

(21) 傾斜機能はりの最適設計

Optimal Design of Functionally Gradient Beam

石田良平*

Ryohei ISHIDA

* 工博 大阪府立大学講師 工学部航空宇宙工学科(〒599-8531 堺市学園町1-1)

Design problems of a beam with a maximum eigenfrequency of an arbitrary prescribed order are described. Two types of optimization problems are formulated and solved. The first is transverse shape optimization and the second optimization of the mixture rate distribution. In the second problem, it is assumed that the beam is made from two materials and has a uniform transverse shape. The characteristic equation with respect to the eigenfrequency is derived from the well-known Hamilton's principle and is discretized by the finite element method. For solving the optimization problems, the constructive algorithm proposed by the authors is used. The optimal transverse shape and the optimal mixture rate distribution along the beam axis are given as a piecewise linear function.

Key Words: Computational Mechanics, Optimization Algorithm, Optimal Design, Free Vibration, Finite Element Method, Constructive Algorithm

1.はじめに

構造物やそれを構成する部材の設計において、機能と形態とは密接な関係を持ち、そのような機能とそれに適合する形態の決定は設計工学上重要なことである。そのため、多くの形状最適設計に関する研究がなされている。本研究で取り上げる固有振動数に着目した最適設計問題としては、たとえば、浜田らによるものが挙げられる¹⁾。浜田らは、逆変分原理を用いて、座屈荷重および固有振動数を最大にする柱およびはりの最適形状設計や最小重量設計を行っている。

機能と形態との関係とは別に、材料にあえて不均質性を与えることによって、特定の機能を部材に与えることが考えられる。たとえば、近年話題になっている傾斜機能材料は、熱応力緩和を目的として開発された不均質材料である。

本論文では、最適設計問題として、固有振動数を最大にするための1)形状最適化問題および2)混合率分布最適化問題の二種類を扱う。特に、後者においては、はりとは二種類の材料を混合することによって作られるものとし、はりの横形状の変化はない。最適混合率分布は、固有振動数を最大にするためのはりの軸方向の材料混合率の分布として得られる。混合率分布の最適化においては、はりの支持条件によっては、形状最適化に比べて固有振動数の増加が期待できる場合があると考えられる。

なお、固有振動数の解析には有限要素法を用い、

最適化アルゴリズムとしては、著者らによって提案された機能生成アルゴリズムを適用する²⁻⁵⁾。形状最適化問題では、断面形状は円形とし、形状変化は区分的に線形であるものとする。また、質量一定の条件を規定する。一方、混合率分布最適化問題では、混合率の変化は区分的に線形であるものとし、物性値は混合則に従うものと仮定する。なお、基準のはりとして二種類の材料を均一に混合したものを考える。

2.解析

2.1 FEM定式化

長さ L のオイラーはりを考える。はりの内部減衰がないものとする。運動エネルギー K および弾性ひずみエネルギー U は、それぞれ、次式で与えられる。

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (1)$$

ここで、 y ははりのたわみ、 x ははりの軸方向座標、 t は時間、 ρ は密度、 L ははりの長さ、 E はヤング率、 A および I は、それぞれ、はりの断面積および断面二次モーメントである。

はりの振動問題に対して、Hamiltonの原理は次のように書くことができる。

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (U - K) dt = 0 \quad (2)$$

式(2)に式(1)を代入し、仮想変位 δy について $t=t_0$ および $t=t_1$ で $\delta y=0$ に注意して演算を行えば、次式が得られる。

$$\int_{t_0}^{t_1} \rho A \delta y \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx dt + \delta \int_{t_0}^{t_1} \int_{l_{i-1}}^{l_i} \frac{1}{2} EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx dt = 0 \quad (3)$$

離散系方程式を得るために、式(3)の積分を N 個の積分に分割する。各積分区間を $l_{i-1} \leq x_i \leq l_i$ ($i=1, 2, \dots, N$) とし、区間幅を $l_i - l_{i-1} = l (=L/N)$ とする。 i 番目の積分区間での ρA および EI を、それぞれ、 $(\rho A)_i$ および $(EI)_i$ で表せば、式(3)は次のように変形される。

$$\sum_{i=1}^N \int_{l_{i-1}}^{l_i} (\rho A)_i \delta y_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} dx dt + \sum_{i=1}^N \int_{l_{i-1}}^{l_i} (EI)_i \delta \left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial x^2} \right) dx dt = 0 \quad (4)$$

ここで、 $(\rho A)_i$ および $(EI)_i$ は共に x の関数である。さらに、局所座標 ξ ($0 \leq \xi \leq 1$) を導入し、

$$x_i = l_{i-1} + l\xi, \quad y_i(x, t) = l Y_i(\xi) e^{j\omega t}, \quad j = \sqrt{-1} \quad (5)$$

とすれば、式(4)は次式のように書きかえられる。

$$\frac{L^4}{N^4} \omega^2 \sum_{i=1}^N \int_0^1 (\delta Y_i) (\rho A)_i Y_i d\xi - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \delta \left(\frac{d^2 Y_i}{d\xi^2} \right) (EI)_i \left(\frac{d^2 Y_i}{d\xi^2} \right) d\xi = 0 \quad (6)$$

さて、 $(\rho A)_i$ および $(EI)_i$ を次のように表す。

$$(\rho A)_i = a_i (\rho A)_0, \quad (EI)_i = r_i (EI)_0, \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (7)$$

ここで、 $(\rho A)_0$ および $(EI)_0$ は、それぞれ、質量および剛性の基準量であり、定数である。 a_i および r_i を、本論文では、それぞれ、質量比および剛性比と呼ぶ。これらは共に ξ の関数である。なお、これらの関数は形状最適化と混合率分布最適化とで異なるが、ここでは簡単のために、式(7)の形で表現するととどめ、具体的な関数形については後述する。

いま、 $Y_i(\xi)$ を三次関数

$$Y_i(\xi) = \{H(\xi)\} \cdot \{b\}_i^T,$$

$$\{H(\xi)\} = \{1 \ \xi \ \xi^2 \ \xi^3\}^T, \quad \{b\}_i = \{b_{0i} \ b_{1i} \ b_{2i} \ b_{3i}\}^T \quad (8)$$

で近似し、さらに要素両端の無次元化されたたわみおよびたわみ角から構成される一般化変位ベクトル $\{\bar{Y}_i\}$ を導入する。ベクトル $\{\bar{Y}_i\}$ の定義およびこれとベクトル $\{b\}_i$ との関係は、次式で表される。

$$\{b\}_i = [C^{-1}] \{\bar{Y}_i\}, \quad \{\bar{Y}_i\} = \{Y_{i-1} \ \theta_{i-1} \ Y_i \ \theta_i\}^T. \quad (9)$$

ここで、 θ はたわみ角である。また、マトリックス $[C^{-1}]$ は、ベクトル $\{b\}_i$ の一般化変位ベクトル

$\{\bar{Y}_i\}$ への変換マトリックスであるが、具体的な形は省略する。

式(6)に式(7)~(9)を用い、Castigliagnoの第二定理を用いれば、次式が得られる。

$$\frac{(\rho A)_0}{(EI)_0} L^4 \omega^2 \sum_{i=1}^N [m_i] \{\bar{Y}_i\} - \sum_{i=1}^N [k_i] \{\bar{Y}_i\} = 0 \quad (10)$$

式(10)のマトリックス $[m_i]$ および $[k_i]$ は、それぞれ、次式から計算される。

$$[m_i] = \frac{1}{N^4} [C^{-1}]^T \int_0^1 a_i(\xi) l H(\xi) l^T H(\xi) d\xi [C^{-1}] \quad (11)$$

$$[k_i] = [C^{-1}]^T \int_0^1 r_i(\xi) l H''(\xi) l^T H''(\xi) d\xi [C^{-1}] \quad (12)$$

ここで、プライム (') は変数 ξ に関する微分演算を表す。

さらに、固有値 Ω^2 を

$$\Omega^2 = \frac{(\rho A)_0}{(EI)_0} L^4 \omega^2 \quad (13)$$

で定義すれば、式(10)は、

$$[K] \{\bar{Y}\} - \Omega^2 [M] \{\bar{Y}\} = 0 \quad (14)$$

となる。ここで、 $[K]$ および $[M]$ は、それぞれ、全要素にわたって合成された全体剛性マトリックスおよび全体質量マトリックスである。また、ベクトル $\{\bar{Y}\}$ は全要素にわたって合成された一般化変位ベクトルである。

式(14)が非自明解を持つ条件から、特性方程式

$$|[K] - \Omega^2 [M]| = 0 \quad (15)$$

が得られる。

2.2 質量比と剛性比

式(11)および(12)のマトリックスを具体的に計算するためには、前節で導入した質量比 $a_i(\xi)$ および剛性比 $r_i(\xi)$ の関数形を決定する必要がある。ここでは、これらを決定するための手続きを、形状最適化問題および混合率分布最適化問題それぞれについて述べる。なお、前者では材質の変化はなく、後者では形状の変化はない。

1) 形状最適化問題

いま、柱の断面形状が円形であるとし、 i 番目の小部分における直径を $d_i(\xi)$ とおけば、その部分の断面積 $A_i(\xi)$ および断面二次モーメント $I_i(\xi)$ は、それぞれ、次式で表される。

$$A_i(\xi) = \frac{\pi}{4} d_i^2(\xi), \quad I_i(\xi) = \frac{\pi}{64} d_i^4(\xi). \quad (16)$$

さらに、基準となるはりの直径を d_0 とおき、直径 $d_i(\xi)$ を、Fig.1に示すように、その要素に相当するはりの小部分の両端の直径を用いて、次式のような区分的に線形な関数で表現する。

$$d_i(\xi) = d_0 [D_{i-1} + (D_i - D_{i-1}) \xi] \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (17)$$

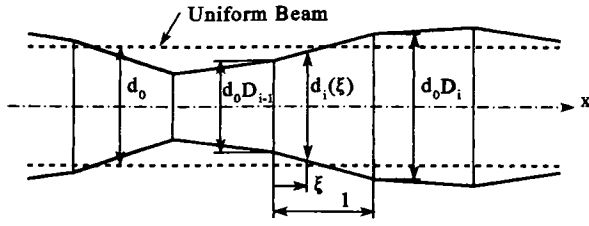


Fig.1 Variation of beam diameter

ここで、 D_{i-1} および D_i は、それぞれ、小部分の両端における直径の基準直径 d_0 に対する比率であり、直径の無次元量を表す。

さて、断面積および断面二次モーメントの基準値を基準直径 d_0 を用いて、それぞれ、 $A_0 = \pi d_0^2/4$ および $I_0 = \pi d_0^4/64$ で定めれば、 $a_i(\xi)$ および $r_i(\xi)$ は、それぞれ、次式で表すことができる。

$$a_i(\xi) = [D_{i-1} + (D_i - D_{i-1})\xi]^2 \quad (18)$$

$$r_i(\xi) = [D_{i-1} + (D_i - D_{i-1})\xi]^4 \quad (19)$$

式(11)および(12)のマトリックス $[m_i]$ および $[k_i]$ は式(18)および(19)を用いて計算されるが、これらに関する詳細は省略する。なお、この場合、式(13)は次のように書き直される。

$$\Omega^2 = \frac{\rho_0 A_0}{EI_0} L^4 \omega^2 \quad (20)$$

2) 混合率分布最適化問題

いま、二種類の材料を混合してはりを作るものとし、それらの混合率を軸方向に変化させるものとする。このとき、次のような複合材料の複合則に相当する関係式によって、各要素に相当するはりの小部分の密度およびヤング率を規定する。

$$\begin{aligned} \rho_i &= \rho_{II} v_i(\xi) + \rho_I (1 - v_i(\xi)), \\ E_i &= E_{II} v_i(\xi) + E_I (1 - v_i(\xi)). \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 ρ_i および ρ_{II} は二つの材料の密度、 E および E_{II} はヤング率、 $v_i(\xi)$ は i 番目の要素に相当するはりの小部分における材料IIの混合率の変化を表し、 $0 \leq v_i(\xi) \leq 1$ である。 $v_i(\xi)$ を、Fig.2に示すように、各小部分の両端の混合率 V_{i-1} および V_i を用いて、次のような線形関数で表現する。

$$v_i(\xi) = V_{i-1} + (V_i - V_{i-1})\xi \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (22)$$

ただし、 $0 \leq V_i \leq 1$ ($i=0,1,2,\dots,N$) である。

基準となる密度およびヤング率を材料Iのそれらにとれば、 $a_i(\xi)$ および $r_i(\xi)$ は、それぞれ、

$$a_i(\xi) = v_i(\xi) \bar{\rho} + (1 - v_i(\xi)) \rho_I \quad (23)$$

$$r_i(\xi) = v_i(\xi) \bar{E} + (1 - v_i(\xi)) E_I \quad (24)$$

となる。ただし、 $\bar{E} = E_{II}/E_I$ 、 $\bar{\rho} = \rho_{II}/\rho_I$ である。

式(11)および(12)のマトリックス $[m_i]$ および $[k_i]$ は式(23)および(24)を用いて計算されるが、これらに関

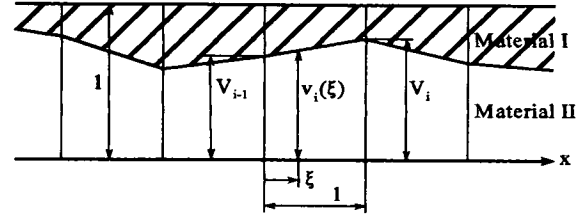


Fig.2 Variation of volume fraction

する詳細は省略する。なお、この場合、式(13)は次のように書き直される。

$$\Omega^2 = \frac{\rho_I A}{E_I I} L^4 \omega^2 \quad (25)$$

2.3 最適化問題の定式化

ここでは、形状最適化問題および混合率分布最適化問題の場合のそれぞれに関する制約条件について述べ、最適化問題を書き下す。

1) 形状最適化問題

制約条件として、質量一定の条件を規定する。はりの材料の密度が一定であるので、質量一定の条件は体積一定の条件と同じである。 N 個の有限要素に対応するはりの N 個の小部分の断面積比は式(18)で与えられている。このとき、はりの体積は、各小部分の無次元長さが1であることから、

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} d_0^2 l \sum_{i=1}^N \int_0^1 [D_{i-1} + (D_i - D_{i-1})\xi]^2 d\xi &= \\ &= A_0 l \sum_{i=1}^N \int_0^1 a_i(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (26)$$

で与えられる。一様はりの場合、 $D_i = 1$ ($i=0,1,\dots,N$) より、 $a_i(\xi) = 1$ であるので、上式を $A_0 l$ で除したものを無次元体積と定義すれば、一様はりの無次元体積は N で与えられる。したがって、これと同じ体積を持つ横形状が変化するはりに対しては、次式が成立する必要がある。

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 a_i(\xi) d\xi = N \quad (27)$$

以上のことから、形状最適化問題は次のように記述される。

Find $D_i > 0$ ($i=0,1,2,\dots,N$)

such that maximize ω_n

subject to $\sum_{i=1}^N \int_0^1 a_i(\xi) d\xi = N$

2) 混合率分布最適化問題

ここでは、制約条件として、混合量一定条件を規定する。はり全体の材料IIの混合量は、各小部分の無次元長さが1であることから、

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 v_i(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^N \int_0^1 [V_{i-1} + (V_i - V_{i-1})\xi] d\xi \quad (28)$$

で与えられる。材料IIが一様に混合された(以下、一様混合と呼ぶ)場合、式(28)の全ての V_i は同じ値を持つ。これを平均混合率と呼び、 p で表すと、式(28)から、材料IIの混合量は Np になることがわかる。したがって、平均混合率を保ち、かつ、混合率が軸に沿って変化するのはりの場合、次式が成立する必要があることがわかる。

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 v_i(\xi) d\xi = Np \quad (29)$$

以上のことから、混合率分布最適化問題は次のように記述される。

$$\begin{aligned} &\text{Find} && 0 \leq V_i \leq 1 \quad (i=0,1,2,\dots,N) \\ &\text{such that} && \text{maximize } \omega_n \\ &\text{subject to} && \sum_{i=1}^N \int_0^1 v_i(\xi) d\xi = Np \end{aligned}$$

3. 数値計算例

数値計算にあたり、有限要素分割数を $N=20$ とし、最大化する固有振動数を基準モードの固有振動数とする。はりの支持条件として、固定/自由(C/F)、単純支持/単純支持(S/S)、固定/単純支持(C/S)および固定/固定(C/C)の四種類を規定する。最適化アルゴリズムとしては、著者らによって提案された機能生成アルゴリズムを適用する。アルゴリズムに関する詳細については文献2)-5)を、特に形状変更のルールについては文献5)を、それぞれ、参照されたい。なお、混合率分布最適化における混合率の変更ルールは、文献5)に準ずる。

以下では、形状最適化問題および混合率分布最適化問題それぞれについて数値計算結果を示す。

3.1 形状最適化問題

Fig.3-6に、得られた最適形状とそれに対応する基準化された固有関数 y を四次まで示す。なお、Fig.3およびFig.5において、 $i=0$ ははりの固定端を表している。また、Table 1に、得られた固有振動数(ω_{1opt})の、一様はりのそれ(ω_{1uni})に対する比を示す。また、文献1)の結果も示されている。

Table 1から、S/SおよびC/Sについては、文献1)の結果と一致していることがわかる。この結果から、本最適解は妥当なものと思われる。C/FおよびC/Cの場合、1)の結果より小さい値になっている。

Table 1 Value of $\omega_{1opt}/\omega_{1uni}$

	C/F	S/S	C/S	C/C
$\omega_{1opt}/\omega_{1uni}$	4.872	1.066	1.473	3.429
Ref.(1)	6.434	1.066	1.473	4.139

C/Fの場合、文献1)では自由端側の直径が零であるが、本解析の場合、直径が零であることを許していない。また、C/Cの場合、文献1)では、はり中央で直径が零である形状が得られているが、本解析では零ではない。そのため、C/Fの場合自由端に、C/Cの場合はりの中央に、それぞれ、質量が残る、固有振動数が低くなっているものと考えられる。

3.2 混合率分布最適化問題

混合率分布最適化問題では、 $\bar{p}=0.1\sim 10.0$ および $\bar{E}=0.1\sim 10.0$ の範囲で計算を行った。また、平均混合率 p を0.5とした。

Fig.7は、一様混合の場合の固有振動数の変化を、 $\bar{p}=\bar{E}=1.0$ (材料Iのみ)の場合のそれに対する比(乗数)で表している。この場合の固有振動数は、任意の次数について、 $\bar{p}=\bar{E}=1.0$ の場合のそれを ω_n^0 とすれば、

$$\omega_n = \sqrt{\frac{p\bar{E}+(1-p)}{p\bar{p}+(1-p)}} \omega_n^0 \quad (30)$$

で表されるので、 $\bar{p}=\bar{E}$ の場合、固有振動数は変化

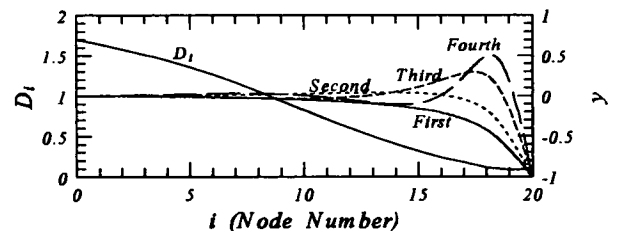


Fig.3 Optimal shape and vibration form (C/F)

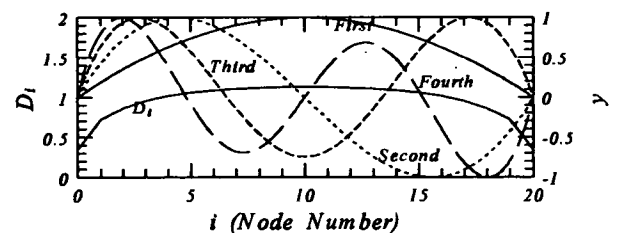


Fig.4 Optimal shape and vibration form (S/S)

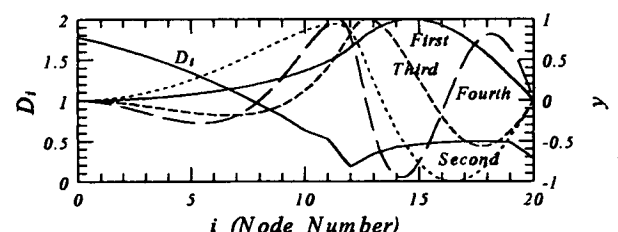


Fig.5 Optimal shape and vibration form (C/S)

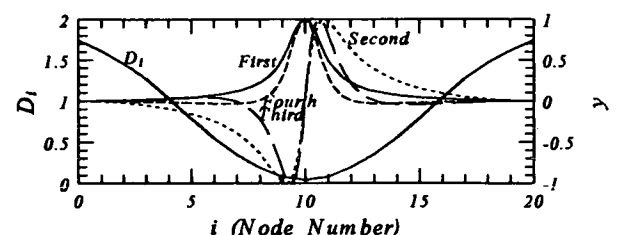


Fig.6 Optimal shape and vibration form (C/C)

しない。一方、密度比 $\bar{\rho} > \bar{E}$ の場合、固有振動数は小さくなり、逆に、 $\bar{\rho} < \bar{E}$ の場合、固有振動数は大きくなることわかる。

Fig.8-11に、基準モードの固有振動数についての最適化の結果を、 $\bar{\rho} = \bar{E} = 1.0$ の場合のそれに対する比で示す。S/Sの場合を除いて、 $\bar{\rho} = \bar{E}$ の場合でも、最適化の効果が認められ、一様混合の場合よりも固有振動数が大きくなっていることがわかる。特に、C/Fの場合、最適化によって固有振動数を大きくすることのできる密度比およびヤング率比の範囲が広い。一方、S/S条件の場合、 $\bar{\rho} = \bar{E}$ の場合は最適化できないことがわかる。

最適形状と比較すると、最適形状の固有振動数は、Table 1から、S/S条件およびC/S条件で、それぞれ、一様はりの1.066倍および1.473倍であり、これ以上の増大は期待できない。しかし、 $\bar{\rho} < \bar{E}$ を満

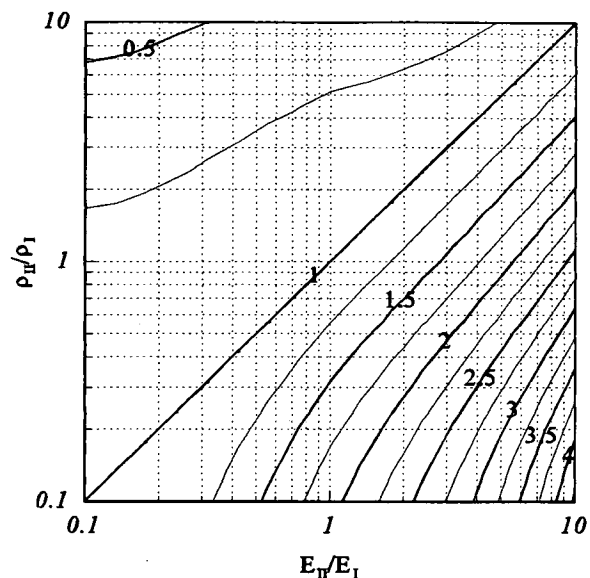


Fig.9 Contour of multiplier (S/S)

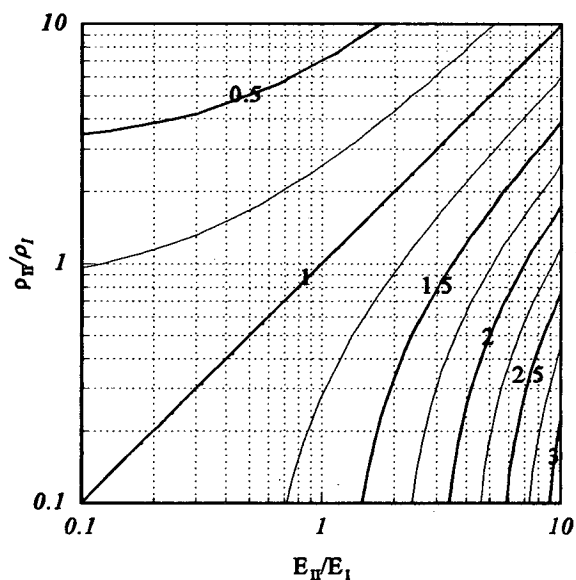


Fig.7 Contour of multiplier (Uniform mixture)

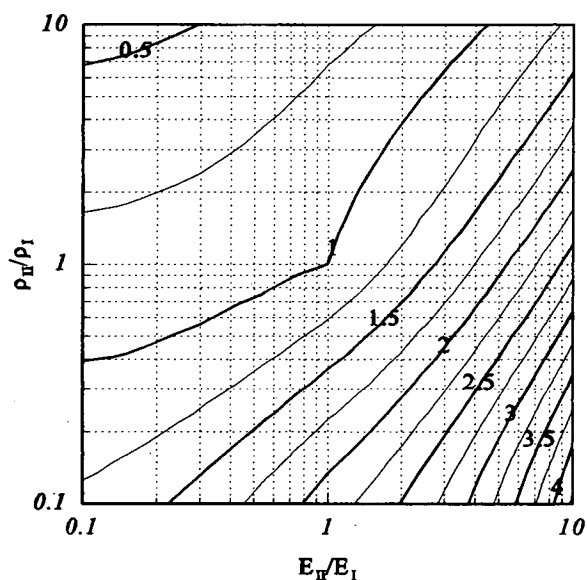


Fig.10 Contour of multiplier (C/S)

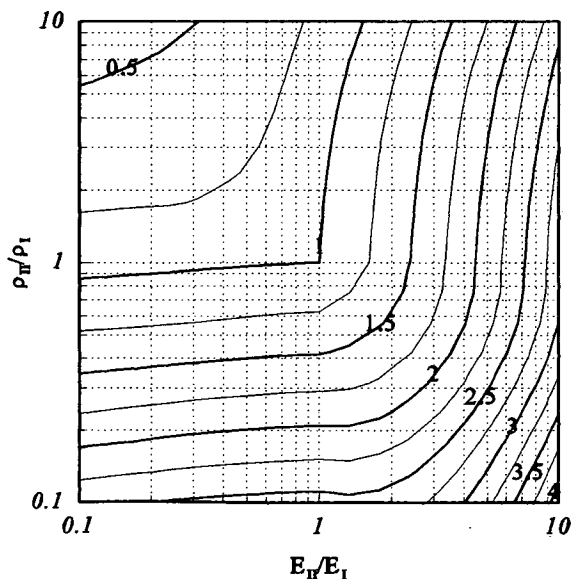


Fig.8 Contour of multiplier (C/F)

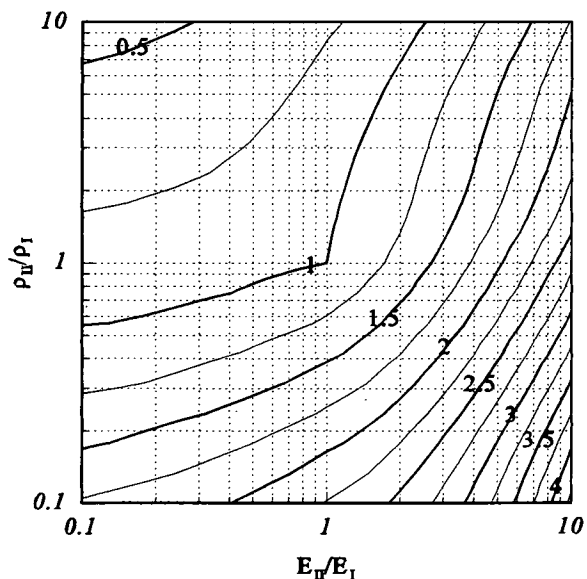


Fig.11 Contour of multiplier (C/C)

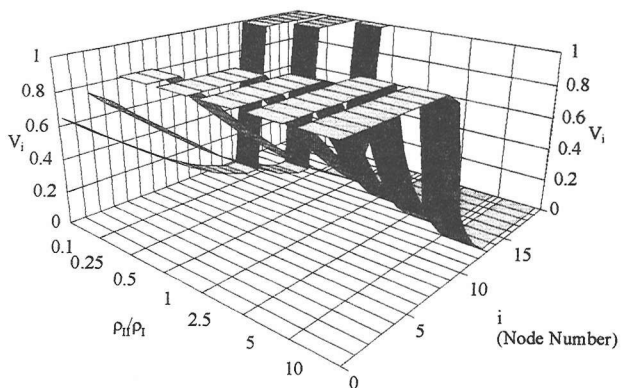


Fig.12 Optimal mixture rate distribution (C/F)

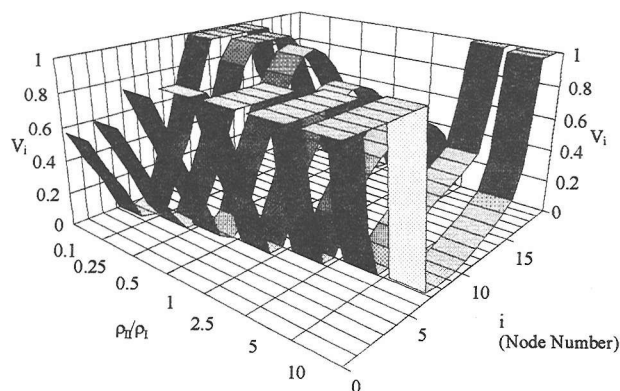


Fig.14 Optimal mixture rate distribution (C/S)

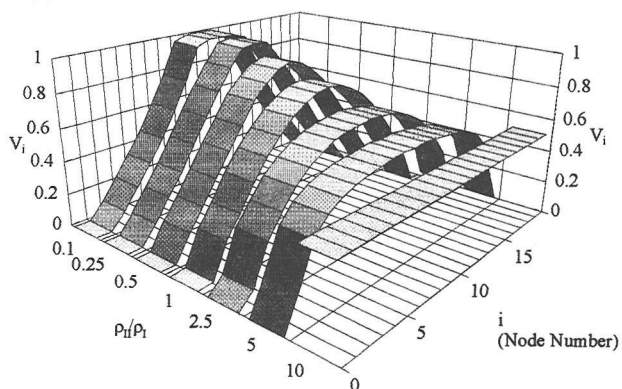


Fig.13 Optimal mixture rate distribution (S/S)

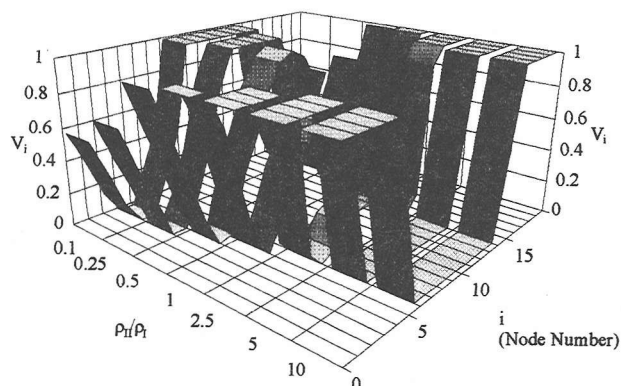


Fig.15 Optimal mixture rate distribution (C/C)

足する材料を用い、材料混合率分布を最適化することによって、大きな固有振動数を得ることが可能であることがわかる。特に、S/S条件において、有効である。なお、これらは、平均混合率の値によっても変化することが考えられる。この点については今後の課題である。

Fig.12-15に、 $\bar{E}=10.0$ の場合の材料IIの最適混合率分布を示す。これらの図から、S/S条件を除くすべての支持条件について、C/F条件でははりの自由端で、C/SおよびC/C条件でははりの中央部で、それぞれ、密度の小さい材料の混合率が高いことがわかる。これは、先に示した最適形状と同じ傾向がみられる。一方、S/S条件では、最適形状においては、はりの中央部で太くなるため、中央部で質量および剛性が共に大きい形状であるのに対して、最適混合率分布では、密度比の低い材料の混合率が中央部で高くなっていることがわかる。これは、S/S条件では、剛性が確保できれば、はり中央部の質量を小さくしたほうが、固有振動数を高めるうえで有利であることを示している。

4.結言

以下に、本論文で得られた結果をまとめておく。

4.1 形状最適化問題

- 1)最適形状として、文献1)の形状に近い形状が得られた。
- 2)C/F条件およびC/C条件に対して、文献1)より低い値が得られた。これは、C/F条件の場合自由端で、C/C条件の場合はり中央で、それぞれ、質量が残る形状になっているためである。

4.2 混合率分布最適化

- 1) $\bar{\rho}=\rho_{II}/\rho_I=0.1\sim 10.0$ 、 $\bar{E}=E_{II}/E_I=0.1\sim 10.0$ の範囲で最適混合率分布が得られた。
- 2)混合率分布最適化は、S/SおよびC/S条件に対して、有利である。
- 3)得られた最適混合率分布は、S/S条件を除いて、最適形状と同じ傾向がみられる。
- 4)S/S条件を除いて、 $\bar{\rho}=\bar{E}$ の場合でも最適化は有効である。
- 5)S/S条件では、剛性が確保できれば、はり中央部の質量が小さいほうが有利である。

参考文献

- 1) 浜田・瀬口・多田、機論A, 46-402, pp.187-196 (1980)
- 2) 石田・杉山、機論A, 59-566, pp.2460-2465 (1993)
- 3) 石田・杉山・柳、機論A, 60-579, pp.2672-2677 (1994)
- 4) Ishida,R. and Sugiyama,Y., AIAA J., 33-3 pp. 401- 406 (1995)
- 5) 石田・杉山、機論A, 63-605, pp.195-200 (1997)