

ファジィ推論を用いた複数応力集中部における自動メッシュ生成法

Automatic Mesh Generation Method and Searching Concentration by Fuzzy Reasoning.

杉田尚男*・樋口良之**・鳥居邦夫***

Hisao SUGITA, Yoshiyuki HIGUCHI and Kunio TORII

*正会員 博士(工学) 八戸工業高等専門学校 建設環境工学科 (〒039-1192 青森県八戸市田面木字上野平 16-1)

**正会員 博士(工学) 長岡技術科学大学 経営・情報系 (〒940-2137 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

***正会員 工博 長岡技術科学大学 環境・建設系 (〒940-2137 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

In particular, for the application of automatic mesh generation to stress concentration area, simple computer algorithms for managing input and output data are necessitated. In many cases, the difficulty of the finite element analysis lies in the mesh generation which is free from errors in the mesh formation. The stress gradient of mesh refinement is based on the condition that the sum of element area by the stress at each element is constant. In order to satisfy these requirements, the Fuzzy reasoning is chosen here as an automatic mesh generation scheme which is applicable to the triangular element. The application target of this method is to accurately evaluate the stress concentration factor of the plate with hole.

Key Words : Stress Gradient, Stress Concentration, Automatic Mesh Generation, Fuzzy Reasoning

1. 緒言

近年のコンピュータの飛躍的な性能の向上によって、有限要素法における解析モデルは大型化・複雑化してきている。そのため、解析のポストプロセッサ部による計算時間よりも、解析の入力データの準備に多大な時間を費やすことになる。それに対処するために様々な自動メッシュ分割法^{1),2),3),4),5),6),7)}が提案されているが、要素数、要素形状、連続的な要素配置などにおいて、必ずしも最適化されたとは言いがたい。特に応力集中部分に関する要素分割においては、未だ解析者の判断にゆだねる部分が多く、信頼性の低下を引き起こすことがある。本研究では、従来の応力集中部への要素分割に解析者の経験的な判断によって信頼性の優劣が生じることに着目し、その判断のプロセスをファジィ理論を用いて論理的に表現した。そしてファジィ理論による評価と従来の自動メッシュ生成法とを組み合わせることにより、応力集中部分に対して有効な要素分割法を提案する。特に複数の応力集中部がある問題に着目し、集中部推論からの再分割手法を提案する。解析手法は、解析対象領域において初期要素生成を行い、FEM解析結果から応力勾配を算出し、その応力勾配を利用してファジィ推論による応力集中部の特定を行った後、要素の再分割を行うという4段階より成り、解析対象の応力集中部分の評価とともに初期の段階での最適な要素分割を可能とするものである。

2. Voronoi 理論

N 次元 Euclid 空間において、 n 個の点 $P_1(x_1), P_2(x_2), \dots, P_n(x_n)$ が存在するとき、点 $P_i(x_i)$ に対して最も近

い点の集合 V_i は式 (1) で与えることができる。

$$V_i = \bigcap_{j:j \neq i} \{x \in R^N \mid \|x - x_i\| < \|x - x_j\|\} \quad (1)$$

$$(i = 0, \dots, n, j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n)$$

x : ある位置ベクトル

x_i : 母点 i の位置ベクトル

$\|\cdot\|$: Euclid 距離

V_i は点 $P_i(x_i)$ の Voronoi 領域 (Voronoi 多角形) と呼ばれ、連続的に点の数だけその領域を確保する。一領域を分割した図を Voronoi 図 (Dirichlet tessellation, Thiessen tessellation) と呼ばれ、Voronoi 領域を生成している点を母点、その領域多角形の各頂点を Voronoi 点と呼ぶ。

3. 初期要素生成

3.1 入力データ

入力するデータは、

1. 長方形領域2辺の長さ
2. 仮想母点数
3. 境界近似に関する情報

とし、最小限のデータのみで要素分割を行う。

3.2 母点配置

(1) 仮想母点による格子状配置

母点を正三角形格子状に配置すれば、その Voronoi 領域は正六角形となり、安定した形状を得ることができる。このことに着目し、母点を正三角形格子状に配置するための方法として、仮想母点による配置法を用いた。

仮想母点とは、長方形格子状に配置する仮の母点であ

る。このとき、長方形格子の縦横比は $dx:dy = 1:\sqrt{3}$ となる。

この長方形格子から正三角形格子へと変換を行う。その際、3.1 節で入力された仮想母点数を用いて、格子の幅・高さを計算する必要がある。

- 3.1 節で入力された仮想母点数 vp_{input} と、正三角形の定義から、式 (2) が導かれる。

$$\left(\frac{x}{dx} + 1\right) \left(\frac{y}{dy} + 1\right) = vp_{input} \quad (2)$$

x, y : 各方向の領域の長さ

dx, dy : 各方向の分割幅

$dy = dx \cdot \tan \pi/3$ であるので、これを展開して、式 (3) を得る。

$$\{(1 - vp_{input}) \tan \pi/3\} dx^2 + (x \tan \pi/3 + y) dx + xy = 0 \quad (3)$$

- 式 (3) を用いて、 x 方向、 y 方向の分割幅 (dx, dy) を求める。
- 分割幅から、各方向の分割数を計算し、これを整数化する。
- 求めた分割数と分割幅を乗じたものと、各辺との誤差が 1% 以内に収束しているかどうか判定する。
- 収束していなければ仮想母点数を増やし、分割幅を計算し直す。収束していた場合には、分割幅と分割数を用いて、母点を三角形格子状に配置する。

この方法を用いることにより、要素は正三角形となり安定した形状を得ることができる。また、正三角形格子で母点を配置するためには、ある程度の母点数を必要とするため、要素数が少なくなりすぎるのを防ぐことができる。

3.3 節点生成

母点の配置を決定した後、Voronoi 節点の生成を行う。Voronoi 節点は最大空円理論に基づき、着目母点により作られる外接円の中心に配置する。最大空円理論の特徴から、着目母点で作られる外接円の半径が、最小のものの組み合わせを検索し、外接円の中心に Voronoi 節点を配置する。

3.4 要素生成

FEM 解析を行うために、Voronoi 多角形を三角形要素へと変換する必要がある。全ての Voronoi 節点の生成が終了した後、母点と Voronoi 節点とを、有限要素節点へと置き換え、その後、母点とその Voronoi 領域を構成している節点とを結ぶことで三角形要素を生成する。(図-1-a, 図-1-b 参照)

4. ファジィ推論による応力集中部の特定

4.1 はじめに

本研究では、応力勾配が大きいところほど、離散化による誤差が大きい、という考え方を基本としている。

しかし、応力勾配を要素ごとに算定したのでは、非効率的であるため、応力勾配についても、Voronoi 理論を応用して算出している。

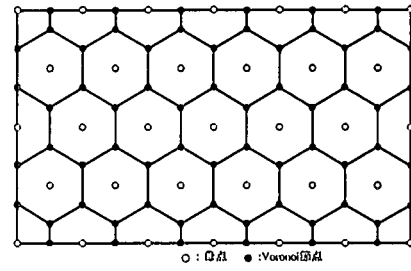


図-1-a Voronoi 図

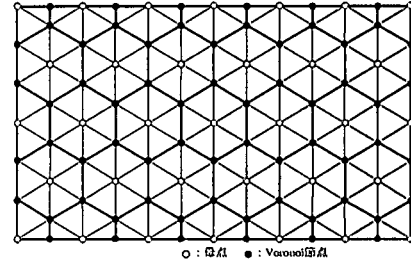


図-1-b 三角形要素

図-1 Voronoi 図から三角形要素への変換

解析領域全体の応力分布については領域間応力勾配によって、局所的な応力分布については領域内応力勾配によって与えられると仮定し、そして、これをファジィ推論の入力値とした。

4.2 領域間応力勾配

Voronoi 理論の応用として、まず Voronoi 領域間の応力勾配の算出を行った。

解析結果は、それぞれの要素の応力として出力されるため、Voronoi 領域ごとの応力の推定を行う必要がある。

Voronoi 領域の応力は、図-2 のようにその Voronoi 領域を構成している要素の平均値とした。

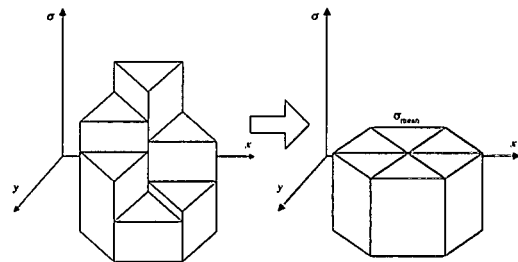


図-2 Voronoi 領域応力

そして領域間応力勾配 SG_{ij} は、 i を着目する Voronoi 領域、 j を i に隣接している Voronoi 領域とし、次の式

(4) により算出した.

$$SG_{ij} = \frac{\sigma_i - \sigma_j}{d_{ij}} \quad (4)$$

σ_i, σ_j : i, j の Voronoi 領域の応力

d_{ij} : i, j の母点間距離

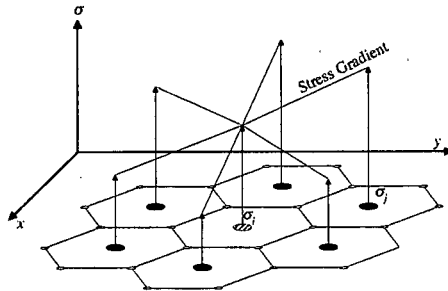


図-3 Voronoi 領域間応力勾配

これを, 図-3 のように着目領域に隣接する領域全てについて算出する. そしてその平均値 $\overline{SG}_{ij}$ を, 応力勾配の代表値とする. 以降この代表値を領域間応力勾配と呼ぶ.

4.3 領域内応力勾配

領域間応力勾配だけでは, 平均値を代表値としているために, 正の勾配と負の勾配の絶対値がほぼ等しいような場合には相殺されてしまい, 過小に評価される場合がある.(図-4 参照)

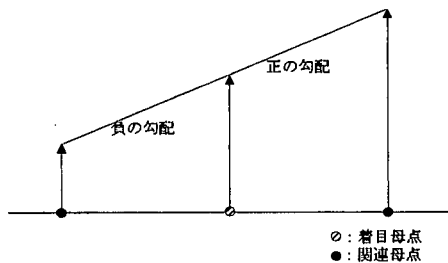


図-4 応力勾配

そこで, Voronoi 領域内における応力の不連続量を表すために, 領域内で最大応力をとる要素と最小応力をとる要素間で応力勾配 sg_i を式 (5) により算定した.(図-5 参照)

$$sg_i = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{d} \quad (5)$$

$\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$: 最大応力, 最小応力の要素

d : 要素の重心点間距離

以後, この応力勾配を領域内応力勾配と呼ぶ.

4.4 ファジィ推論

上記の 2 つの応力勾配を用いてファジィ推論を行い, 応力集中部の特定を行う. 推論方法として MAX-MIN 合成重心法^{8),9),10)}を用いた.

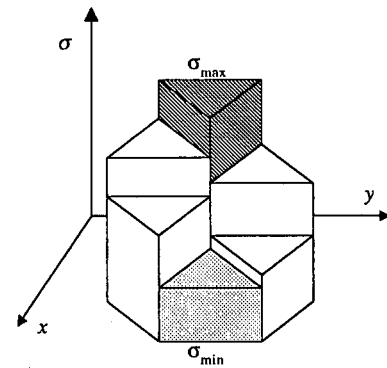


図-5 Voronoi 領域内応力勾配

本研究においては, 前件部メンバーシップ関数として, 領域間応力勾配, 領域内応力勾配の 2 つを定義し, 後件部メンバーシップ関数から出力される推論結果を応力集中の度合いとした. この推論結果の大きい点が応力集中の著しい点であるとしている.

(1) 領域間応力勾配メンバーシップ関数

領域間応力勾配から, 絶対値の最大値を用いて規格化し, 区間 $-1 \sim 1$ が得られる. その区間に対し, 次のようなファジィ変数のラベルを定義している.

NL : Negative Large
NS : Negative Small
ZR : Zero
PS : Positive Small
PL : Positive Large

これらのラベルに対するメンバーシップ関数を図 (6) に示す.

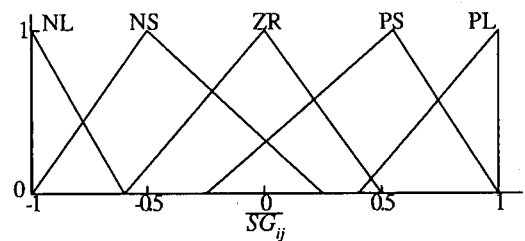


図-6 $\overline{SG}_{ij}$ メンバーシップ関数

(2) 領域内応力勾配メンバーシップ関数

領域内応力勾配も同様に, 最大値を用いて規格化して得られる, $0 \sim 1$ の区間に対して, ファジィ変数のラベルを

SM : Small
MS : Medium Small
MD : Medium
ML : Medium Large
BG : Big

と定義した. 図-7 に対応するメンバーシップ関数を示す.

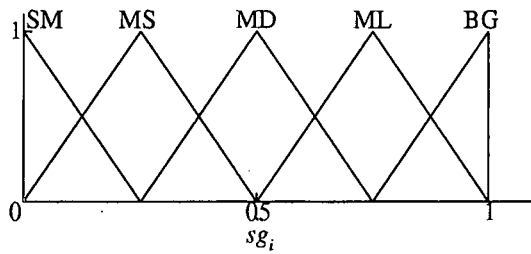


図-7 sg_i メンバーシップ関数

(3) 結果出力メンバーシップ関数

後件部メンバーシップ関数は、応力集中の度合いを示すものとし、区間を0～100で与えている。出力値が大きい点が、応力集中の顕著な箇所であるとした。ファジィ変数のラベルは、

SM : Small
MS : Medium Small
MD : Medium
ML : Medium Large
BG : Big

と定義し、前件部との対応は表-1に示すルールに従う。

		表-1 If-Then Rule				
		sg_i				
		SM	MS	MD	ML	BG
SG_{ij}	NL	SM	SM	MS	MS	MS
	NS	MS	MS	MD	MD	MD
	ZR	MD	MD	MD	ML	ML
	PS	MD	MD	ML	ML	BG
	PL	ML	ML	BG	BG	BG

ラベルに対応するメンバーシップ関数を図-8に示す。

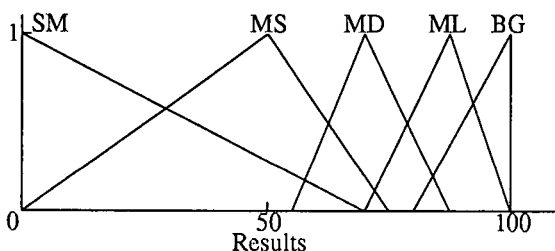


図-8 結果出力用メンバーシップ関数

5. 応力集中部と準応力集中部

5.1 円孔近傍における応力分布

2円孔を持つ無限板が引張りまたは圧縮力を受ける場合の応力状態は一般に、円孔の半径・中心間距離・2軸応力の大きさ、方向などによって変化する複雑である。

ここで、渡辺、鶴戸ら¹¹⁾の研究は、本研究の解析モデルと同様の直径の等しい2円孔モデルについて数値的に詳細に解析されており、円孔近傍の理論応力分布として図-9に示す。

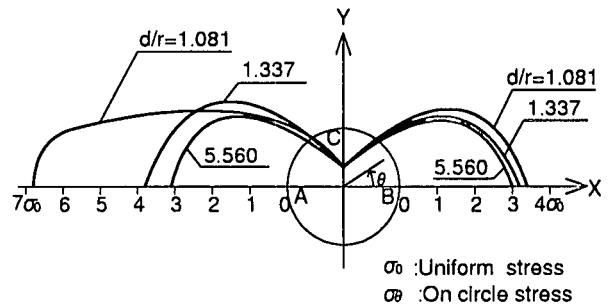


図-9 円孔状の理論応力分布

5.2 準応力集中部

解析モデルの中には、応力集中部以外にも応力密度の高い部分は多数存在する。そこで、解析モデル全体の応力分布を把握し、またメンバーシップ関数による母点配置を行うために、そのような応力密度部分に高い方から順位を付ける。よって2円孔モデルでは図-9に記したように、1円孔に対し2ヶ所で応力密度が高くなるので、顕著に高い縁部分Aを「応力集中部 (Stress Concentration Area:S.C.A.)」とし、他方Bを「準応力集中部 (Semi-Stress Concentration Area:Semi-S.C.A.)」と呼ぶこととする。

5.3 ファジィ推論結果と応力集中部との関係

ファジィ推論結果は0～100の区間で応力集中の度合いを表している。(図-10参照)

6. 応力集中影響内母点配置

6.1 基準メンバーシップ値と応力集中影響内メンバーシップ関数

基準メンバーシップ値は、応力集中影響内外の境界を決定する指標である。応力集中影響内メンバーシップ関数は、連続的なメンバーシップ値という形であらかじめデータベース化した。このメンバーシップ関数はファジィ推論結果が100であるときのもので、最大値は1である。応力集中影響内には5.2で記述したように応力集中部と準応力集中部が存在する。この2つの影響部を母点配置に反映させるために次のような操作を行っている。

1. ファジィ推論結果を0～1までの数値で規格化する。
2. データベース化されているメンバーシップ関数に応力集中部と準応力集中部のファジィ推論値を乗じる。
3. 各最大メンバーシップ値は円孔縁の位置となる。この点を応力集中影響範囲の中心とし同心円状に母点を配置するが、その間隔は2のメンバーシップ関数で制御する。すなわち、式(6)で表されるように、間隔:Liが、母点

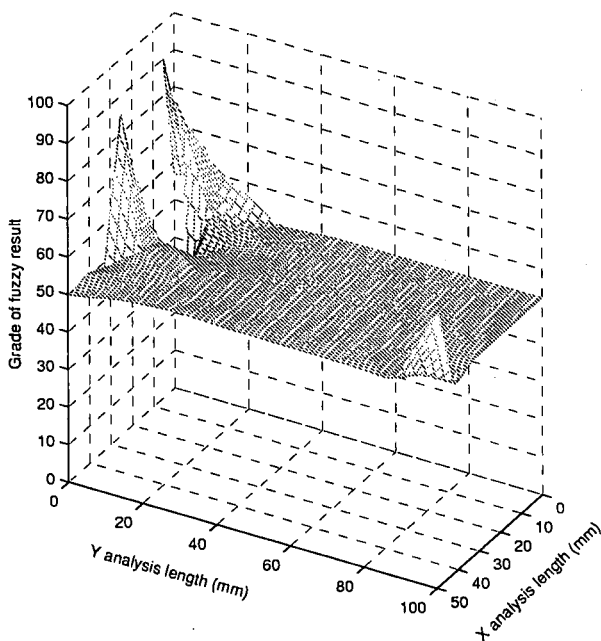


図-10 解析領域のファジィ推論結果分布

のメンバーシップ値 $M_i \sim M_{i-1}$ の逆数となる。(図-11 参照)

$$L_i = \frac{1}{M_i} + L_{i-1} \quad (6)$$

$(L_0 = 0, i = 1, 2, 3, \dots, n)$

この操作をすることによって、応力集中部、準応力集中部各々のメンバーシップ関数とファジィ推論結果を相対的なものにすることができる。

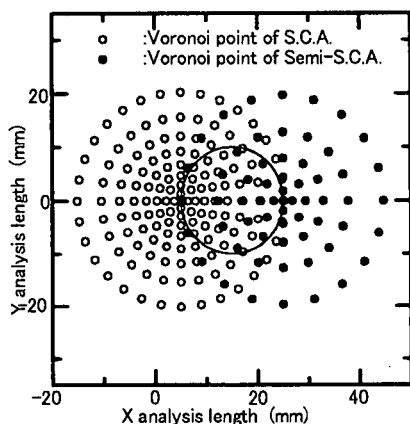


図-11 ファジィ集合

6.2 メンバーシップ値での重ね合わせの原理

応力集中部と準応力集中部のファジィ推論結果が近似すると、この2つの影響範囲、すなわち母点配置が重複する可能性がある。そこで「母点の重ね合わせ」を行

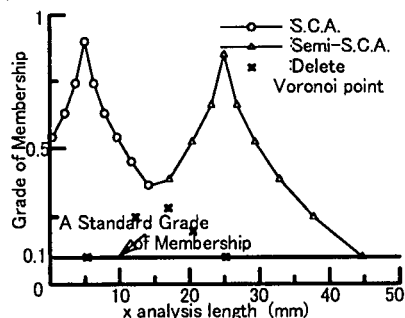


図-12 メンバーシップ値と母点

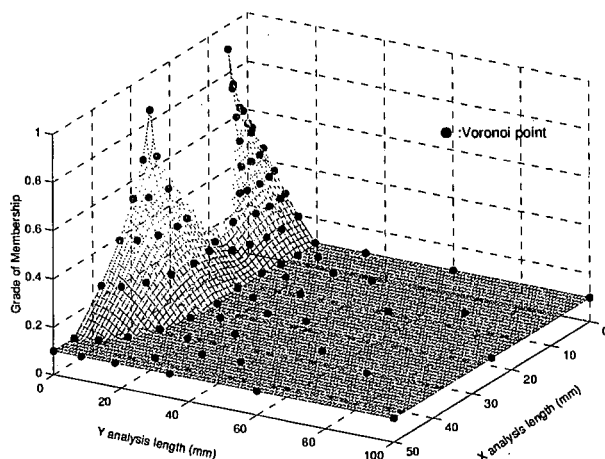


図-13 再配置母点とメンバーシップ関数

う。この基本原理は、重複母点のメンバーシップ値・位置より取捨選択を行うものである。(図-12、図-13 参照)

7. 応力集中影響外母点配置

応力集中影響範囲外の母点配置も基準メンバーシップ値に依存した配置にすればいいのだが、これでは、無限遠方でも一定の間隔で母点が配置されてしまい要素数が過多となる。そこで、段階的母点配置法を提案する。本手法は応力集中影響内母点配置から連続的、段階的に母点を配置する方法である。初期配置では、Voronoi 領域を新しく生成しようとしたとき、その生成母点は最大2個の既存母点と関連付き、その結果、正三角形格子状となるため、母点間隔を上げていくと鋭角三角形の要素が存在するようになり不都合となる。そこで、段階的母点配置法は生成母点との関連を最大3個とし、三角形の一边を長くとり配置する。

8. 適用例

応力集中が顕著に発生する有孔平板モデルを用い、本手法の効果を検証する(図-14 参照)。

モデルの諸元は、ヤング係数 $E = 2.06 \times 10^5 \text{ kN/mm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、板厚 10 mm 、高さ $h = 100 \text{ mm}$ 、幅 $b = 50 \text{ mm}$ 、円孔半径 $r = 10 \text{ mm}$ 、円孔中心間距離 $2d = 30 \text{ mm}$ 、引張力 $q = 4 \text{ kN}$ とした。

初期配置における要素配置図を図-15、ファジィ推論

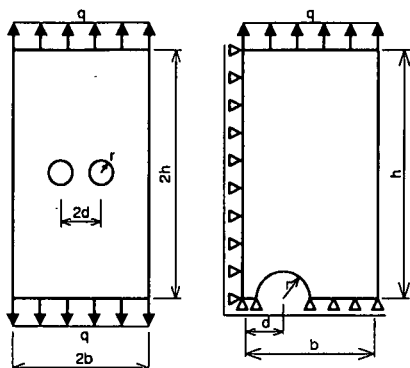


図-14 全体解析モデルと 1/4 解析モデル

結果に基づいた要素配置図を図-16に、FEM 解析の応力値とファジィ推論に基づく再分割メッシュのコンター図を図-17に示す。

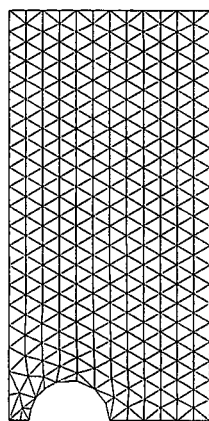


図-15 初期配置

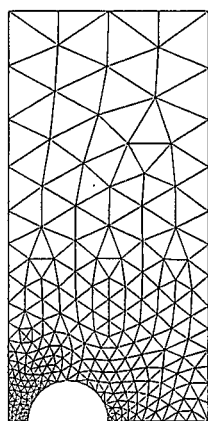


図-16 再分割配置

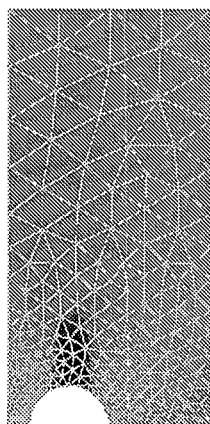
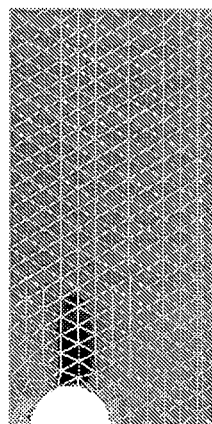


図-17 応力コンター図

円孔半径を変化させ応力集中係数を算出し、理論値¹¹⁾と比較した結果を図-18に示す。

9. 結言

従来の自動最適メッシュ生成法と本手法との大きな違いとして、従来法では誤差評価理論に基づいた厳密

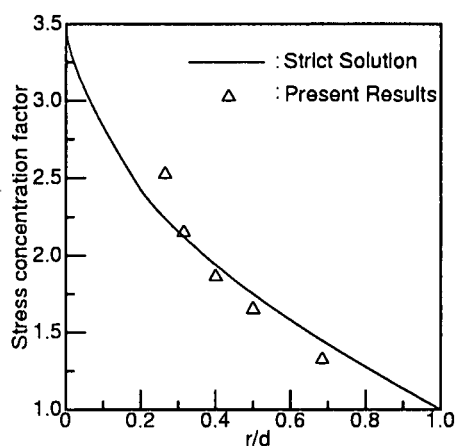


図-18 理論応力集中係数との比較

な数学的手法によりメッシュの細分化を行っているのに対し、本手法では、ファジィ理論を用いることによって、解析者が応力分布状態から経験的判断をもとにしてメッシュの細分化を行うようにして、これを行ったことが挙げられる。

本手法を用いることにより、

1. 一回のメッシュ分割でほぼ最適解に近いメッシュ分割が得られた
2. Voronoi 理論を応用することにより扱うデータを大幅に減らすことが可能となり、節点分布の粗密化が容易となった。
3. ファジィ理論を用いることで、解析者が経験的な判断をもとにしてメッシュ分割を行う過程を論理的に表すことができた

などが確認できた。

参考文献

- 1) E.A.Sadek. A scheme for the automatic generation of triangular finite elements. *Int. J. for numer methods*, Vol. 15, p. 1813, 1980.
- 2) J.C.Cavendish. Automatic of arbitrary planar domains for the finite element method. *Int J. for numer methods*, Vol. 8, p. 679, 1974.
- 3) N.Van.Phai. Automatic mesh generation with tetrahedron elements. *Int J for numer methods*, Vol. 18, p. 273, 1982.
- 4) B.Joe and R.B.Simpson. Triangular meshes for regions of complicated shape. *Int J for numer methods*, Vol. 23, p. 751, 1986.
- 5) 尾田十八, 山崎光悦. 有限要素自動分割法の現状とその利用法 (1). *機械の研究*, Vol. 37, No. 6, p. 704, 1985.
- 6) 尾田十八, 山崎光悦. 有限要素自動分割法の現状とその利用法 (2). *機械の研究*, Vol. 37, No. 7, p. 835, 1985.
- 7) 尾田十八, 山崎光悦. 有限要素自動分割法の現状とその利用法 (3). *機械の研究*, Vol. 37, No. 8, p. 935, 1985.
- 8) 坂和正敏. ファジィ理論の基礎と応用. 森北出版社, 1989.
- 9) 菅野道夫. ファジィ制御. 日刊工業新聞社, 1988.
- 10) 古田, 小尻, 宮本, 秋山, 大野, 背野. ファジィ理論の土木工学への応用. 森北出版社, 1992.
- 11) 西田正孝. 応力集中. 森北出版社, 1967.