

(33) 構造物の非線形動特性のロバスト同定法

ROBUST IDENTIFICATION OF DYNAMIC CHARACTERISTIC OF NONLINEAR STRUCTURE SYSTEM

佐藤 忠信* 竹井 賢二**

Tadanobu SATO Kenji TAKEI

The use of the extended Kalman filter is often effective to identify the structural parameters of nonlinear system with degrading characteristics. When observation data to be used for identification contain extreme values and noise, identified parameters become sometimes meaningless because the identified structural parameters are strongly affected by the extreme values contained in observation data even if we use the Kalman filter. By adapting a robust estimation technique to the extended Kalman filter algorithm, we can eliminate the effect of incorrect signals on the identified parameters. The numerical examples give satisfactory results to identify dynamic properties of nonlinear structural systems. In addition, by multiplying a fading coefficient to older measurement and combining with the recursive identification algorithm, we develop a time-marching identification algorithm.

*Key Words : identification problem, extended Kalman filter,
recursive least-squares method, robust estimation*

1. 概説

構造物の地震時における挙動を知るためには、構造物の動特性を正確に把握する必要がある。カルマンフィルター理論は、従来より構造物の動特性を支配するパラメータを同定する有効な手法として用いられてきた。¹⁾ カルマンフィルターは信号に含まれる雑音の影響を効率良く消去してくれるが、観測値に異常値が混入している場合には、物理的に無意味なパラメータ値が同定されることが多い。そこで本研究では、ロバスト推定法²⁾をカルマンフィルターのアルゴリズムに組み込み、異常値の影響を自動的に削除できる同定手法を提案し、これにより振動系の動特性の同定を行なった。また、非線形系を時変システムと見なして構造同定法を展開するために、重み付き漸化型最小二乗法^{3) 4)}を用いて、過去の情報の影響を減退させる同定手法についても考察を加える。なお以下では、ロバスト推定法を組み込んだカルマンフィルターをロバストカルマンフィルターと呼ぶ。

* 工博 京都大学防災研究所 教授 (〒611 京都府宇治市五ヶ庄)

** 京都大学大学院 学生 (〒606 京都市左京区吉田本町)

2. ロバストカルマンフィルター

2.1 理論概要

最尤推定法を基盤とするカルマンフィルター理論にあっては、観測値は全て真値の近傍にある信頼できるデータとして扱われる。しかし、実際の観測値には、観測計器の誤動作や観測時の予期せぬ外乱等によりノイズや異常値が混入していると考えられる。こうしたデータの中から信頼できるデータのみを取り出して、パラメータの同定を行なうのが、ロバストカルマンフィルターの考え方である。図1にロバストカルマンフィルターのアルゴリズムを示す。図中の()内の数字は以下に現れる式番号を示している。ここにシステムは状態遷移系と観測系に二分される。今、システムの状態量を表すベクトルを $\mathbf{x}$ として、まず、時刻 t における状態量の最尤推定値 $\hat{\mathbf{x}}_{t-1}$ より時刻 t における状態量の事前推定値 $\bar{\mathbf{x}}_t$ を求める。

$$\bar{\mathbf{x}}_t = \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{t-1}) + \omega_{t-1} \quad (1)$$

ここで、 ω_{t-1} はシステムノイズである。次に、得られた事前推定値を用いて計算される観測値と実際の観測値 $\mathbf{z}_t$ との残差

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{z}_t - h(\bar{\mathbf{x}}_t) \approx \mathbf{z}_t - \mathbf{H}_{t,k}(\bar{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x}_{t,k}) - h(\mathbf{x}_{t,k}) \quad (2)$$

の大きさに対応して決定される図2のような重みを用いることにより、最尤推定を行なう。ただし観測方程式が非線形であることより、観測値の推定値は、任意の値 $\mathbf{x}_{t,k}$ のまわりにテーラー展開した式により求めている。ちなみに式中の k は各時刻でのローカルな繰り返し回数を表している。なお、グラフの横軸は残差、縦軸はそのとき残差に乗ずる重みである。具体的に最尤推定値は次式により、各時刻で繰り返し計算を行い、時系列に沿って計算を進めた結果として得られる。

$$\mathbf{x}_{t,k} = \bar{\mathbf{x}}_t + \mathbf{K}_{t,k}^* \{ \mathbf{z}_t - \mathbf{H}_{t,k}(\bar{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x}_{t,k}) - h(\mathbf{x}_{t,k}) \} \quad (3)$$

ただし、 $\mathbf{x}_{t,k}$ の初期値としては事前推定量 $\bar{\mathbf{x}}_t$ を用いる。ここに、 $\mathbf{K}_{t,k}^*$ はカルマンゲイン行列で次式で与えられる。

$$\mathbf{K}_{t,k}^* = \mathbf{M}_t \mathbf{H}_{t,k}^T (\mathbf{H}_{t,k} \mathbf{M}_t \mathbf{H}_{t,k}^T + \mathbf{R}_t \mathbf{W}_t^{-1})^{-1} \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{M}_t$ は事前推定値の誤差共分散行列、 $\mathbf{R}_t$ は残差の共分散行列、 $\mathbf{W}_t$ は対角要素のみ値を持つ重み行列である。つまり、残差が小さいときには、その観測値は信頼できるとして通常的最尤推定を行なう。また、残差が大きい場合には、観測値は異常であるとしてパラメータの更新を行なわない。そして、その中間においては、残差に応じて連続的に変化する重み乗することで、残差の大きい場合の同定に与える影響を軽減する。以上のようにして、観測量の計算値の信頼性を優先して、残差により観測値を診断しながら同定を進めることで、異常値の影響を自動的に削除できる。なお、 $\mathbf{W}_t = \mathbf{I}$ とすれば、通常の拡張カルマンフィルターとなる。

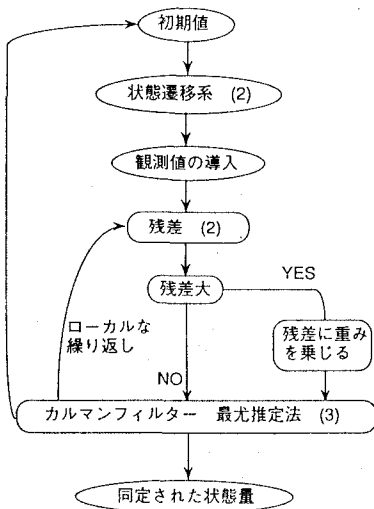


図1 ロバストカルマンフィルターの流れ図

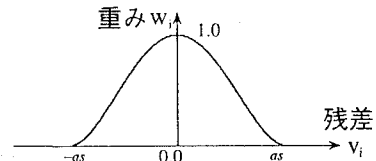


図2 重み関数

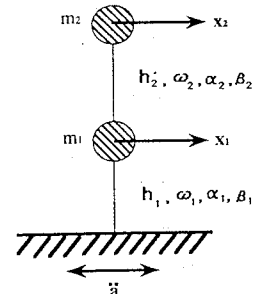


図3 2自由度構造モデル

2.2 数値解析

今、図3示すような2自由度のモデルを考える。ただし、各層間の復元力特性は次式のVERSATILEモデルで表されるとする。

$$\dot{z}_i = k_i \dot{u}_i - \alpha_i |\dot{u}_i| |z_i|^{n_i-1} z_i - \beta_i \dot{u}_i |z_i|^{n_i} \quad (5)$$

ここに、 z_i 及び u_i はそれぞれ i 番目の層の復元力及び層間変位である。また、 α_i 、 β_i 及び n_i は、非線形パラメータである。ここでは、同定精度検証のために、あらかじめパラメータ値を与えた振動系で応答計算を行ない、その波形にノイズ及び異常値を混入したものを観測波形として用いる。応答計算波形は図4のようになる。今、これに異常値を混入した、図5に示すような地面に対する相対変位と絶対加速度応答が観測値として得られているものとする。ここで通常の拡張カルマンフィルターで同定を進めると、異常測定値に引っ張られる形でパラメータ値が極端な値に向かい、途中で計算不能となる。次に、2.1で提案したアルゴリズムに従って同定を行なう。同定のターゲットは図3に示した各層の等価減衰定数、等価固有円振動数、および非線形パラメータ α_i と β_i である。尚、異常値判定の基準となる残差の許容幅（図2中の as ）としては、応答計算波形の各応答の最大値の10%程度を目安にしている。図6にロバストカルマンフィルターによる同定の時刻歴を示す。図中で、実線は各パラメータの同定の時刻歴を、破線は真値を表している。各パラメータとも真値近傍に収束していると言える。また、同定された復元力特性と厳密解の比較を図7に示す。履歴曲線はよく再現されている。

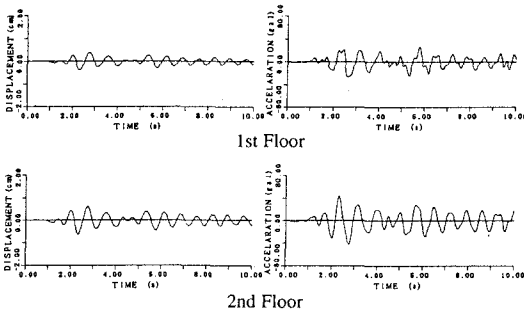


図4 応答計算波形

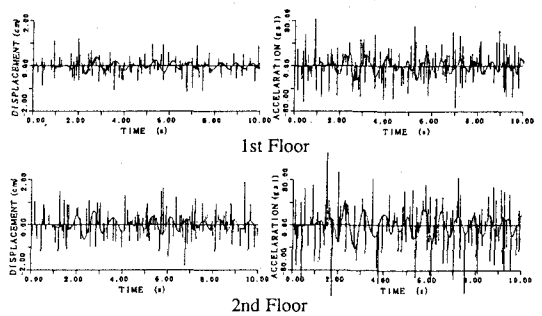


図5 異常測定値を含む観測波形

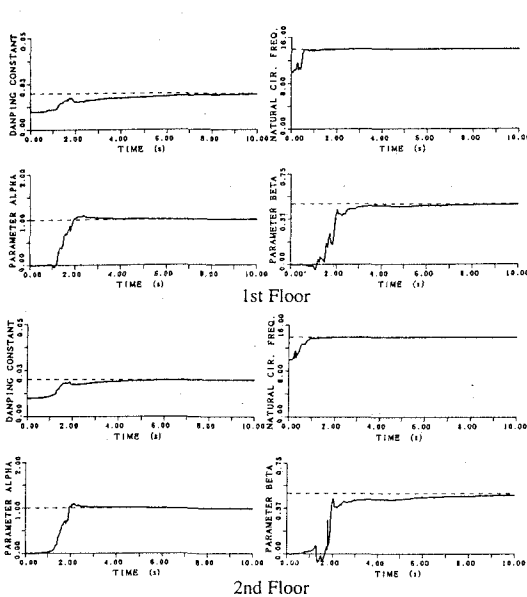


図6 パラメータ値同定の時刻歴

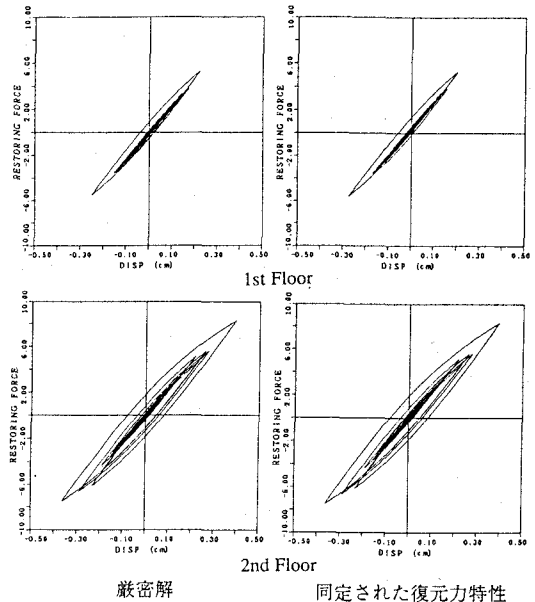


図7 履歴曲線の比較

3. 漸化型最小二乗法

3.1 理論概要

剛性や減衰特性が時間とともに変動するような時変振動系の同定では、動特性の非定常性を考慮できるアルゴリズムが必要である。しかし、最小二乗法やカルマンフィルターの理論においては、同定値は得られた観測値の全てを満足するような平均的な値となり、動特性の変化に追随することができない。そこで、現時点の動特性の情報を含んでいない古い観測値の同定結果に及ぼす影響が小さくなるように、過去の観測記録に重み $\beta_{t,i}$ を乗じた以下のような評価関数を考える。

$$J_t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t \beta_{t,i} \{z_i - H_i f(x_{t-1}, \theta)\}^T R_i^{-1} \{z_i - H_i f(x_{t-1}, \theta)\} \quad (6)$$

ここに、 z 、 x 、 θ はそれぞれ観測、システムの状態、及び構造物の動特性を支配するパラメータのベクトルであり、 H 、 R はそれぞれ既知の観測行列、および残差の重み行列である。ここで用いた重み $\beta_{t,i}$ は $0 < \lambda_i < 1$ の積として以下の式で定義する。

$$\beta_{t,i} = \prod_{j=i+1}^t \lambda_j, \quad \beta_{t,i} = \lambda_i \beta_{t-1,i}, \quad \beta_{t,i} = 1 \quad (7)$$

こうして、過去の観測値は指数関数的にその価値を減じることで、過去の記録の影響を減退させることが可能である。式 (6) を最小にするパラメータ値は次式で与えられる。

$$\hat{\theta}_t = \Theta_t^{-1} \xi_t \quad (8)$$

ただし、関数 f はパラメータ θ に関して非線形であるから、各時刻について最尤値 θ_t のまわりにテーラー展開している。

$$f(x_{t-1}, \theta) \approx f(x_{t-1}, \theta_t) + L_t(\theta - \theta_t) \quad (9)$$

ここで、

$$\Theta_t = \sum_{i=1}^t \beta_{t,i} (H_i L_i)^T R_i^{-1} (H_i L_i) \quad (10)$$

$$\xi_t = \sum_{i=1}^t \beta_{t,i} (H_i L_i)^T R_i^{-1} \{y_i - H_i f(x_{t-1}, \theta_t) - (H_i L_i) \theta_t\} \quad (11)$$

ただ、各時刻で式 (8) を解いていくと計算量が膨大になり、時刻歴で計算するには実際のでない。今、式 (9)、(10) に式 (7) の関係を用いると以下の式が導ける。ただし、時刻 t では最尤値は未知であるので、任意の値 $\theta_{t,k}$ のまわりにテーラー展開を行うとする。

$$\Theta_t = \lambda_t \Theta_{t-1} + (H_t L_{t,k})^T R_t^{-1} (H_t L_{t,k}) \quad (12)$$

$$\xi_t = \lambda_t \xi_{t-1} + (H_t L_{t,k})^T R_t^{-1} \{y_t - H_t f(x_{t-1}, \theta_{t,k}) - (H_t L_{t,k}) \theta_{t,k}\} \quad (13)$$

式 (12)、(13) を式 (8) に代入して整理すると、以下のような θ に関する漸化式を得る。次式により各時刻に繰り返し計算を行い、その収束値を最尤値 $\hat{\theta}_t$ として、同定を進めていく。

$$\theta_{t,k+1} = \hat{\theta}_{t-1} + \Theta_{t,k}^{-1} (H_t L_{t,k})^T R_t^{-1} \{y_t - H_t f(x_{t-1}, \theta_{t,k}) - (H_t L_{t,k}) (\hat{\theta}_{t-1} - \theta_{t,k})\} \quad (14)$$

式 (12)、(13) より明らかなように、 λ_t の存在により、パラメータの修正量が小さくなるのを抑えている。また、 λ_t の定義より明らかなように、 λ_t の大きさが過去の観測値を忘却するスピードを決定している。

以上のアルゴリズムに従うと、繰り返し計算のたびに逆行列の演算が必要となり、計算時間や精度の面で問題が生じる。しかし、観測値がスカラー値で与えられる場合には逆行列の演算を要しないアルゴリズムが展開できる。今、観測値は状態量（応答変位・応答速度等）の一次結合で与えられるものと仮定して、重み付き最小二乗法の評価関数を以下のように書き換える。

$$J_t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t \beta_{t,i} \{z_i - h_i f(x_{t-1}, \theta)\}^T r_i^{-1} \{z_i - h_i f(x_{t-1}, \theta)\} \quad (15)$$

ここに、状態量の予測値はベクトルであり、以下の形式である。

$$f(\mathbf{x}_{i-1}, \theta) = \{f_1 \ \cdots \ f_n\}^T \quad (16)$$

したがって、 h_i は観測値に対する各状態量の係数ベクトルであり、以下のように書ける。

$$\mathbf{h}_i = \{a_1 \ \cdots \ a_n\} \quad (17)$$

式(14)を最小にする θ は、観測値がベクトルの場合(上記)と同様に求められる。ここで式(12)と同様に次式が得られる。

$$\mathbf{P}_i = \Theta_i^{-1} = \{\lambda_i \Theta_{i-1} + (\mathbf{h}_i \mathbf{L}_i)^T \mathbf{r}_i^{-1} (\mathbf{h}_i \mathbf{L}_i)\}^{-1} \quad (18)$$

ここで以下の補題を用いて変形する。

$$[\mathbf{A} + \mathbf{BCD}]^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{DA}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1}]^{-1} \mathbf{DA}^{-1} \quad (19)$$

これにより、

$$\mathbf{P}_i = \frac{1}{\lambda_i} \left\{ \mathbf{P}_{i-1} - \frac{\mathbf{P}_{i-1} (\mathbf{h}_i \mathbf{L}_i)^T (\mathbf{h}_i \mathbf{L}_i) \mathbf{P}_{i-1}}{\lambda_i \mathbf{r}_i^{-1} + (\mathbf{h}_i \mathbf{L}_i) \mathbf{P}_{i-1} (\mathbf{h}_i \mathbf{L}_i)^T} \right\} \quad (20)$$

以上よりまとめて、繰り返し計算の式を得る。

$$\theta_{i,k+1} = \hat{\theta}_{i-1} + \frac{\mathbf{P}_{i-1} (\mathbf{h}_i \mathbf{L}_i)^T}{\lambda_i \mathbf{r}_i^{-1} + (\mathbf{h}_i \mathbf{L}_i) \mathbf{P}_{i-1} (\mathbf{h}_i \mathbf{L}_i)^T} \{y_i - \mathbf{h}_i f(\mathbf{x}_{i-1}, \theta_{i,k}) - (\mathbf{h}_i \mathbf{L}_i) (\hat{\theta}_{i-1} - \theta_{i,k})\} \quad (21)$$

3.2 数値解析

3.1で展開した理論に基づき、線形1自由度系で数値解析を行った。まずパラメータ値は時間に対して一定であるとする時不変システムについて考える。あらかじめパラメータ値として、減衰定数2%、固有円振動数10.0rad/secを与え、応答計算を行った結果である、図8のような応答変位及び応答速度が同時に観測されるとする。漸化型最小二乗法を用いた、減衰定数と固有円振動数の同定の時刻歴を図9に示す。図中の実線は同定値の時刻歴を、破線は真値を表している。双方とも真値に収束している。ただし、ここでは過去のデータの忘却の度合を示す λ の値は1.0とした。次に λ の値を変化させて、同定の時刻歴の比較を行った。 λ の値が小さいほど初期のパラメータ値の変動は大きい、安定した同定結果を得ている。これは過去の観測値から得られた事前情報に比して、現時刻の観測に重きをおいているために、各時刻の観測によるパラメータ値の修正量が大きくなるためである。

また、動特性を支配するパラメータ値が時々刻々と変化する時変システムについて、同定を行った。今、図11のように減衰定数が10秒間で2%から3%に変化すると仮定する。観測波形とする応答計算波形は図8と見掛け上ほぼ同じである。図12は減衰定数の時間変動の同定結果である。 λ を小さくすることで、初期の同定に若干の乱れがあるものの、小さな動特性の変化にもよく追従していることが分かる。

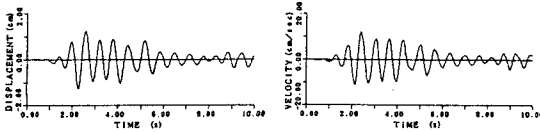


図8 応答計算波形(観測波形)

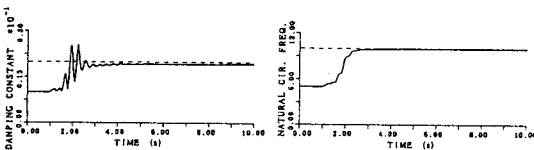


図9 パラメータ値同定の時刻歴

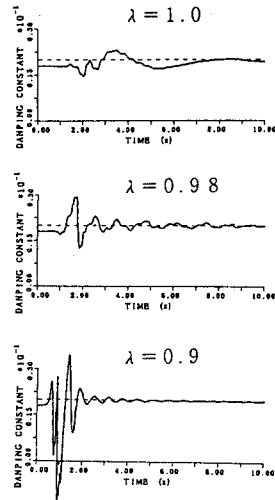


図10 パラメータ値同定の時刻歴の比較(時不変)

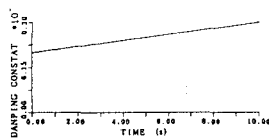


図 1.1 時系列で変化する減衰定数

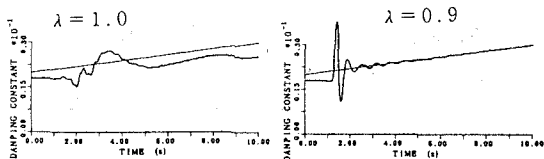


図 1.2 パラメータ値同定の時刻歴の比較 (時変)

4. まとめ

(1) 拡張カルマンフィルタにロバスト推定法を組み込むことで、観測値に異常値が混入している場合でも影響を受けずに、構造物の動特性を支配するパラメータを精度よく同定できた。その際、異常値判定の基準となる残差の許容幅を、応答計算波形の最大応答の 10% とおおかかにとっても、精度よく同定が行なわれた。

(2) 重み付き漸化型最小二乗法を用いることで、動特性の変化に追従して同定を進めることできる一例を示した。しかしながら、計算の安定のために、同定の過程で必要な状態量の最尤値を精度良く求める必要があり、その決定方法に課題を残している。

参考文献

- 1) 星谷勝・斉藤悦郎：データ解析と応用, 鹿島出版会, 1991.
- 2) 中川徹・小柳義夫：最小二乗法による実験データ解析, 東京大学出版会, 1982.
- 3) 佐藤忠信：地盤工学における逆解析, 土と基礎, No.448, pp67-72
- 4) Ljung L.: Syatem Identification, PRT Prentice Hall, 1987.