

(31) 逆解析による地盤熱定数と熱伝導の推定

ESTIMATION OF THE HEAT CONDUCTION AND PARAMETERS BY BACK ANALYSIS

須藤 敦史*・三上 隆**
Atsushi SUTOH and Takashi MIKAMI

*博士(工学) (株) 地崎工業 技術開発部主任研究員(〒105 東京都港区西新橋2-23-1)

**工博 北海道大学教授 工学部土木工学科(〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

In this study consists of the following two topics, one is a basic consideration on the extended Kalman filter in parameter identification problems of road tunnel, and the other is estimated for a heat conduction in tunnel-ground from analysis with identified parameters.

In the former study, the extended Kalman filter which was incorporated with the one-dimensional finite element heat analysis in order to identify unknown heat parameters in tunnel-ground.

In the latter one, the estimated tunnel-ground temperatures from identified parameters, compared with the observed temperatures of actual tunnel-ground.

Key Words: heat conduction, parameter Identification, extended kalman filter, finite element method

1. はじめに

寒冷地に施工される道路トンネルは、冬期間に凍害を受ける危険性が高く¹⁾、冬期間における地山の凍結防止のために新設トンネルでは一次覆工と二次覆工の間に断熱材を施工している。

断熱材の設計厚は入力値(トンネル内の最低気温)やトンネル周辺の地山熱定数(熱伝導率・熱容量)の推定精度に依存するが、以下の理由により合理的な断熱材の設計が行われていないのが現状である。

(1) 計画地点の気温推定は難しく、さらにトンネル内の最低気温の推定は困難である。

(2) 地山や覆工コンクリートの熱定数・熱容量は不均質性を示すため、その正確な推定は難しい。

そこで、本研究では断熱材設計の基礎資料を得ることを目的として、空間的なばらつきや観測誤差を考慮した逆解析により、トンネル周辺地山のマクロ的な熱定数の推定を行った。

まず、一次元非定常熱伝導の有限要素解析における熱伝導率・熱容量を拡張カルマンフィルタの状態量とし、それらの推定を一般国道37号豊浦町礼文華トンネルの温度観測値で行っている。次に、推定値による数値解析で再現した温度履歴と実際の温度観測値とを比較し、推定した熱伝導率・熱容量の妥当性と熱伝達率の季節変化や熱の流れ状況等の考察を行っている。

2. 非定常熱伝導問題の解析

(1) 熱伝導解析の基本方程式

熱の移動解析には基本的に3つの基本式、すなわち(1)熱伝導、(2)熱伝達、(3)熱放射を考えなければならないが、トンネル周辺地山において夏期はトンネル内空側、冬期には地山から熱の移動が生じるため、本解析では内空側の空気層と覆工コンクリート表面の熱伝達および覆工コンクリートと地山の熱伝導を考える。

加えて、トンネルにおいて地山や断熱材、覆工コンクリートの温度履歴は三次元問題として取り扱うべきであるが、

解析を簡略化するために一次元問題として考える。

一次元トンネルの温度分布 $T(x, t)$ を支配する非定常熱伝導方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$a^2: \text{温度伝播率}, a^2 = \frac{k}{\rho c},$$

k : 熱伝導率(kcal/m・h・°C), ρ : 比熱(kcal/kg・°C)

c : 密度(kg/m³), ρc : 熱容量(kcal/m³・°C)

上式の境界条件はトンネル内空側と地山側でそれぞれ以下となる。

$$q = \alpha(T - T_0) \quad (2. a)$$

$$T = T_m \quad (2. b)$$

q : 熱流束(kcal/h), α : 熱伝達係数(kcal/m・h・°C)

ここで、 T_0 はトンネル内空側の空気層において変化する温度である。また、 T_m は地山の境界点における温度履歴であり、地山の深度 l_m を十分に大きくとれば、 T_m はトンネル施工箇所における年平均気温に一致するため、地山深度 l_m を半無限体、覆工コンクリート境界面での温度が年周期変動($\sin pt$, $p = 2\pi/(365 \times 24)$)をするものとし、温度変動の振幅が表面の1%以下に減衰する深度を年平均気温 T_m の深度 l_m としている²⁾。

$$l_m = 243.16 \sqrt{k_m(\rho c)_m} \quad (3)$$

k_m : 地山熱伝導率, ρc_m : 地山熱容量

(2) 一次元非定常熱伝導方程式の離散化

空間に対する離散化には有限要素法を採用し、要素内の温度分布は線形的に変化すると仮定する。ここで、解析対象における全体の熱伝導に関する有限要素式は、次式のようなマトリクス方程式で表現できる。

$$[C]\left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\} + [K]\{T\} = \{F\} \quad (4)$$

$\{T\}^T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$: 全体の節点温度ベクトル
(n : 全節点数), $\{F\}$: 熱流束ベクトル
[C]: 熱容量マトリクス, [K]: 熱伝導マトリクス

また, 各要素の熱容量マトリクス $[C_e]$ と熱伝導マトリクス $[K_e]$ は以下で与えられる.

$$[C_e] = \frac{(\rho c)_e l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5. a)$$

$$[K_e] = \frac{k_e}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad (5. b)$$

ただし, α フィックス e は各要素における熱定数および要素長さに関する諸量を表し, 熱伝導マトリクス $[K_e]$ の右辺第二項はトンネル内の空気層に接する要素のみに有効となる. また, 各要素の熱流束ベクトル $\{F_e\}$ においても, トンネル内空側に接する要素を除いて零ベクトルとなる.

$$\{F_e\} = \begin{Bmatrix} \alpha T_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

次に未知・既知節点温度に関する各マトリクス, ベクトルにサフィックス u, k を付けて区別すると, 式(4)は次式となる.

$$\begin{bmatrix} C_{uu} & C_{uk} \\ C_{ku} & C_{kk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T_u}{\partial t} \\ \frac{\partial T_k}{\partial t} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uk} \\ K_{ku} & K_{kk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_u \\ T_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_u \\ F_k \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$\{T_u\}$: 未知節点温度, $\{T_k\}$: 既知節点温度

ここで, 地山側の温度が規定される境界条件式(2. b)と内空側の空気とトンネル壁面の熱伝達条件式(2. a)を考慮すると, マトリクス方程式は次式のように変更され時間方向に積分すれば全要素の未知温度が求められる.

$$[C_{uu}]\left\{\frac{\partial T_u}{\partial t}\right\} + [K_{uu}]\{T_u\} = \{P_u\} \quad (8)$$

$$\{P_u\} = \{F_u\} - [C_{uk}]\left\{\frac{\partial T_k}{\partial t}\right\} - [K_{kk}]\{T_k\} \quad (9)$$

次に時間に対する離散化はCrank-Nicolson法を採用し, 時間刻み幅を Δt とすると漸化式(10)が得られる.

$$\begin{aligned} \left[\frac{[K_{uu}]}{2} + \frac{[C_{uu}]}{\Delta t} \right] \{T_u\}_{N+1} &= \left[\frac{[C_{uu}]}{\Delta t} - \frac{[K_{uu}]}{2} \right] \{T_u\}_N \\ &+ \frac{1}{2} \{ \{P_u\}_{N+1} + \{P_u\}_N \}, N = 0, \Delta t, 1 \cdot \Delta t, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Δt : 時間刻み

ここで, 上式右辺は既知であるため, 初期条件と境界条件が与えられれば, 未知節点の温度履歴が求められる.

3. 地山熱定数(熱伝導率・熱容量)の同定

(1) 非定常熱伝導方程式と拡張カルマンフィルタの組み合わせ

拡張カルマンフィルタ³⁾は, 観測値を確率量の実現値としてとらえ, 状態量と観測量に含まれるノイズのガウス性を仮

定した逐次適合型の最小自乗法である.

そこで熱伝導解析における地山熱伝導率 k_e と熱容量 $(\rho c)_e$ を状態量とし, これらが定常性を示すものとする, 拡張カルマンフィルタの状態方程式は式(11)のように変更される.

$$X(t_{k+1}|t_k) = [I]X(t_k|t_k) + w t_k \quad (11)$$

ここで熱伝導の有限要素方程式(10)において一部の節点 n_1 の温度履歴が観測されるものとする, 観測方程式は以下のように熱伝導の有限要素法で表せる.

$$Y t_k = T t_k + v t_k = h(X t_k) + v t_k \quad (12)$$

$$h(X t_k) = \{T_u\}_{N+1}^n \quad (13)$$

n_1 : 観測節点数($n_1 < n$)

$$\begin{aligned} \therefore \{T_u\}_{N+1} &= \left[\frac{[K_{uu}]}{2} + \frac{[C_{uu}]}{\Delta t} \right]^{-1} \left(\left[\frac{[C_{uu}]}{\Delta t} - \frac{[K_{uu}]}{2} \right] \{T_u\}_{N+1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \{ \{P_u\}_{N+1} + \{P_u\}_N \} \right) \end{aligned}$$

また, 拡張カルマンフィルタでは観測方程式を推定値において偏微分した変換行列(接線勾配) $M\{t_k; \hat{X}(t_k|t_{k-1})\}$ が必要となるが, 式(12)は熱伝導の有限要素法で構成されており, 加えて各要素の熱定数は熱容量マトリクス $[C_e]$ と熱伝導マトリクス $[K_e]$ の中にある. したがって, 変換行列を算出する手順は煩雑となるため, 差分近似を用いて変換行列を求める⁴⁾.

これにより, 拡張カルマンフィルタと有限要素法による地山要素の熱伝導率 k_e と熱容量 $(\rho c)_e$ の推定が容易となる.

(2) 収束性向上のためのアルゴリズム修正

拡張カルマンフィルタにおいて推定値が不安定になる主要因として, (1) 非線形観測方程式を線形化する誤差と(2) 推定誤差が残っていても推定誤差共分散行列 $P(t_{k+1}|t_k)$ の値が小さくなる点が挙げられる.

そこで, これらの要因を抑制するために式(14)に示すように, 各ステップで推定誤差共分散行列に対して重み W を乗ずる操作を導入したEK-WLI法⁶⁾を用いる.

$$P(t_{k+1}|t_k) = W \cdot P(t_k|t_k) \quad (14)$$

W : 重み ($W > 1$)

この操作を行うことで観測方程式の線形化による推定誤差を減少することができ, かつ誤差共分散行列の値が W 倍に修正されるため, 収束速度が向上する.

ここで, 拡張カルマンフィルタによる最適推定値は, 事前情報(第1項)と事後情報(第2項)より構成される目的関数 θ を最小化する問題となる⁷⁾. これは推定誤差と観測誤差の相互バランスにより最適値を求めていると言える.

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2} \{ (\hat{X} t_k - \bar{X})^T P^{-1} (\hat{X} t_k - \bar{X}) \\ &\quad + [Y t_k - h(\hat{X} t_k)]^T R^{-1} [Y t_k - h(\hat{X} t_k)] \} \end{aligned} \quad (15)$$

θ : 目的関数(拡張カルマンフィルタ)

$\bar{X}$: 未知量の平均値(真値)

$Y t_k$: 観測値, $h(\hat{X} t_k)$: 推定観測値

P : 未知量の推定誤差共分散マトリクス

R : 観測誤差の分散マトリクス

しかし、地盤や岩盤では各調査・試験の際に用いる試験体は亀裂の無いものを用いる場合が多く、加えて得られる値は観測誤差を含むため、地山のマシ的な性質を示すことは希である。そこで初期推定誤差(第1項)の影響を少なくすれば、安定した推定値が得られかつ収束性も向上する。EK-WLI法は推定誤差共分散行列に重みを乗ずるため、初期推定(事前情報)誤差の影響を解消し、観測情報を重視した推定を行っている。したがって、解析において目的関数 θ の右辺第1項を小さく評価し、第2項目の観測値により推定値を求める最尤法 θ_1 (16)に移行していると言える。

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \{ [Yt_k - h(\hat{X}t_k)]^T R^{-1} [Yt_k - h(\hat{X}t_k)] \} \quad (16)$$

θ_1 : 目的関数(最尤法)

4. 実観測値による地山熱定数の同定

覆工コンクリートと地山の有限要素法による熱伝導解析により熱伝導率 k と熱容量(ρc)を同定する問題を、礼文華トンネルで得られた温度履歴により実施するが、本トンネルは断熱材の施工されていないため、Fig. 1に示すように領域を6(要素分割数72)分割した解析モデルを用いる。

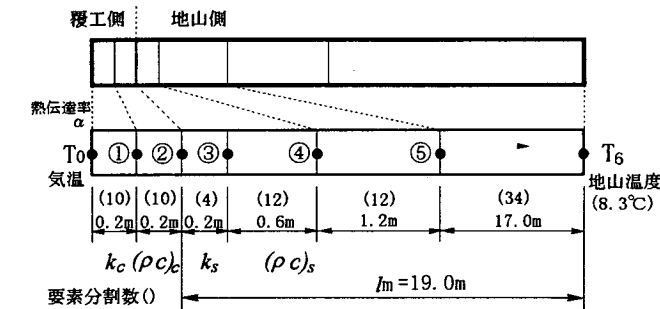


Fig.1 解析モデルと温度観測点

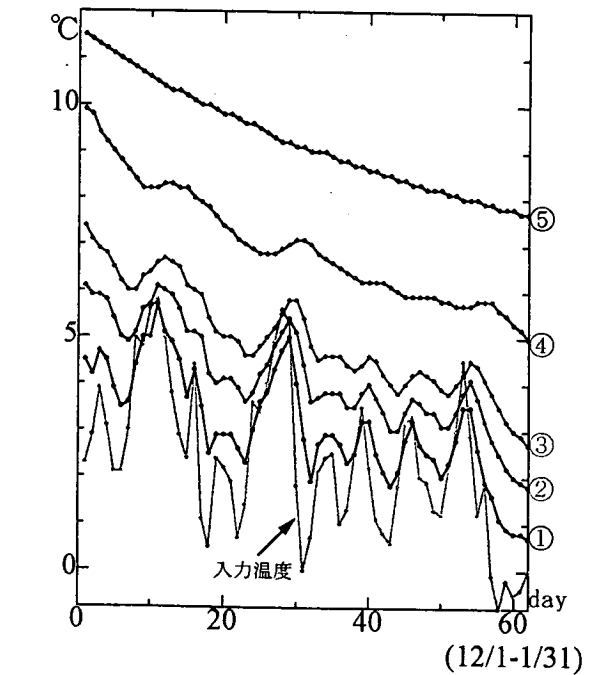


Fig.2(a) 観測温度履歴(冬期間)

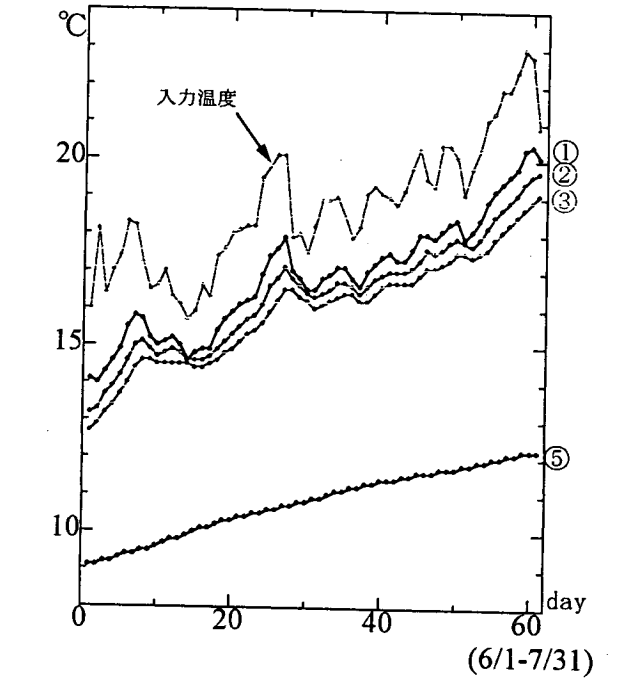


Fig.2(b) 観測温度履歴(夏期間)

加えて、冬期・夏期間に観測された温度履歴をFig. 2 (a), (b)に示す。また解析においてトンネル内空側の温度 T_0 は観測気温、地山の境界深度は $l_m = 19.0m$ 、定常温度は施工箇所の平均気温 $T_6 = T_m(8.3^{\circ}C)$ としている。

(1) 熱伝達率 α の影響と熱定数の推定値

トンネル内空側の温度として覆工コンクリート表面温度を観測している。しかし、実際の熱移動は、内空側の空気層と覆工コンクリート表面への熱伝達により行われる。

そこで、熱伝達率 α の推定値に対する影響の検討を行う。加えて夏期では覆工コンクリートの湿度・含水状態により、熱伝導率が変化すると予想されるため、覆工の熱伝導率の設定値を $(k)_c = 1.0 \sim 2.0$ に変化させた熱伝導率・熱容量の推定結果をTable 1に示す。

Table 1 熱伝達係数による同定値

熱伝達率\同定値・残差	熱伝導率(k)s	熱容量(ρc)s	mP(残差)	
Winter 覆工(ρc)c=400 (k)c=1.0	5	1.0	280	10.64
	10	1.0	340	4.18
	20	1.1	380	2.83
	50	1.1	400	1.87
	100	1.1	410	1.67
	∞	1.1	420	1.56
Summer 覆工(ρc)c=400 (k)c=1.0	5	1.1	360	10.45
	8	1.1	420	7.45
	10	1.1	450	7.20
(k)c=1.5	5	1.2	460	5.73
	8	1.3	570	5.14
	10	1.3	610	5.64
(k)c=2.0	5	1.2	540	3.71
	8	1.4	680	4.49
	10	1.4	750	5.86

ここで、推定値の評価には式(17)の再現温度と観測温度の残差を評価関数 P としている。

$$P=\frac{1}{mn_1}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{n_1}(T_{ij}-T_{ij}^*)^2 \tag{17}$$

m :データ数(日), n_1 :観測点数
 T :再現温度, T^* :観測温度

Table 1より、冬期では覆工への熱伝達率を大きく設定するにしたがい残差 mP は小さくなっている。
 また、夏期では覆工の熱伝導率を大きく設定(冬期に比べて)し、かつ小さい熱伝達率を用いた解析の残差 mP は小さいが、覆工コンクリートの熱伝導率は $k_c=1.0\sim 1.2$ が安定している。このことより、冬期ではトンネル内を乾燥した風が吹いており、夏期ではトンネル内の空気層は湿度が高くかつ風はあまり強くないことが推測される。
 したがって、安定した地山の熱伝導率と熱容量の推定を行うには、観測を行う季節やその環境により熱伝達率 α や覆工の熱伝導率を設定しなければならない
 ここで、冬期、夏期における熱伝導率・熱容量の推定値および熱伝達率をTable 2に示し、加えて温度再現値と観測履歴の比較をFig. 3(a), (b)に示す。

Table 2 熱伝導率・熱容量の同定値

熱伝達率\同定値・残差		熱伝導率(k)s	熱容量(ρc)s	mP (残差)
Winter 覆工(ρc)c=400 (k)c=1.0	∞	1.1	420	1.56
Summer 覆工(ρc)c=400 (k)c=1.0~1.5	5 8	1.1 1.2	420 460	5.73 7.45

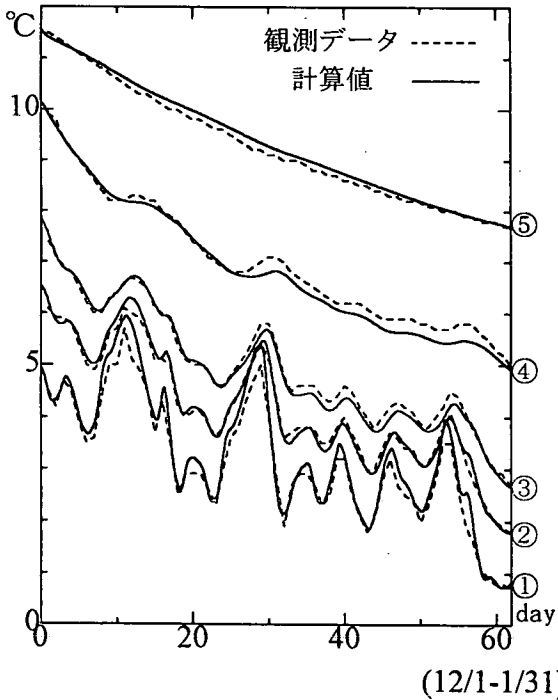


Fig. 3(a) 冬期再現値($\alpha=\infty, (k)_c=1.0, (\rho c)_c=400$)

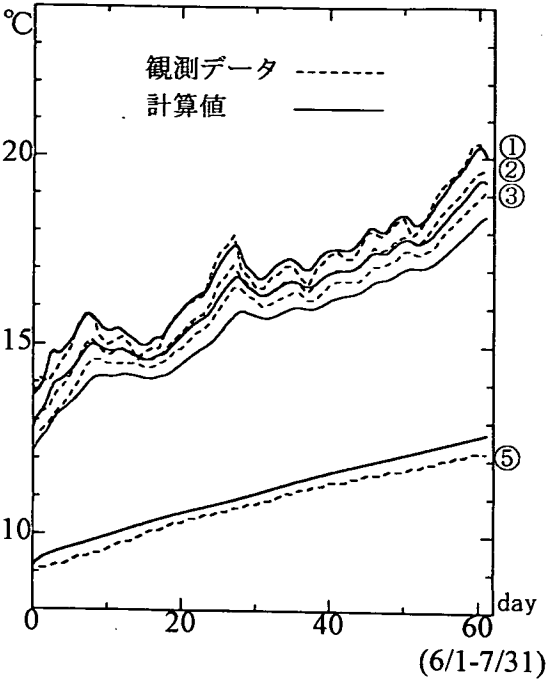


Fig. 3(b) 夏期再現値($\alpha=5, (k)_c=1.5, (\rho c)_c=400$)

(2) 地山2層モデルによる熱定数の同定

前節までは地山を1層と仮定して熱伝導率・熱容量の推定を行ったが、境界部付近は掘削に伴う損傷や長期の凍害などにより変状し、熱特性が境界部付近と深部では異なっている可能性が考えられる。
 そこで正確な解析には実際の状況に則した解析モデルを用いることが必要となるため、異なる熱定数を有す

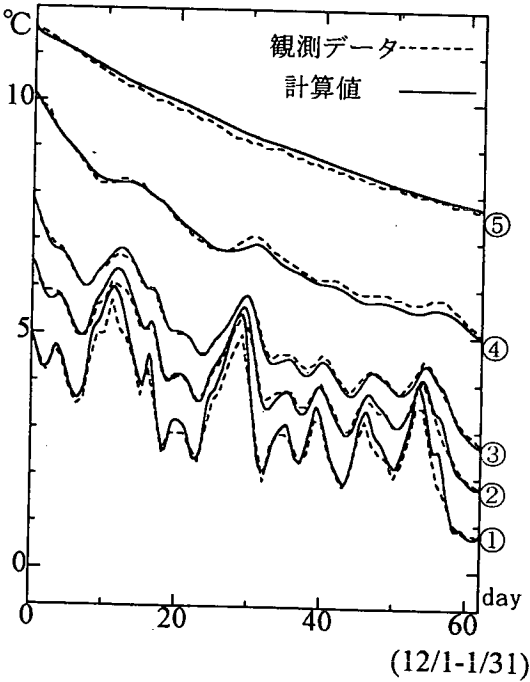


Fig.4(a) 地山2層モデルによる再現値(冬期)

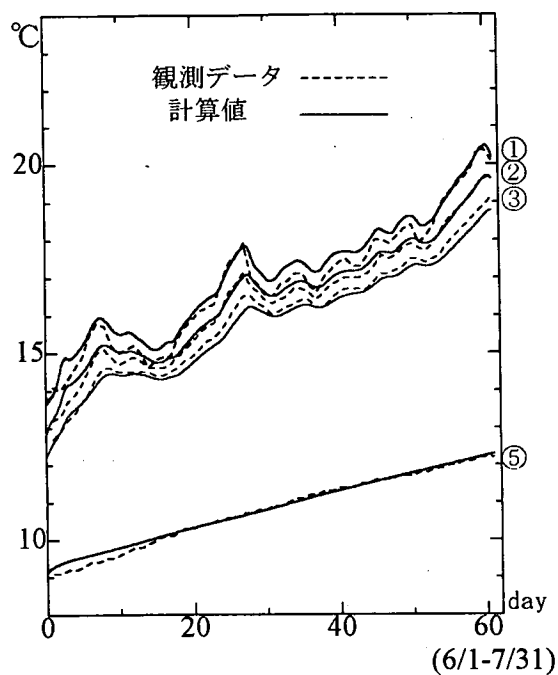


Fig. 4(b) 地山2層モデルによる再現値(夏期)

る2層モデルとし、それぞれの熱伝導率・熱容量(未知量計4個)の同定を行った。なお、境界面の深度は覆工背面より0.5(m), 1.0(m)としている。ここで、地山を2層とした場合の熱伝導率・熱容量の推定結果をTable 3に示す。

Table 3 地山2層モデルによる同定値

境界(m) \ 同定値・残差	熱伝導率(k) s	熱容量(ρc) s	mP (残差)
Winter 覆工(ρc) $c=400$ (k) $c=1.0$ $\alpha=\infty$	0.5 (1層目) 1.1 (2層目) 1.2	310 450	1.37
	1.0 (1層目) 1.2 (2層目) 1.5	290 480	1.32
Summer 覆工(ρc) $c=400$ (k) $c=1.5$ $\alpha=5$	0.5 (1層目) 1.2 (2層目) 0.9	330 510	2.72
	1.0 (1層目) 1.1 (2層目) 0.6	530 400	3.23

Table 3より、2層目(深部層)における熱伝導率・熱容量の推定値は、地山1層目の推定値に近い値を示しており、加えて残差も小さい値を示している。

したがって、地山は0.5m~1.0m間で熱特性は変わると考えられる。また、これより力学的特性の間接的な推定への可能性を有しているが、熱特性と力学的特性との相関関係など課題は残る。ここで、層境界面0.5(m)の時の温度履歴再現値と観測値をFig. 4(a), (b)に示す。Fig. 4(a), (b)より、地山1層モデルより再現精度は良い。

(3) 覆工コンクリートの熱定数推定

断熱材の材質変化の確認を行うには、極めて短い深度に対して、しかも温度履歴が非定常に変化する区間の熱伝導解析を行わなければならない、覆工コンクリートの熱定数が解析に影響を与える可能性が生じる。

そこで、前節までに得られた地山の熱伝導率・熱伝達率を用いて、冬期データにおける覆工コンクリートの熱伝導率(k_c)・熱伝達率(ρc_c)を状態量とした推定を行い、覆

工コンクリートの熱定数が解析に与える影響を考察する。

解析結果をTable 4に示す。Table 4より、覆工コンクリートの熱伝導率・熱容量の推定には、覆工内や境界面の観測点を1点用いれば安定して求められるが、地山の熱伝導率・熱容量の推定で求めた残差より大きい値を示す。

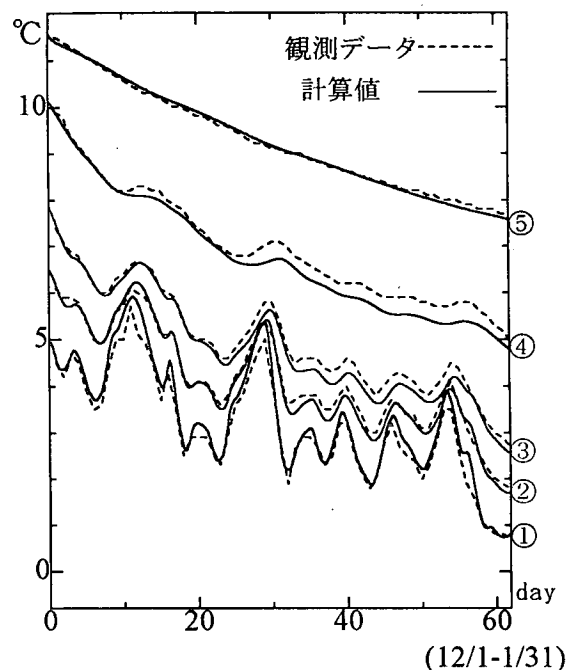


Fig.5(a) 覆工コンクリートの熱定数による再現値($\alpha=50$)

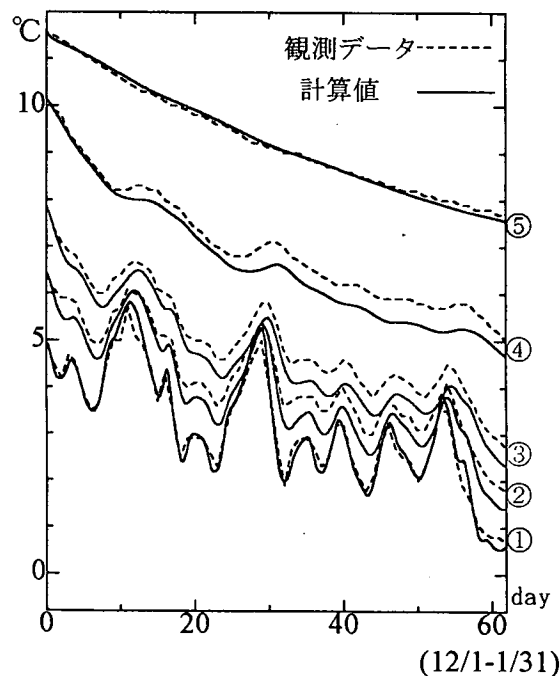


Fig.5(b) 覆工コンクリートの熱定数による再現値($\alpha=\infty$)

Table 4 覆工の熱伝導率・熱容量の同定値

観測点\同定値・残差		熱伝導率(k)c	熱容量(ρc)c	mP (残差)
地山 (ρc)s=400 (k)s=1.1 $\alpha=50$	①②③④⑤	1.1	420	2.20
	① (覆工内)	1.1	430	2.20
	② (境界面)	1.2	530	3.19
地山 (ρc)s=420 (k)s=1.1 $\alpha=50$	①②③④⑤	1.3	580	4.97
	① (覆工内)	1.3	610	4.89
	② (境界面)	1.3	550	5.07

ここで温度履歴再現値と観測値をFig. 5(a), (b)に示す。

5. 結 論

寒冷地道路トンネルの断熱材設計における基礎資料を得ることを目的として、本解析では周辺地山や覆工コンクリートの熱伝導率・熱容量の推定や推定した以外のパラメータが解析に与える影響を調べた結果、以下に示す事項が得られた。

- (1) 拡張カルマンフィルタと有限要素法の熱伝導解析により地山の熱伝導率・熱容量の推定が行える。
- (2) 覆工コンクリートへの熱伝達率や覆工コンクリートの熱伝導率

の設定には注意が必要である。

(3) 多層地山モデルによる複数の熱伝導率・熱容量の推定が可能であり、地山の力学的特性を間接的に推測できる可能性を有している。

参考文献

- 1) 坂本稔, 川北稔, 五十嵐敏彦: 道路トンネルの変状実態-北海道の場合-, トンネルと地下, 第20巻5号, pp.31~35, 1989.
- 2) 芳村仁, 三上隆, 小山田欣裕: 寒冷地道路トンネルの地山温解析 (非定常熱伝導解析), 土木学会北海道支部論文報告集, 昭和63年度, pp.109-112, 1988.
- 3) A.H.Jazwinski: *Stochastic Process and Filtering Theory*, Academic Press, 1970.
- 4) W.G.Yeh: Review of Parameter Identification Procedures in Groundwater Hydrology (The Inverse Problem), *Water Resources Research*, 22(2), pp.95~108, 1986.
- 5) 須藤敦史, 星谷勝: EK-WLI法と有限要素法を用いた逆解析, 土木学会論文集, No.466/ I -19, pp.177~185, 1992.
- 6) 須藤敦史, 星谷勝: 拡張カルマンフィルタの基本的考察とEK-WLI法の提案, 土木学会論文集, No.437/ I -17, pp.203~211, 1991.
- 7) 地盤工学における逆解析(講座), 地盤工学会, 土と基礎, No.43-4~6, 1995.