

(33) 円筒および角筒の衝撃圧潰吸収エネルギー最大化設計

A Study on Maximization of Dynamic Crushing Energy Absorption of Cylindrical and Square Shell Structures

山崎光悦¹・韓 晶²

Koetsu YAMAZAKI and Jing HAN

¹ 工博 金沢大学教授 工学部人間・機械工学科 (〒920 金沢市小立野 2-40-20)

² 工修 金沢大学大学院自然科学研究科博士課程 (後期) (〒920 金沢市小立野 2-40-20)

Abstract The crushing behavior of cylindrical shells subjected to an axial impact force is studied by FEM, and a comparison between numerical results and theoretical predictions as well as a qualitative comparison between numerical estimates and experimental results are made and discussed. Moreover, a crashworthiness maximization technique for shell structures is developed and applied to the axial crushing problem of cylindrical shell. In the program system presented in this study, an explicit finite element code, DYNA3D is adopted for simulating complicate crushing behavior of shell structures. The response surface approximation technique is applied to construct an approximated design sub-problem in the preassigned design space by using the technique of design-of-experiment. The approximated sub-problem is solved by the usual mathematical programming technique. These optimization processes is repeated until the given convergence conditions will be satisfied.

Key Words : Optimum Design, Nonlinear Problem, Crushing Energy Absorption, Design of Experiments.

1. 緒言

基礎的な構造部材の形状として一般的な円筒や角筒形状部材は、自動車車体の衝撃エネルギー吸収部材などに多く応用されており、その衝撃圧潰現象を正確に把握することは極めて重要である。このような真直部材の圧潰現象についてはこれまでも剛塑性理論に基づく理論的検討^{1)~4)}、実験的検討^{5), 6)}および非線形有限要素法による解析的検討が行われ^{7), 8)}、圧潰現象の解明が進められている。

また、これらの部材を衝撃吸収部材として工業的に応用する場合に、形状寸法などのパラメータを変化させて、そのエネルギー吸収量をより合理的に増加させるような最適化技術が求められる。このような寸法最適化問題においては、最適化ループの中で設計感度解析を行い、その感度をもとに数値計画法などを用いて最適化を行うのが一般的な手法である。しかしながら、この手法によると相当数の構造解析、設計感度解析が必要となり、アルゴリズムの複雑化や計算効率の悪さが問題点となる。また、静弾塑性問題や衝撃弾塑性問題などの非線形現象に対する感度解析の適用はその陽な表現の難しさや感度係数の変動のため非線形性の強い最適化計算に直接利用できないのが現状である。

以上のことから、本研究では、まず動的陽解法有限要素法による衝撃圧潰解析を実施して円筒の座屈圧潰の動的現象を把握し、解析解との比較により数値解析の有効性を確認する。次にその衝撃圧潰解析法と実験計画法を利用した影響度解析¹⁰⁾による円筒の衝撃圧潰吸収エネルギー最大化設計手法を提案し、その有効性を検討する。

2. 円筒の軸方向衝撃座屈圧潰解析

平均半径 r 、肉厚 h の薄肉円筒が軸方向に静的あるいは

動的圧縮荷重を受けると、軸対称あるいは非軸対称のいずれか一方の変形パターンによって座屈によるしわを形成し圧潰に至る。これまでの実験的検討によって、金属材料ではおおよそ $r/h < 40 \sim 50$ の比を持つ円筒の場合は図 1 (a) に示すような軸対称の圧潰パターンを形成し、 $r/h > 40 \sim 50$ の円筒の場合は図 1 (b) に示すような非軸対称の座屈圧潰モードを形成することが知られている^{1), 5), 6)}。しかしながら、広い範囲の円筒においては圧潰中に軸対称からダイヤモンド型の非軸対称の変形に切り替わることもあり得ることが実験的に観察されている。そこでまずそれら圧潰モードに対する有限要素解析を実施し、剛塑性理論による代表的な解析解¹⁾との比較検討を行うと共に、進行性座屈の圧潰モードと荷重変動との関係を明らかにする。

2.1 円筒の座屈圧潰理論

円筒の塑性座屈圧潰現象を説明する解析解の代表例として Jones らの軸対称圧潰理論をここでは考える¹⁾。材質を弾完全塑性材料とし、図 2 のような塑性ヒンジを持つ単純化した軸対称変形パターンを仮定する。平均軸力 P_m により完全な一つのしわを形成するために円筒に施される外力



(a) Axisymmetric Mode



(b) Non-axisymmetric Mode

Fig.1 Deformation mode of cylindrical shell (static).

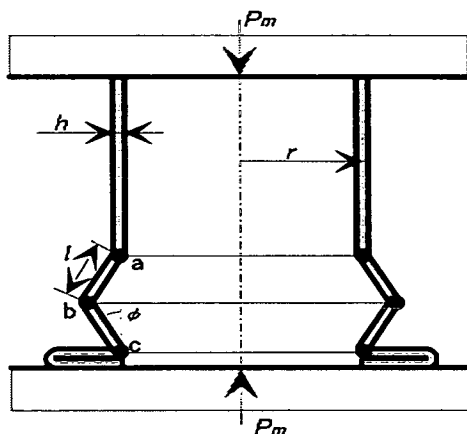


Fig.2 Crushing cylinder with plastic hinges.

仕事 ($P_m \times 2l$) は、塑性変形によって円筒の内部に吸収されるエネルギーと等しいとおくことができ以下ようになる。

$$P_m \times 2l = 2\pi\sigma_0 h^2 (\pi r + l) / \sqrt{3} + 2\pi\sigma_0 l^2 h \quad (1)$$

ここに σ_0 は降伏応力、 l は1個のしわ長さの半長とする。図3のヒンジ間の長さ $l = ab = bc$ は、軸圧縮力を最小化または $dP_m/dl = 0$ とすることにより得ることができ、次のように表される。

$$l = (\pi h / \sqrt{3})^{1/2} \quad (2)$$

式(2)を式(1)へ代入し、しわが外側だけでなく内側に形成される場合も考慮してその平均をとると、軸圧縮力は、

$$P_m = 2(\pi h)^{3/2} r^{1/2} \sigma_0 / 3^{1/4} \quad (3)$$

と表される。

上述の静的軸圧縮を負荷された時の軸対称圧潰理論は、ひずみ速度による降伏応力の増大の影響を考慮すると、運動エネルギーの効果を無視できる程度の比較的低速度範囲の円筒の動的進行性座屈についても応用でき、次式のように与えられる。

$$P_m = 2(\pi h)^{3/2} r^{1/2} \sigma_0 \{1 + (V_0 / 4rD)^q\} / 3^{1/4} \quad (4)$$

ここで D と q は円筒材料の材料定数であり、また V_0 は円筒端面での軸方向衝突初速度で、上式は平均円周方向ひずみ速度を $\dot{\epsilon} = V_0 / 4r$ として得られたものである。

式(3)のような静的平均軸圧潰力の理論式には他にもいくつかの理論式が提案されている^{2), 3)}。図2で仮定したような塑性ヒンジを用いた平坦なしわではなく、実際の進行性座屈時に現出するような曲面状のしわを考え、実験から得られた修正、すなわち有効沈降距離 $\delta_s / 2l = 0.86 - h / 2r$ と式(4)でのひずみ速度の影響を考慮した以下のような式も提案されている¹⁾。

$$P_m = 2(\pi h)^{3/2} r^{1/2} \sigma_0 \{1 + (V_0 / 4rD)^q\} / \{3^{1/4} [0.86 - 0.37(h/r)^{1/2}]\} \quad (5)$$

2.2 円筒の衝撃座屈圧潰現象の有限要素解析

まず動的接触解析有限要素法 DYN3D を用いた円筒の衝撃圧潰解析を実施して、寸法比の違いによる各種圧潰パターンの解析が可能であることを検証した。

(1) 解析モデル 図3に示すような一定質量 $M = 0.53$ kg の条件の下、半径 r 、板厚 h 、円筒長さ L を表1のように変化させた3種類の円筒殻モデル1～3が剛体壁に衝突す

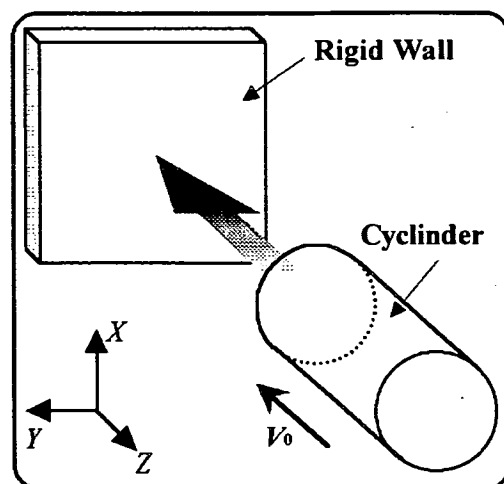


Fig.3 Analysis model.

る場合について有限要素解析を行った例を示す。

モデルの材料はアルミニウムを想定し、縦弾性係 $E = 70$ GPa、ポアソン比 $\nu = 0.33$ 、ひずみ硬化率 $E_T = 280$ MPa、降伏応力 $\sigma_0 = 100$ MPa、密度 $\rho = 2.82 \times 10^3$ kg/m³ とした。また、ミーゼスの降伏条件と双一次形の応力-ひずみ関係を仮定した。衝突速度は $V_0 = 10$ m/sec とし、要素分割は各モデルにあわせて変更した。また全モデル共通の解析条件として衝撃時に圧潰を容易にするため、衝撃端の反対側端面に円筒殻の500倍の質量(265.65kg)を持つ集中質量を一樣に付加した。さらに、集中質量端部の不都合な変形を防ぐため、集中質量端部を構成する節点に回転変位の拘束を加えた。

(2) 衝撃圧潰変形 解析より得られた各モデルのしわの形成数をその圧潰パターンの形式とともに表2に、また解析が一定時間進行した後の変形図を図4に示す。モデル1では、軸対称変形がある程度進行した後、様々な形状を持った非軸対称変形を引き起こして、圧潰に至っている。一方、 $r/h = 37.5$ の比較的肉厚の厚いモデル2では、軸対称のしわが5個生ずる圧潰パターンを示している。長細いモデル3はしわが形成される以前に全体座屈を生じている。

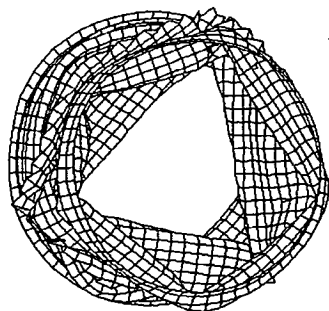
また、一つ分のしわの長さ $2l$ を比較すると、本解析により得られた軸対称変形を生じている部分のみにおける平均値が38mm、式(2)による値が33mmであり、計算によって

Table 1 Model dimensions.

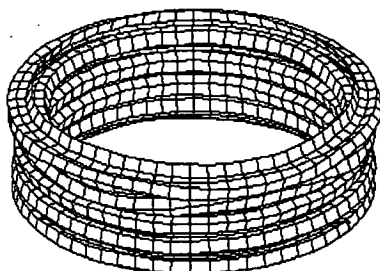
No.	h (mm)	r (mm)	L (mm)	r/h	L/r
1	1.6	75.0	250.0	46.9	3.33
2	2.0	75.0	200.0	37.5	2.67
3	3.0	20.0	500.0	6.67	25.00

Table 2 Deformation modes.

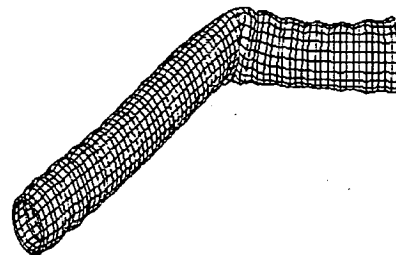
Model No.	Deformation
1	1 circular wrinkle +1 triangular wrinkle +1 pentagonal wrinkle
2	5 circular wrinkles
3	Column buckling



Model-1



Model-2



Model-3

Fig.4 Crushing deformation of cylindrical shell.

生ずる軸対称座屈のしわ長さは理論解析による値と比較的良好一致している。

(3) 圧潰力と吸収エネルギー 表3に計算によって得られた平均軸圧潰力を式(5)による理論値と比較して示す。両者は軸対称、非軸対称圧潰の場合ともに比較的良好一致を示している。一例として、図5にモデル2の圧潰時の剛体壁からの反力およびモデル全体の総エネルギー、運動エネルギー、内部エネルギーの時間履歴を示す。変形の進行とともに反力は上下動を繰返し、最初のしわが形成される過程で反力の大きなピークを生ずる。これは円筒の静的な軸方向圧潰の実験において見られる荷重の傾向と類似している。最初のしわを除く各しわの形成過程で2つのピークを持ち、今までの圧潰実験結果の報告と対応している⁹⁾。

圧潰によるしわの形成に伴ってほぼ線形に内部エネルギーが増加し、運動エネルギーが吸収されていることがわかる。内部エネルギーには弾性変形分と塑性変形の両者によるエネルギーが含まれているが、弾性変形による内部エネルギー量は塑性変形のそれと比較して微小であるので、近似的に内部エネルギーを塑性座屈圧潰によるエネルギー吸収量とした。解析の終了時近くで、内部エネルギーの増加率および運動エネルギーの減少率が大きく変化しており、それにともない反力がピークを迎えているが、これは円筒が完全に圧潰した後でも解析を継続してさらに変形を進行させようとするために生じたものである。そこで、図中における網掛け部を完全圧潰後であると考えて無視し、モデルが実際に吸収しうる最大エネルギー吸収量を決定した。この手法をもとに求めた有限要素解析による各円筒モデルの最終的なエネルギー吸収量と式(5)の平均軸圧潰力の理論式から仕事として得られるエネルギー吸収量($P_m \times \delta_c$)との比較を表4に示す。いずれのモデルの場合も比較的良好一致を示している。

3. 吸収エネルギー最大化設計

3.1 設計問題 本研究では、設計変数として円筒モデルの半径と板厚の2変数を取り、衝撃負荷時の平均圧潰荷重制約と体積一定の制約のもとでの進行性座屈圧潰によるエネルギー吸収量 U の最大化を目的とした。その定式化は以下のようになる。

Table 3 Comparison of mean axial force.

Model No.	Mean axial force (kN)	
	FEM	eq. (5)
1	21.64	23.33
2	31.65	32.87
3	15.88	-----

$$\langle \text{設計変数} \rangle x_1 = r, x_2 = h \quad (6)$$

$$\langle \text{目的関数} \rangle f = U(r, h) \rightarrow \max \quad (7)$$

$$\langle \text{制約条件} \rangle g_1 = P_m(r, h) / P_{a1} - 1 \leq 0 \quad (8)$$

$$g_2 = M = 2 \pi \rho r h L = \text{const.} \quad (9)$$

$$x_1^L \leq x_1 \leq x_1^U, x_2^L \leq x_2 \leq x_2^U \quad (10)$$

ここで、 U は円筒によって吸収されるエネルギー、 P_m は平均衝撃圧潰力、 P_{a1} は許容平均衝撃圧潰力、 M は円筒の質量であり、設計変数の上添字 L 、 U は下限、上限を意味する。

3.2 影響度解析 以上の最適化問題を解くにあたって、本研究では設計感度解析に相当するものとして、実験計画法と構造解析を組合わせた影響度解析による最適設計手法を採用した¹⁰⁾。

従来より最適化分野において試みられてきた設計感度解析は、弾塑性問題や衝撃問題などの非線形現象に対して適用する場合、その陽な表現の難しさや感度係数の変動のため、最適化計算に直接利用できないのが現状であった。しかしながら影響度解析では、無作為に選択された設計変数の組合わせに対して構造解析を行い、その結果より得られた目的関数、制約関数値から構造挙動の推定式を作成する手法をとるため、非線形性の強い問題に対しても適度な近似で適用可能である。

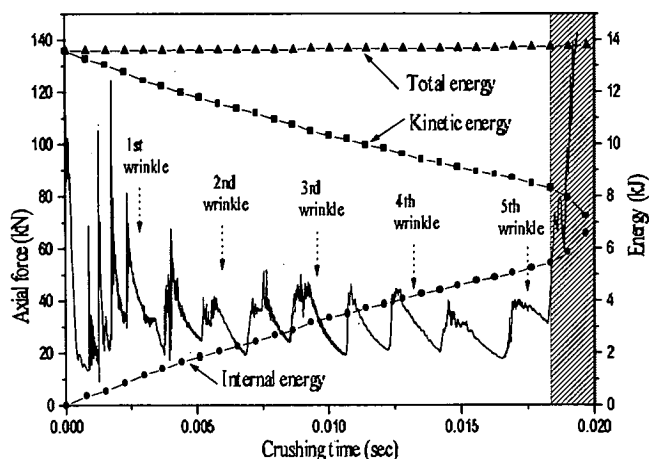


Fig.5 Time history of axial-force and energy.

Table 4 Comparison of internal energy.

Model No.	Time (ms)	Internal Energy (J)	
		FEM	Theory
1	23	4805	4727
2	18	5295	5256
3	20	2677	-----

(1) 実験計画法¹¹⁾ 本研究では直交表を用いた実験計画法を採用する。その手法は、設計変数を直交表の列に割り付け、各行をそれに対応した入力データとして構造解析を行い、それより得られた特性値の分散分析結果をもとに以下に述べるような推定式を用いて設計空間における目的関数や制約関数の近似曲面を構成するものである。例えば、表5に示す3水準系の直交表L9を用いると最大4設計要因まで解析可能で、その設計変数の上限である4設計要因を持つ問題に対してはすべての水準の組み合わせは $3^4=81$ 通りであるが、直交表を用いた無作為化法により実際に実施しなければならない解析数は9通りとなる。同様に13設計変数までは直交表L27が利用できる。

(2) 分散分析と推定式の作成 設計要因の組み合わせによる構造解析結果をもとに、影響度解析によって特性値に対する分散分析と推定式の作成を行う。分散分析は、設計要因の特性値に対する影響度を多項式の成分に直交分解して、その各項に対する有意性を検討する手法である。

特性値に対する推定式は多変数直交多項式によって表わされ、式に用いる設計要因、次数は分散分析により有意性が認められた次数成分のみが用いられる。特性値 y の推定式には次に示すような直交多項式を用いる。

$$y = b_0 + b_1(x - \bar{x}) + b_2\{(x - \bar{x})^2 - \frac{k^2 - 1}{12}h^2\} + \dots + b_n\xi_n(x) \quad (11)$$

$$\xi_0(x) = 1$$

$$\xi_1(x) = x - \bar{x}$$

$$\xi_n(x) = \xi_{n-1}(x)\xi_1(x) - (n-1)\{k^2 - (k-1)^2\}h^2\xi_{n-2}(x) / [4\{(n-1)^2 - 1\}]$$

x : 設計要因 (設計変数), k : 水準数, h : 水準間隔

以上のように衝撃エネルギー吸収最大化設計問題を解くにあたって、本研究では直交表と最小限の構造解析および分散分析より得られた推定式を上記の制約関数、目的関数に使用し、最適化ルーチンを独立させて計算するため、従来の手法に比べて非常に効率的となり、感度解析法を用いずに最適化計算が可能である。以上述べた直交表によるモデル選択から最適化までの計算ステップを、実際には一度の最適化サイクル終了後設計範囲を狭めて繰返すことで、より厳密な解を求めることができる。なお、計算には制約付き最適化法である許容方向法を採用した。

4. 最適化計算例

4.1 解析モデル 前章で述べた最適化設計手法を一定質量 M を持つ円筒殻の衝撃エネルギー吸収問題に適用し

Table 5 Orthogonal array L9.

		Assigning design variables			
		(1)	(2)	(3)	(4)
Analysis No.	1	1	1	1	1
	2	1	2	2	2
	3	1	3	3	3
	4	2	1	2	3
	5	2	2	3	1
	6	2	3	1	2
	7	3	1	3	2
	8	3	2	1	3
	9	3	3	2	1

た。解析モデル、諸条件などには2章の剛体壁への衝突モデルと同様とした。設計空間として、最初 $50 \leq r \leq 100$, $2 \leq h \leq 4$ (単位: mm) の初期設計変数範囲を与え、表6のように等間隔の3水準系を設定した。

直交表を用いて無作為化された9種の組み合わせに対して構造解析を行った。その結果得られた各モデルの変形しわの数として表にしたものを表7に示した。また解析より得られた特性値を吸収エネルギーについて表8に、平均衝撃圧潰力について表9に示す。この結果より分散分析を行った例として平均衝撃圧潰力についての結果が表10である。表中のS.S.は平方和、D.F.は自由度、Vは分散を表し、また F_0 は各設計変数の各次数項におけるF値である。これによると、肉厚が衝撃軸力に大きな影響をあたえることが分かった。全項に有意性を持たせて各特性値の近似式の作成を行った。その結果より目的関数 U (吸収エネルギー量)、衝撃負荷の制約関数 P_m (平均衝撃圧潰力) の推定式は以下のように得られた。

$$U(r, h) = 6.77 - 0.054 \times (r - 75.0) - 0.0001 \times ((r - 75.0)^2 - 416.67) + 1.24 \times (h - 3.0) - 0.29 \times (h - 3.0)^2 - 0.67 + 0.006 \times (r - 75.0) \times (h - 3.0) + 0.0001 \times (r - 75.0) \times ((h - 3.0)^2 - 0.67) \quad (12)$$

$$P_m(r, h) = 63.21 + 0.492 \times (r - 75.0) - 0.0018 \times ((r - 75.0)^2 - 416.67) + 34.66 \times (h - 3.0) + 4.98 \times ((h - 3.0)^2 - 0.67) + 0.4334 \times (r - 75.0) \times (h - 3.0) + 0.0043 \times (r - 75.0) \times ((h - 3.0)^2 - 0.67) + 0.0002 \times ((r - 75.0)^2 - 416.67) \times (h - 3.0) + 0.0002 \times ((r - 75.0)^2 - 416.67) \times ((h - 3.0)^2 - 0.67) \quad (13)$$

これらの推定式と有限要素解析より得られた特性値とを各板厚ごとに比較したものを吸収エネルギーの場合について示したものが図6であり、十分な精度で推定式が作成されることが分かる。上記の近似式によって構成された問題の最適化計算を行った、許容平均衝撃圧潰力 $P_m = 68.6 \text{ kN}$ の制約のもとで、計算は4回で収束した。その計算過程を図7に示す。またそのときのモデル最終形状寸法は表11の設計サイクル1のように半径 $r = 50 \text{ mm}$ 、板厚 $h = 3.78 \text{ mm}$ となった。

この後、得られた最適解の近傍において設計空間を改良し、さらに最適化計算を繰返した。半径を減少させ、板厚を増加させる方向でエネルギー吸収量が大きくなるが、そのような範囲の場合、板厚の増加によりシェル要素による有限要素解析が困難となるため、構造解析計算にソリッド要素を用いた。設計空間を $20 \leq r \leq 50$, $3 \leq h \leq 5$ (単位: mm) と修正し、等間隔に3水準を設定して2回目の設計サイクルを繰返した。構造解析より得られた変形様相をまとめたものを表12に示す。また、吸収エネルギーの近似曲面を図8に示す。半径 $r = 20 \text{ mm}$ の場合は細長く、厚肉の形状となるために、表12に示すように全体座屈を起こすことからエネルギー吸収量が小さくなっている。

Table 6 Level values.

Design variabl	Level No.1	Level No.2	Level No.3
r (mm)	50	75	100
h (mm)	2	3	4

解析結果をもとに推定式を再度作成し、最適化計算を行った。最適化計算は5回で収束した。その計算過程が図8の後半部であり、最大エネルギー吸収量は表11における設計サイクル2のような $r = 37.9 \text{ mm}$, $h = 4.01 \text{ mm}$ において9.78 kJとなった。

一方、図9に示すように、吸収エネルギーは寸法比 r/h が次第に減少するにつれて増加し、全体座屈を起こした後は、急激に減少する。また図10より、 rh^2 が次第に増加するにつれて、衝撃圧潰軸力がほぼ線形に増加することがわかった。

全体座屈が吸収エネルギー量に大きな影響を与えるため、吸収エネルギー曲面が不連続になり、そこで、近似法が不正確な近似を与えることがわかった。そこで、より厳密な解を求めるため、設計範囲を $20 \leq r \leq 35$, $3 \leq h \leq 5$ (単位: mm) のように狭めた解析結果をもとに推定式を再度作成し、最適化計算を行った。その結果を表11の設計サイクル

Table 7 Deformation pattern (1st design space).
(N: Non-axisymmetric wrinkle C: Circular wrinkle)

Radius r (mm)	Thickness h (mm)		
	2	3	4
50	4C+2N	4C	3C
75	5C	3C	2C
100	3C	2C	1C

Table 8 Absorbed energy (1st design space).

Radius r (mm)	Thickness h (mm)		
	2	3	4
50	6.98	8.35	9.02
75	5.31	7.03	8.05
100	4.03	5.52	6.67

Unit: kJ

Table 9 Mean axial crushing force (1st design space).

Radius r (mm)	Thickness h (mm)		
	2	3	4
50	25.95	51.12	74.50
75	31.63	61.14	99.15
100	33.05	67.40	124.94

Unit: kN

Table 10 Variance analysis of mean axial force.
(*: 5% superior, **: 1% superior)

Design variable	SS	DF	V	F_0	$F(0.01)$	$F(0.05)$
Radius r	9.46×10^2	2	4.73×10^2	3.48	18.0	6.94
1	9.43×10^2	1	9.43×10^2	6.93*	21.2	7.71
2	2.82×10^0	1	2.82×10^0	0.02	21.2	7.71
Thickness h	7.55×10^3	2	3.77×10^3	27.73**	18.0	6.94
1	7.49×10^3	1	7.49×10^3	55.08**	21.2	7.71
2	5.15×10^1	1	5.15×10^1	0.3	21.2	7.71
Error	5.44×10^2	4	1.36×10^2			
Total	9.04×10^3	8				

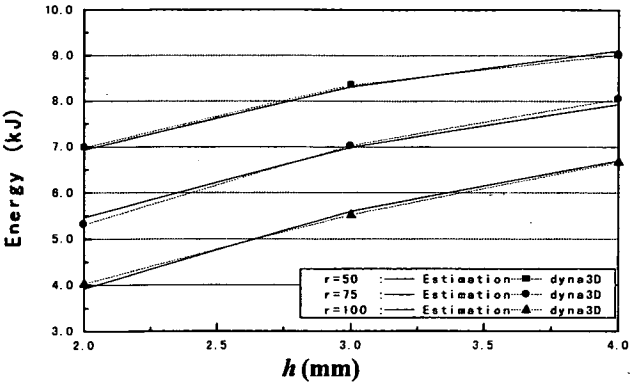


Fig. 6 Comparison of energy.

3に示す。最適化した円筒の衝撃圧潰変形のシミュレーションを図11に示す。これより、一定質量を持つ円筒の衝撃力制約下での進行性座屈圧潰では、軸対称のしわ数を最も多く形成できるような寸法が吸収エネルギー最大寸法を与えることが判った。

5. 結言

本報では円筒の衝撃圧潰現象を対象とし、動的陽解法による有限要素法と実験計画法を利用した影響度解析による、感度解析を用いないエネルギー吸収最大化手法を示した。また提案した近似最適化手法により円筒の衝撃圧潰エネルギー吸収を最大にする寸法を決定し、その有効性を確認した。

Table 11 Optimization results in 3 cycles by DOT.

Cycle No.	r mm	h mm	U kJ	g
Initial	75.0	3.00	6.99	-1.20×10^{-1}
1	50.0	3.78	8.98	2.00×10^{-3}
2	37.9	4.01	9.78	-2.37×10^{-4}
3	29.6	4.14	11.38	-2.20×10^{-4}

Table 12 Deformation pattern (2nd design space).
(C.B.: Column-Buckling C: Circular wrinkle)

Radius r (mm)	Thickness h (mm)		
	3	4	5
20	C.B.	C.B.	C.B.
35	6.5C	5C	4C
50	5C	3C	1.5C

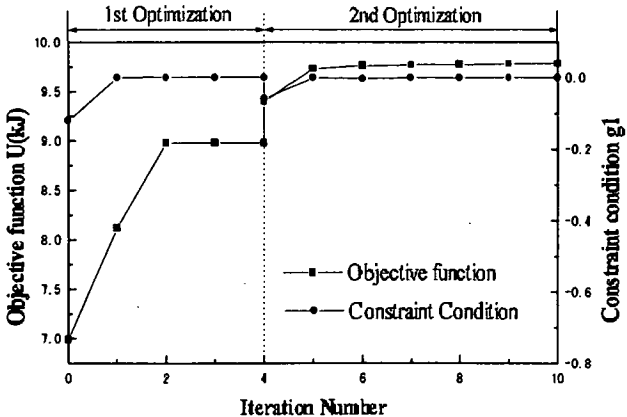


Fig. 7 History of optimization.

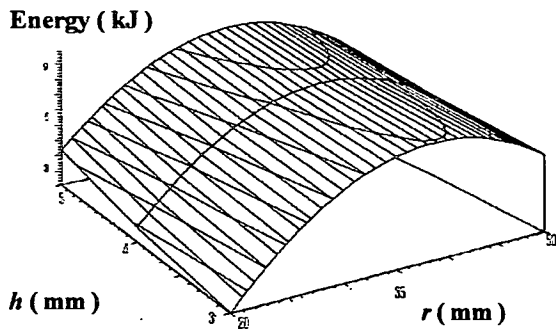


Fig. 8 Approximated response surface of absorbing energy in the 2nd design cycle.

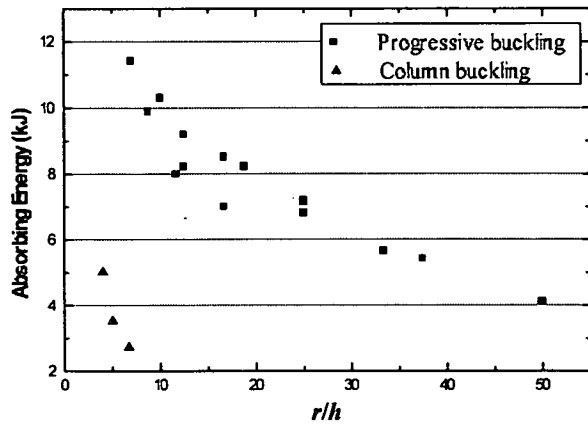


Fig. 9 Absorbing energy vs r/h .

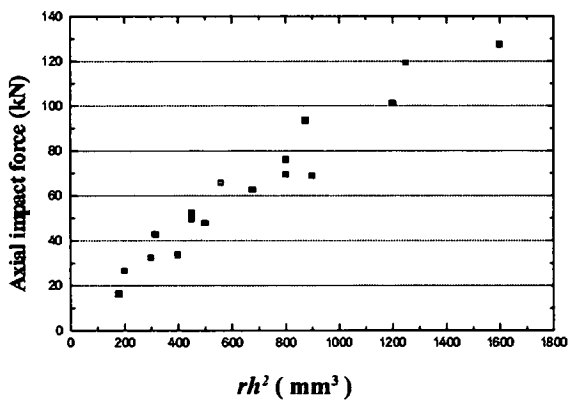


Fig. 10 Mean axial impact force vs rh^2 .

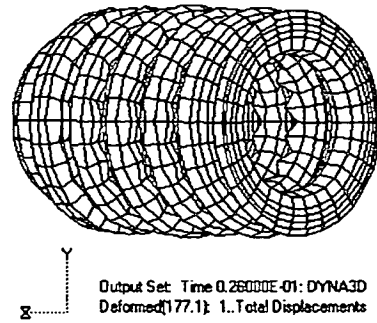


Fig. 11 Simulation of the optimized cylinder.
(Absorbing energy: 11.47kJ
Mean axial impact force: 64.72 kN)

文献

- 1) Jones, N., Structural Impact, Cambridge University Press, 1989.
- 2) Wierzbicki, T., Bhat, S.U., Abramowicz, W. and Brodtkin, D., Alexander Revisited-A Two Folding Elements Model of Progressive Crushing of Tubes, International Journal of Solids and Structures, Vol.29, No.24, 1992, pp.3269-3288.
- 3) Mamalis, A. G., Manolakos, D. E., Viegelahn, G. L. and Johnson, W., The Modelling of The Progressive Extensible Plastic Collapse of Thin -Wall Shells, Int. J. Mech. Sci. Vol.30, No.3/4, 1988, pp.249 - 261.
- 4) 十河, 宇治橋, 松本, 足立, 機論, 63-605, A編(1997-1), 147.
- 5) Abramowicz, W. and Jones, N., Dynamic Axial Crushing of Circular Tubes, International Journal of Impact Engineering, Vol.2, No.3, 1984, pp.263-281.
- 6) Toi, Y., Yuge, K. and Obata, K., Finite Element Crushing Analysis of Structural Components and Experimental Validations, SAE paper 871246, 1987.
- 7) 荻原, 津田, 佐藤, 機論, 55-514, A編(1989-6), 1407.
- 8) 北川, 荻原, 鳥垣, 機論, 58-552, A編(1992-8), 1430.
- 9) Belingardi, G. and Avalle, M., Investigation on the Crushing of Circular Tubes: Theoretical Model and Experimental Validation, AMD - Vol. 210 / BED - Vol.30, Crashworthiness and Occupant Protection in Transportation Systems, ASME 1995, pp.129-141.
- 10) 柏村ほか4名, 機論, 62-603, A編(1996), 2422.
- 11) 田口, 新版 実験計画法, 丸善株式会社, 1962.