\mathbf{Z}_n(t)$ が継続時間内に基準レベル $\lambda, -\lambda$ を超過する確率と定義され、応答値を $\mathbf{Z}_n(t) = [\mathbf{x}_n(t), \dot{\mathbf{x}}_n(t)]^T$, $n = 1, 2, \dots, N$ とすると初通過確率は式(1)となる。

$$P_f(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N I[\mathbf{Z}_n(t)] \quad (1)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N I[\mathbf{Z}_n(t)]$$

$$I[\mathbf{Z}_n(t)] = \begin{cases} 1; g(\mathbf{Z}_n(t)) \leq 0, 0 \leq t \leq T \\ 0; g(\mathbf{Z}_n(t)) > 0, 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

T : 全継続時間, $I[\mathbf{Z}_n(t)]$: 指標関数

$g(\mathbf{Z}_n(t))$: システムの性能関数, N : サンプル数

サンプル数 N が十分大きければ確率 $P_f(T)$ は不偏推定値となるが初通過確率は非常に小さな値であるため、正確に求めるには数多くのサンプルが必要となり多大な計算時間を必要とする。

したがって、少ないサンプルで正確に初通過確率を求めるためには何らかの技法により MCS の効率化が必要となる。

3. D&C(Double and Clump)の概要

3.1 アルゴリズム

破壊基準 $\lambda, -\lambda$ を設定し、不規則外乱を $nSim$ 組サンプリングして動的応答解析を行う。

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_1(t_k) & w_1(t_k) & C_1(t_k) \\ \mathbf{Z}_2(t_k) & w_2(t_k) & C_2(t_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{Z}_i(t_k) & w_i(t_k) & C_i(t_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{Z}_{nSim}(t_k) & w_{nSim}(t_k) & C_{nSim}(t_k) \end{cases} \quad (2)$$

$w_n(t_k)$: 重み(初期値 $w_n(0) = 1/nSim$, $n = 1, 2, \dots, nSim$)

$C_n(t_k)$: 選定基準(基準レベルを超過する確率)

ここで各時刻 t_k における応答値 $\mathbf{Z}_n(t_k)$, $n = 1, 2, \dots, nSim$

は、Markov 性を示すものとし、この時の重み $w_n(t_k)$ および

選定基準 $C_n(t_k)$ を式(2)とする。次に時刻 t_k において

$nSim$ 組のサンプルされた不規則外乱に対する応答値 $\mathbf{Z}_n(t)$ が基準レベル $\lambda, -\lambda$ を通過する可能性の大きさ

(選定基準: $C_n(t_k)$, $n = 1, 2, \dots, nSim$) を求めて、式(3)

のように大きい順に並び替える。

$$C_{j,1}(t_k) \leq C_{j,2}(t_k) \leq \dots \leq C_{j,nSim}(t_k) \quad j = 1, 2, \dots, nSim \quad (3)$$

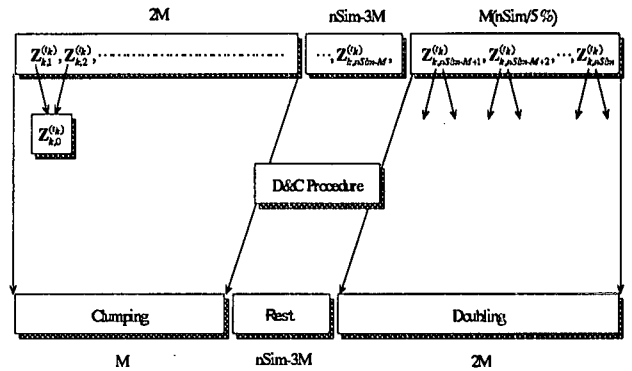


図-2 Algorithm of D&C

ここで図-2 に示すように t_k ステップにおける選定基準値の上位 M 個 (通常はサンプル総数の 20%以下) のサンプルを $2M$ 個に増加(Doubling)させ、次ステップ (t_{k+1})におけるサンプル数とし、同時にサンプル総数 $nSim$ 個を維持するように選定基準の小さい $2M$ 個のサンプル数を M 個に減少させる(Clumping)。

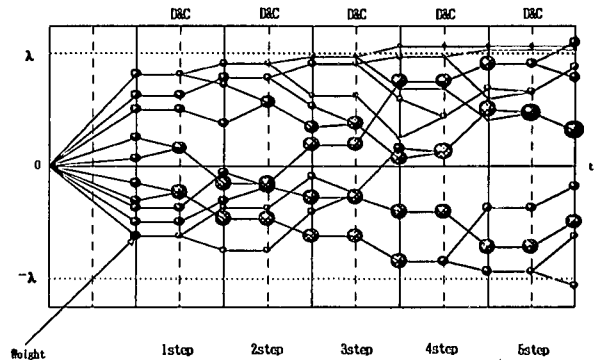


図-3 D&C Procedure

これにより、破壊基準を通過する確率の高いサンプルの

を増加させることで、少ないサンプルで効率かつ正確に初通過確率を求めようとするものであり、応答値 $Z_n(t_k)$, $n = 1, 2, \dots, nSim$ は図-3 となる。

3.2 統計量修正

この操作で破壊基準を通過する確率の高いサンプルは多くなるが、サンプル全体の統計量が歪む。そこで Doubling したサンプルは式(4)のように重みを 1/2 に減少させ、Clumping されたサンプルの重みは式(5)のように Clumping 以前に有していた重みの和を新たな重みとする。

$$w_{k, nSim-M+1}^{(t_k)} \Rightarrow \frac{1}{2} w_{k, nSim-M+1}^{1(t_k+1)}, \frac{1}{2} w_{k, nSim-M+1}^{2(t_k+1)} \quad (4)$$

$$w_{k, M}(t_k + 1) = w_{k, 2M-1}(t_k) + w_{k, 2M}(t_k) \quad (5)$$

$nSim - M + 1(M \rightarrow 2M)$: Doubling したサンプル個数, $M(2M \rightarrow M)$: Clumping 個数, t_{k+1} : 時間ステップ
ここで、重みの変更操作を施した後の全継続時間 T における初通過確率は式(6)に示すようになる。

$$P_f(T) = CDF(T) = \sum_{n=1}^{nSim} I[Z_n(T)] \cdot w_n(T) \quad (6)$$

$w_n(T)$: 全時刻 T における各サンプルの重み

しかし、上記の修正操作ではサンプル全体の統計量の変化に対して不十分である。そこで極力サンプル統計量に影響を与えない Clumping する組合せの選定基準として式(7)に示すサンプル間の正規距離を用いる。

$$d_{j1, j2}(t_k) = \sqrt{\sum_{m=1}^{nState} (Y_{j1, m}(t_k) - Y_{j2, m}(t_k))^2} \rightarrow \min \quad (7)$$

$$Y_{j, m}(t_k) = \frac{Z_{j, m}(t_k) - \hat{z}_m(t_k)}{\sigma_m(t_k)} \cdot q(m)$$

m : ベクトル構成要素, $j1, j2$: 異なるサンプル実現値,

$\sigma_m(t_k)$: 残存サンプル標準偏差, $\hat{z}_m(t_k)$: 残存サンプル平均値,

$q(m)$: 相対的重要度 ($q(m) = 1, m = 1, 2, \dots, nState$)

式(7)により正規化距離の差が最小となるサンプルを Clumping することで統計量の歪みを防止する。

3.3 選定基準の設定

D&C, RRR&S や ISM は、GA や MCS を基本とした離散最適

化手法と同様にサンプルの選定基準が非常に重要となる。そこで、以下のような選定基準を設定し、数値比較により効果を評価する。

a) 選定基準 1

式(8)のように絶対応答変位（破壊基準までの距離）を選定基準とする。

$$C_n(t_k) = |z_n(t_k)| \quad n = 1, 2, \dots, nSim \quad (8)$$

b) 選定基準 2

基準通過の可能性をサンプルの絶対応答変位とその速度勾配を選定基準とする。

$$C_n(t_k) = \left| a \cdot \left(\frac{z_n(t_k)}{\sigma_{z(t_k)}} \right)^2 + b \cdot \left(\frac{\dot{z}_n(t_k)}{\sigma_{\dot{z}(t_k)}} \right)^2 \right|, n = 1, 2, \dots, nSim \quad (9)$$

$z_n(t_k)$: 応答変位, $\dot{z}_n(t_k)$: 応答速度,

$\sigma_{z(t_k)}$: 残存サンプル応答変位の標準偏差,

$\sigma_{\dot{z}(t_k)}$: 残存サンプル応答速度の標準偏差

$$a = \begin{cases} 1; x_n(t_k) > 0 \\ -1; x_n(t_k) < 0 \end{cases}, \quad b = \begin{cases} 1; \dot{x}_n(t_k) > 0 \\ -1; \dot{x}_n(t_k) < 0 \end{cases}$$

ここで式(9)では各サンプル変位が破壊基準からどれだけ離れているか、またどれだけの速度で破壊基準に近づいているかを評価の対象としており、変数 a, b は変位・速度の方向を表す。

3.4 重みの上・下限値

D&C ではサンプルは少なく、Doubling もしくは Clumping されたサンプルの重みは時刻とともに修正されているため、どのサンプルがどの時刻で破壊基準を超過したかで初通過確率の値に大きな影響を与える。そこでサンプルに付加する重みの上・下限値を式(10), (11)のように設定し、これによりのサンプルの重みに制限を設ける。

$$\text{上限値: } w_{\max} = 2/nSim = 2 \cdot w_n(0) \quad (10)$$

$$\text{下限値: } w_{\min} = w_f \times 10^{-3} \quad (11)$$

w_f : 最初に破壊基準レベルを超過したサンプルの重み

ここで、式(11)では最初に破壊基準を超過した重み w_f

によって得られる初通過確率の精度にバラツキが生じる。

そこで、重み w_f をパラメータとして下限値を変化させ

ることにより、初通過確率の安定化を図る。

($CDF(t_k) - CDF(t_{k-1}) \neq 0 \cap w_f \neq 0 \cap CDF(t_{k-1}) \neq 0$ のとき、

初期の重みの下限値 ; $w_{\min} = w_f \times 10^{-3}$

$|\log_{10}(CDF(t_k) - CDF(t_{k-1})) - \log_{10}(w_f)| > 1.5$ ならば,

$w_f = w_f / 10$ (下限値を下げる)

$|\log_{10}(CDF(t_k)) - \log_{10}(w_f)| > 1.5$ ならば,

$w_f = w_f \times 15$ (下限値を上げる) (12)

以上より, サンプル選定基準を設定し, 同時に重みを制限することで, 安定した初通過確率の算出を目標とする。

4. ホワイトノイズ入力を受けた

線形1自由度系モデル

線形1自由度モデルの振動方程式は式(13)となる。

$$\ddot{x}(t) + 2\beta_s \omega_s \dot{x}(t) + \omega_s^2 x(t) = -F(t) \quad (13)$$

減衰定数 (β_s): 0.05, 固有円振動数

(ω_s): 6.28 (rad/sec)(=1Hz) とし, また入力値は式(14)

を用いている。

$$F(t) = \sum_{k=1}^N a_k \cos(\omega_k \cdot t + \phi_k) \quad (14)$$

$$a_k = \sqrt{2S_x(\omega_k)\Delta\omega} \quad (S_x(\omega_k): \text{片側パワースペクトル})$$

$$\phi_k = U(0, 2\pi)$$

$$\Delta\omega = (\omega_u - \omega_l) / 256 = 0.2453, \text{ (rad/sec)}$$

ここで $F(t)$ は $\omega_l = 0\text{Hz}$, $\omega_u = 10\text{Hz}$ (= 62.8rad/sec)

の周波数帯域をもつホワイトノイズとし, $F(t)$ の標準偏

差が 100gal (= cm/sec²) となるように, 複数の不規則

波形を作成して入力としている。この条件で全継続時間

$T = 20\text{(sec)}$, 時間刻み $\Delta t = 0.01\text{(sec)}$ の 200step で応

答解析を行い初通過確率の算出を行っている。

また D&C より求められた初通過確率の検証には, MCS において十分に安定する 60 万回シミュレーションした初通過確率を用いている。

a) Case1 選定基準を絶対変位 (式(8)) のみ, 重みの制限を与えない初通過確率とサンプルサイズを図-4 に示す。ここで, 破壊基準は応答変位の標準偏差の 4.75 倍 (後述, 式(15)) として (+, -) 両側に設定している。

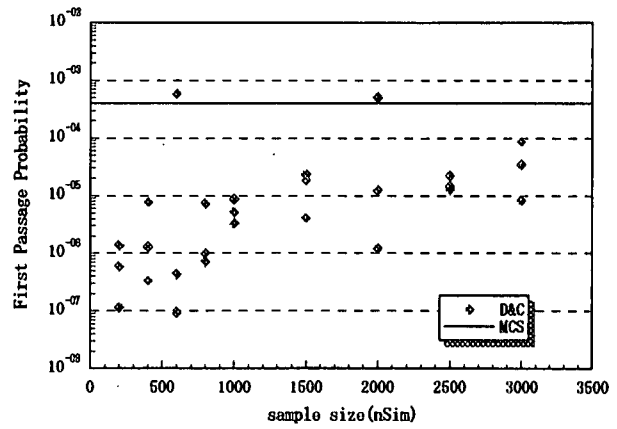


図-4 First Passage Probability of D&C (Case1)

Case1 では初通過確率はサンプルサイズが 3,000 以内では安定しておらず, 加えて精度も良くない。

b) Case2 選定基準は絶対変位 (式(8)) のみ, 重みの上限値 (式(10))(11)) を設定した初通過確率を図-5 に示す。

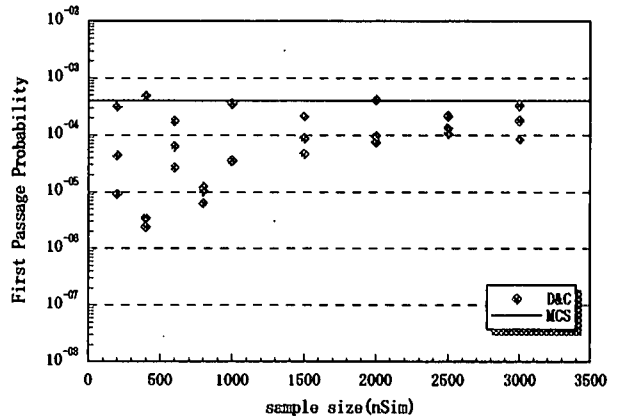


図-5 First Passage Probability of D&C (Case2)

初通過確率はサンプルサイズ 1,500 以上で安定してきているものの, まだ精度向上は見られない。

c) Case3 選定基準は絶対変位とし, 重みの上限・下限値に加えて基準重み w_f により下限値を変化させた初通過確率を図-6 に示す。

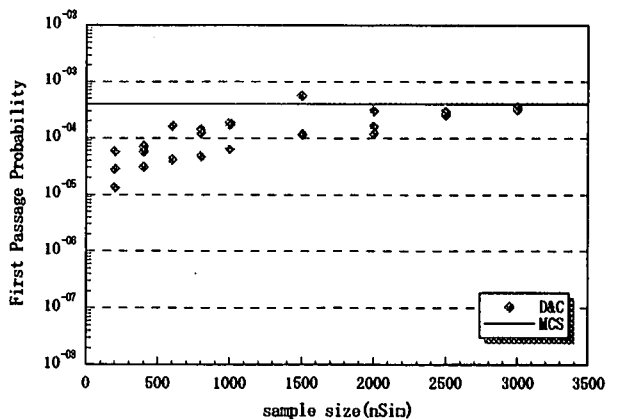


図-6 First Passage Probability of D&C (Case3)

初通過確率の算定値は安定し、サンプル数 2,500 程度で MCS (60 万回) のシミュレーション結果とほぼ同じになっている。

d) Case4 選定基準を絶対変位と速度とし、同様に重みの上・下限値に加えて基準重み w_i により下限値を変化させた初通過確率を図-7 に示す。

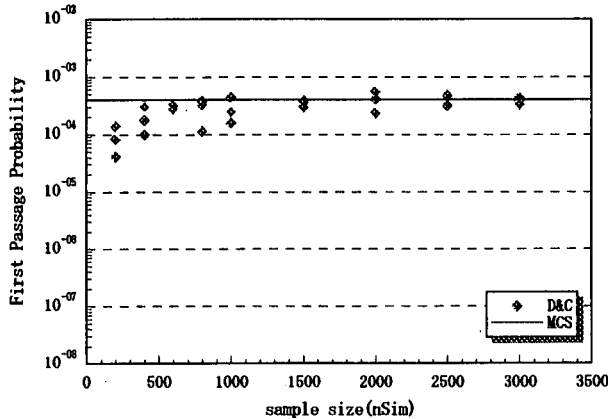


図-7 First Passage Probability of D&C (Case4)

初通過確率の算定値は安定し、サンプルサイズ 1,500 程度で MCS (60 万回) のシミュレーションとほぼ同じ結果になる。

以上より、D&C はサンプルの選定基準と重みの制限を設けることで、計算回数の効率化が図れ MCS と同等の破壊確率が得られる手法である。

e) Case5 さらに小さい初通過確率を設定して、MCS (シミュレーション 60 万回) と比較したものを図-8 に示す。

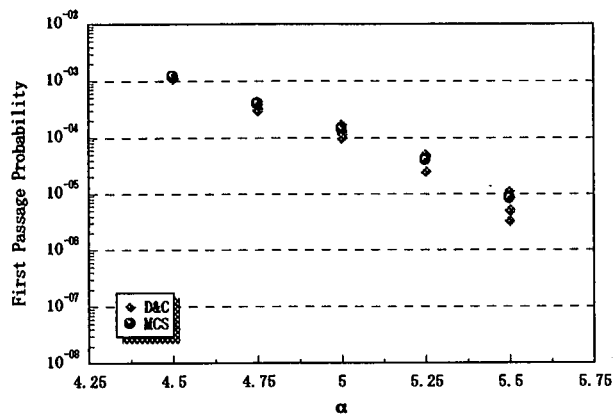


図-8 First Passage Probability of D&C (Case5)

サンプルサイズは 3000 個、破壊基準入は式(15)に示す応答変位の標準偏差の任意倍数 α を設定した。したがって α が大きくなるに従い、設定した初通過確率は破壊確率分布のすその部分の小さな確率を求めることになる。

$$\lambda = \alpha \cdot \sigma_{z(t_k)} \quad (15)$$

$\sigma_{z(t_k)}$: 応答波形の標準偏差, α : 任意定数

また、D&C はサンプル全体の約 20% で行っている。初通過確率の大きさに関わらず MCS と同程度の精度を示している。

5. バイリニア系モデルの破壊確率

バイリニア系モデルの振動方程式は式(16)で表される。

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k\eta(x(t)) = -mF(t) \quad (16)$$

$$\eta(x(t)) = \begin{cases} x(t); & |x(t)| < X_s \\ \gamma x(t) - X_s; & |x(t)| < X_s, \cap x(t) \geq 0 \\ \gamma x(t) + X_s; & |x(t)| < X_s, \cap x(t) < 0 \end{cases}$$

ここで、減衰定数 (β_s); 0.05, 固有円振動数 (ω_s); 7.07

(rad/sec), $X_s = 3.0$ (cm), $\gamma = 2.0$ としている。この条件

により全継続時間 $T = 10$ (sec), 時間刻み $\Delta t = 0.01$ (sec) の計 1000 step で応答解析を行い、比較にはシミュレーション 10 万回の MCS により求めた確率を用いた。

また、サンプルサイズ 3,000 として D&C をサンプル比率 20% とした初通過確率を図-9 に示す。

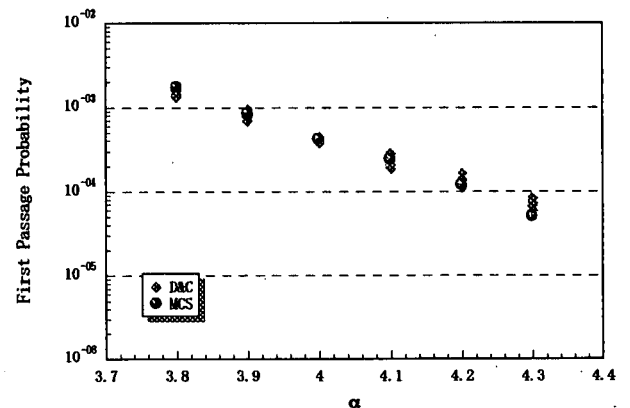


図-9 First Passage Probability of D&C

バイリニア系モデルにおいても 10 万回の MCS と同程度の初通過確率が求められている。

以上より、サンプル選定基準および重み制限を適切に設定することで D&C は効率的に初通過確率が得られる。

6. 結 論

初通過確率の効率的な算出を目的として、D&C におい

てサンプル選定基準と重みの制限を提案し,その有効性を数値解析で試み,以下に示す結論が得られた。

- 1) D&C による初通過確率は安定しており,少ないサンプル数で MCS と同程度の初通過確率を示した。
- 2) サンプル選定基準を適切に設定することで,効率的に初通過確率が算出される。

次に,初(閾値)通過問題やサンプリング技法における展望や課題は以下の事項となる。

- 1) 初通過確率を効率的に算出する解法は構造工学ばかりではなく,金融工学における信用リスク¹⁵⁾¹⁶⁾など多くの分野での利用が予想される。
- 2) 今後,このような問題における効率的な解法の開発に対しては,人工生命(Artificial Life:AL)技術におけるアルゴリズムやプログラミング技法が参考になると考えられる。

参考文献

- 1) 高橋利恵・濱本卓司,マルコフ過程を用いた構造物の確率的損傷予測モデル,ICOSSAR'91 論文集,Vol.2,pp.37-41,1991.
- 2) 持尾隆士,荷重組合せを考慮した履歴系構造物の疲労損傷評価,ICOSSAR'95 論文集,Vol.3,pp.269-276,1995.
- 3) Lin,Y.K. and Cai,G.Q.,Probabilistic Structural Dynamics,Advanced Theory and Applications,McGraw-Hill,Inc.,New York.,1995.
- 4) Rice,S.O.,Mathematical Analysis of Random Noise,Selected Papers on Noise and Stochastic Processes,Pover,pp.133-294,1954.
- 5) Rubinstein,R.Y.,Simulation and Monte Carlo Method,John Wiley & Sons, New York.,1981.
- 6) Pradlwarter,H.J.,Schueller,G.I., and P.M.Mehnikov, Reliability of MDOF-Systems,J.Probabilistic Engineering Mechanics,pp.235-243,1994.
- 7) Pradlwarter,H.J., A Selective MC Simulation Technique for Nonlinear Structural Reliability Assessment,Proc.ASCE Specialty Conference, pp.451-454, 1992.
- 8) Pradlwarter, H.J. and Schueller, G.I., Assessment of Low Probability Events of Dynamical Systems by Controlled Monte Carlo Simulation, Applied Mechanics Review,1997.
- 9) Pradlwarter,H.J. and Schueller,G.I., On Advanced MCS Procedures in Stochastic Structural Dynamics,Journal of Non-Linear Mechanics,1996.
- 10) Bayer,V. and Bucher,C.,An Importance Sampling Procedure For First Passage Problem,Proc. of ICOSSAR, Kyoto, 1997.
- 11) Bayer,V. and Bucher,C.,A Simulation Procedure for First Passage Problem of Nonlinear Structures, Proc. ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability,pp.816-819,1996.
- 12) Goldberg, D.E.,Genetic Algorithm in Search, Optimization and Machine Learning,Addison-Wesley,1983.
- 13) Hoshiya,H. and Sutch,A.,Optimization Analysis by Importance Sampling, GA procedure and other MCS-Based Algorithms,Jour. of Probabilistic Engineering Mechanics, Vol.12,No.14,pp.221-223,1998.
- 14) 須藤敦史・星谷勝・宮沢和樹,遺伝的要素を考慮したインポートランスサンプリングによる離散型変数を有するシステムの最適化,土木学会論文集,第519号, I-32,pp.223-232,1995.
- 15) 今野浩編:金融技術とリスク管理の展開,東洋経済新報社,1999.
- 16) 木島正明,小守林克哉:信用リスク評価の数理モデル,朝倉書店,1999.