

(15) GAによるネットワークフローの最小カット探索

MINIMUM CUT DETECTION FOR NETWORK FLOW USING GA

佐藤 尚次*

Naotsugu SATO

This paper presents an application of Genetic Algorithm for minimum cut of network flow problems. Even though connectability is regarded to play important role in the performance in most categories of lifeline systems, logistical ability of transfer system often becomes serious issues under disastrous situation such as great earthquake. Theorem of minimum cut - maximum flow has been well-known basis to evaluate the capacity of system, occasionally damaged, to transfer resources. Flow allocation algorithm has been paid much attention while cut analysis has regarded to be cumbersome and less effective. However, cut flow evaluation is very easy to formulate and GA offers the possibilities of time-saving detection of their critical value. Numerical examples for simple network and rather complicated one are showing possibility and difficulty of simple GA in this sort of objectives.

Key Words: network, minimum cut, GA

1. まえがき

システム最適化の技法としてGAが、土木工学分野で用いられるようになってから、まだそれほど時間は経過していない¹⁾。しかしながらここ数年の、GAを利用した研究の飛躍的な増加、また応用対象の多様化には目をみはるものがある。

GAの、土木の応用例を構造工学分野を中心に見た場合、最適化の対象となる変数は、構造物の寸法諸元が多く、製品供給の制約などで、連続変数であってもおかしくないものがたまたま離散変数として扱い得たり、あるいは連続変数をあえて離散化して近似するようなこともある。ソルバーを全くのブラックボックスとして扱うことが出来、目的関数の偏微分（または感度解析）を強く意識しなくてよいことが利点とされる側面もあるが、従来の最適化手法の延長線上で、一定の条件が満たされたときに力を発揮する、特殊なアルゴリズムという印象をも拭えない部分がある。

一方本研究で扱うネットワークのような、トポロジカルな対象においては、連結性の表現とその変形に問題の困難さが密接に関連することが多く、またブーリアン代数が解析手法としてしばしば用いられることからわかるように、変数・解析内容が遺伝子表現と関連づけやすいところに特徴があるといえる。他方少し問題が複雑になるだけで、その論理表現のビット数が簡単に増加し、計算の手間が指数関数的に増加する。これが通常の構造最適化問題に比べ、GAの利用を強く動機付けさせる所以となっている。

* 工博 関東学院大学助教授 工学部土木工学科 (〒236 横浜市金沢区六浦町4834)

これまで土木工学の中で、ネットワークを重要な研究対象としてきたのは、交通工学を中心にした計画分野、ライフライン地震工学を中心とする構造工学分野、上下水道などの水工学・衛生工学など多岐に亘っている。なかでも計画分野は、経路選択の問題のように、交通流が人間の選択・意思決定行動に依存して動くものであって、単純なポテンシャルの差だけで流れが支配される疑似流体力学的記述が困難であること等に、特徴があるものと考えられる。計画分野の研究を概論するのは著者の力量をはるかに超えるため、ここでは経路選択の原則を明示的に組み込んで一般ネットワークを数理的に解析した動的配分理論²⁾、リンク信頼度を、リンクへの交通需要がその容量を超えない確率と定義し、流量の確率変動を考慮してその信頼度を推定する手法³⁾等を参考文献に挙げるに留める。

一方構造系で扱われる場合のネットワークは、ハードとしての性能評価に関心が集中しており、地震被害を受けた場合の要素ならびにシステム信頼性評価など、手法的にはソフトに分類されるものも多いが、あくまでも物が壊れるかどうかということに関連づけての問題意識が濃い。

ライフライン地震工学が1978年宮城県沖地震を契機に急速に関心を集め、この20年余に優れた成果を挙げたことは周知の事実である。技術的な現状は高田の成書⁴⁾に詳しいが、初期の磯山らの水供給システムに関する研究⁵⁾から近年の野田らの電話網の最適復旧問題に関する研究⁶⁾、能島らのシステム間相互連関を考慮したリスク評価の問題に関する研究⁷⁾などネットワークと関連した研究が継続的に行われている。著者らも80年代初めにこの問題に関心を持ち、文献7)に近いシステム間相互連関を考慮した問題⁸⁾や文献5)に近いネットワークの供給能力の問題⁹⁾等を扱っている。本研究の2章の定式化は文献9)の共同研究者として考案したものであるが、実用性に難ありと感じて、GAの登場をみるまで研究の継続を差し控えていたものである。

後出の図-1や図-3にネットワークの例題が示されている。図では入力点(ソース)と出力点(シンク)がそれぞれ1つであるが、複数である場合の方が一般的であり、ここでの議論は一般的な場合にも適用できる。地震時あるいは交通渋滞時のネットワーク機能の評価の考え方としては、「連結性を重視するもの」と「ネットワークを通過しうるフローまで考慮するもの」に分類されよう。ガス・水道等多くのライフラインシステム、あるいは電気通信システムでは主に連結性が問題とされている。一方交通システムや、より一般的に輸送問題(救助、避難、物流)等ではフローまで考える必要がある。通常のライフラインの信頼性問題等では連結問題を解析対象とすることが多いが、本研究では後者の、フローを含む問題に関心を寄せ、従来計算に膨大な手間を要した解析に、GAがどのように力を発揮しうるのか試みるものである。

2. 最小カットの定式化

ネットワークフローを考える問題では、通常各リンクに通過容量(流量の上限値)が付与されており、節点に入る流れの量の総和と、出る流れの量の総和は等しい(節点では渋滞なし)という条件が満足されているとき、これを「円滑な流れ」と定義する。このとき「最小カット=最大フローの定理」が成立し、カット(ソースとシンクの間の仮想切断面)を横切るリンク容量の総和の最小値に対し、必ずそれと一致する実行可能なフロー解(リンクへの流量分配)が存在し、最大値をも与える。

最適化問題として見た場合、最小カットと最大フローは互いに双対問題の関係にある。ただ最小カットが(一般に)唯一解をもつのに対し、対応する最大フロー解は多様性をもつことが多い。

最大フロー解を見出すアルゴリズムは、例えば文献10)によれば、

- ①ソースからシンクに向かう任意のパスからスタートし、そのリンクの中で最小の容量をそのパスの通過量として、その値を各リンク容量から控除、以下順次パスを代えてはこれを繰り返す、すべてのパスの中に飽和リンクが含まれるようになったら終了するもの
- ②ネットワークの双対グラフを作り、ネットワークの外側に設けた双対節点を結ぶ、最短パスを求めるもの

(双対問題としての解法)

などが知られている。

既存の施設がある段階でもっている能力を評価し、それを利用するというような種類の問題では確かに最大フロー解が重要なのであるが、長期的な設備計画の立案という面から考えれば、渋滞のボトルネックをとらえることもまた重要なのであって、最小カットのもつ情報も軽視できない。さらに大震災直後のような状況を想定するならば、種々の交通・物流ニーズに対し、交通施設自体の損害ばかりでなく、周辺構造物の被害の影響、放置車両、瓦礫・ごみなどの放置といった要因によって妨げが生じることは十分に考えられる。施設の直接被害は即時復旧は難しいと思われるが、ある場所で道を塞いでいるものを、別のある場所に移動させることは(容易ではないものの)出来ないことではない。その際、最重要なことは管理統制する命令系統であり、具体的な物質移動手段であることは論を待たないものの、クリティカルなリンクと、余裕のあるリンクを見分けるソフトもまた必要なことである。

こうした、震災復旧等の状況(優先的に修理・掃除すべきリンクの発見が重要)を念頭に置けば、解析によって求めるべきなのは、最小カットのみならず、第2、第3の準最小カットも考えるべきであり、これらにある程度共通に含まれるリンクの探索も重要であるということになるであろう。

カットを横切るリンク容量の和を、GAによる最小化に適した形で導く。ソースとシンクの間に存在するカットは、中間の節点をソース側とシンク側に分離する機能を果たしている。この分割をカットの定義に用いる。節点全体の集合を V とし、カットによって分けられる節点の部分集合とその補集合を次のように定義する。

$$V = S \cup S^{\circ} \quad \begin{array}{l} S: \text{カットによって分けられたソースと、中間節点の部分集合の和集合} \\ S^{\circ}: S \text{の補集合(シンクを含む)} \end{array} \quad (1)$$

また S に対応するカット定義ベクトル $\{A\}$ を

$$\{A\} = \{1, 1 \text{ or } 0, \dots, 1 \text{ or } 0, 0\}; \quad \begin{array}{l} S \text{に属する節点の番号の要素に} 1, S^{\circ} \text{に} 0 \end{array} \quad (2)$$

とし、ネットワークの状態を表わす容量マトリクス $[Q]$ を

$$\text{容量マトリクス } [Q] = [q_{ij}; \text{接点 } ij \text{間にリンクがあるときその容量} \\ [0 \quad : i=j, \text{またはリンクがないとき}] \quad (3)$$

で定義する。ただしこれは無向グラフの場合の表現であり、リンクに与えられた容量にあらかじめ定められた方向性があるならば、 q_{ij} は節点 i から j に向かう容量となり、 $[Q]$ は非対称となる。その場合でも次式は同様に適用できる。本研究では無向グラフを例題に選んでいる。

このとき S に対するカット容量を C とすると、 C は次の積で与えられる。

$$C = \{A\}^T [Q] \{A^{\circ}\} \quad \begin{array}{l} \{A^{\circ}\}: \{A\} \text{の補ベクトル}(0 \text{と} 1 \text{を反転させたもの}) \end{array} \quad (4)$$

以下 C を $\{A\}$ の適応度の指標とし、最小値だけでなく、第2、第3、・・・の最小値をも意識しつつ、GAを適用していく。

3. 計算例

(1) 例題-1; 比較的規模の小さいネットワーク

手始めに、図-1に示す比較的規模の小さいネットワーク(11節点、21リンク)にGAを適用した。節点1がソース、11がシンクである。データパターンを3種類与えたが、DATA1は中間部に明瞭な最小カット断面を一つ有するもの、DATA2は真の解(シンク近く)の他に、局所解(ソース近く)を与えたもの、DATA3はランダムに障害を与えたものである。カット総数 $2^9=512$ に過ぎないので、全数調査を行ってもさしたる労で

はないが、一般的な傾向を把握するために例題として選んだ。ただしリンクを重ねたために、平面ネットワークでなくなり、双対グラフを利用して解くような代案が利用できなくなって、トポロジカルな複雑さは加えられている。

図-2に最適解の収束過程の代表的なものを示した。施したGAのオペレータは至って基本的なもので、各世代の人口数21、淘汰数3、エリート保存（各世代の最良解を交叉からはずす）、突然変異確率0.01である。交叉方法としては図は1点交叉であるが、他に2点交叉も試みており、結果に殆ど差は見られなかった。こうしたパラメータの組み合わせでは非常に良好な収束状況を示しているが、人口数を10に留めると、収束が遅れるのみならず、局所解に陥って容易に脱出しない傾向が見られる。また上記のパラメータの組み合わせでも、稀に局地解に捕まることがあり、その頻度は、DATA1よりも2,3の方が大きい。問題のもっている特性が、収束状況にストレートに反映されているといえる。この結果を受け、次のやや複雑なネットワークを考えてみることにした。

(2) 例題-2；やや複雑なネットワーク

図-3に23節点、77リンクの、やや複雑なネットワークの例題を示した。各リンクの容量は表-1に示す通り。節点1がソース、23がシンクである。

この例題の特徴を一口で述べると、7層構造をなしており、リンクは上層から下層に向かうものと同一階層内での結合を担うものから成る。連結は「向う3軒両隣」に加えて、同一階層内の一つ先の節点ともつなげた。各階層間の連結は、カット容量が910~960となるようにして、それを各リンクに偏在させるように与えた。同一階層内の「水平」連結は、当初階層間リンクの容量の最小値に合わせて50を与えていた。しかしこのように「横の連結が密な」階層ネットワークでは、結局階層間のカットの最小値でシステム容量が決まってしまう、問題の性質として例題-1と差がなくなってしまう。そこであえてこの「水平」連結リンクの容量は10で統一し、階層間にまたがる（直観的表現を用

いれば「袈裟掛けの」）カットがクリティカルになるように設定した。この結果水平連結構造を複雑化したことの物理的な意味合いは著しく減じたが、一方で最適化の対象となる目的関数の構造としては、深さに大きな差のない谷を多数作り出すこととなり、「だまし問題」としての特長を高度化させることには寄与した。

この問題の総カット数は $2^{21}=2097152$ であり、念のため行った全数調査には関東学院大学情報処理センターのFUJITSU VP2100/10REで230秒を要した。最小カットは節点2, 6, 12, 18, 22と5, 11, 17, 21, 23の

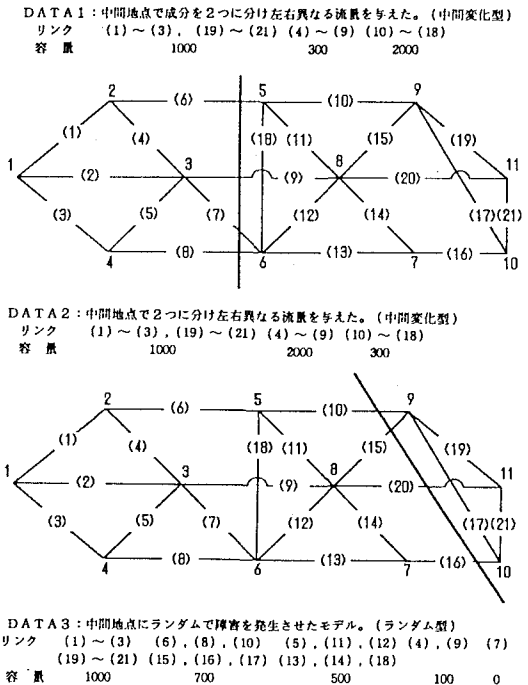


図-1 規模の小さいネットワーク

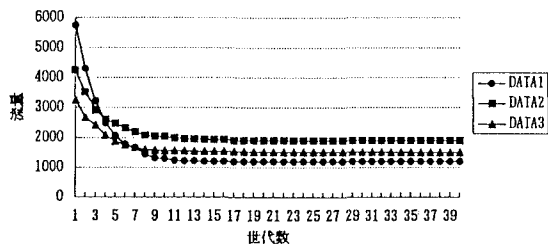


図-2 例題1の収束状況

間に存在し、カット容量は770である。対応する{A}は{1111011110
0111000110010}。また第2最小カットはシンク側に20, 21, 23を切り
離すもので、C=780、{A}={11111111111111110010}。この
他、階層間カットの900台を下回る800台のカットが数多く存在する。

図-4に、例題-1と同様の操作を施した、かなり単純なGAの
結果を示す。人口数・淘汰数・エリート保存・突然変異などは上記
と同様であり、乱数列の異なる5つのケースの違いを示した。この
図が示すものは、正解に収束したのは、5ケースのうち1つだけで、
それも図の右端、世代数だが100に近接した段階で、偶然的に、とい
うことである。この種の高度のだまし問題では、単純なGAは、比
較的簡単にだまされてしまうものようである。

図の提示は省略させて頂くが、この図の後で行った試行錯誤の結
果を述べる。まず局所解からの脱却をはかるため、人口数を増加さ
せて集団の遺伝子の多様化をはかった。その結果収束初期における
収束の速度は飛躍的に向上したが、後半部分では依然として局所解
に長く留まる傾向がみられた。式(1)のS（あるいは式(2)の{A}）
で網羅している部分集合は、ソースとシンクを1本の線で分離して
いるものばかりでなく、中間点に孤立領域をつくるようなものも含
んでいる（当然適応度は低くなる）ので、全域的には適応度はかなり
広い幅に分布しながら、真の解とだまし解はかなり狭い幅に入っ
ているため、適応度を利用した淘汰戦略が立てにくい傾向にある。
第2、第3の最小解にも関心があるため、エリート保存は行ってい
るが、エリートの遺伝子の影響が強まって、局地解に拘束される傾
向も少なからずみられた。解の変化の様子をつぶさに観察したとこ
ろでは、{A}の前半に1、後半に0が並ぶ（つまり階層間を水平に切
るカット）解に支配される傾向が強く、そこから若干1と0の交換が
ある局所解に長く留まる傾向がみられた。試みに「水平リンク」の
容量を10から50に変えて、「袈裟掛けの解」を解消した、別の問題
を解いてみたところ、正解への収束率は顕著に向上したので、やは
り問題の性格付けに収束性が強く影響されることがわかった。

本稿執筆時点での状況を報告させていただくのが、図-5である。
集団の遺伝因子の多様性の確保に、通常用いられる突然変異（確率
p1）の他、ランダムに選んだ範囲で遺伝子を反転（確率p2）、ソー
ス・シンク以外の遺伝子を全て反転（確率p3）という操作を加えてい
る。上記の局所解の傾向をにらんで、かなり強引に集団遺伝子の多
様化をはかったが、それでも図-4から若干進歩したかという程度
である。中間報告とさせていただきます。

4・まとめ

本研究では、ネットワークフロー問題の基礎的概念である最小カ
ットの問題に対し、GAの直接的適用に有効な定式化を示すととも

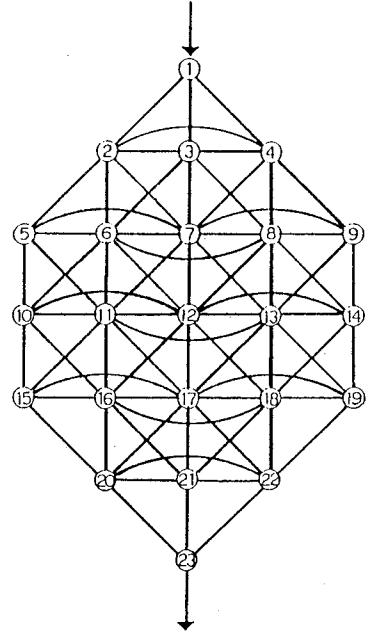


図-3 やや複雑なネットワーク

表-1 図-3のリンク容量

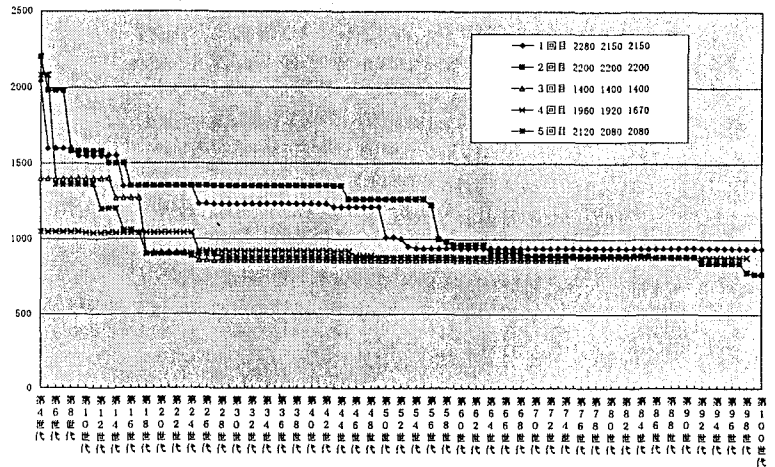
Link	両端node	q	Link	両端node	q
1	1 2	200	40	10 12	10
2	1 3	350	41	11 13	10
3	1 4	400	42	12 14	10
4	2 3	10	43	10 15	90
5	3 4	10	44	10 16	80
6	2 4	10	45	11 15	80
7	2 5	130	46	11 16	80
8	2 6	110	47	11 17	80
9	2 7	50	48	12 16	50
10	3 6	50	49	12 17	50
11	3 7	110	50	12 18	80
12	3 8	110	51	13 17	50
13	4 7	110	52	13 18	80
14	4 8	110	53	13 19	80
15	4 9	150	54	14 18	80
16	5 6	10	55	14 19	80
17	6 7	10	56	15 16	10
18	7 8	10	57	16 17	10
19	8 9	10	58	17 18	10
20	5 7	10	59	18 19	10
21	6 8	10	60	15 17	10
22	7 9	10	61	16 18	10
23	5 10	90	62	17 19	10
24	5 11	70	63	15 20	170
25	6 10	70	64	16 20	110
26	6 11	70	65	16 21	110
27	6 12	50	66	17 20	110
28	7 11	50	67	17 21	110
29	7 12	70	68	17 22	50
30	7 13	70	69	18 21	50
31	8 12	70	70	18 22	110
32	8 13	70	71	19 22	120
33	8 14	70	72	20 21	10
34	9 13	70	73	21 22	10
35	9 14	90	74	20 22	10
36	10 11	10	75	20 23	550
37	11 12	10	76	21 23	300
38	12 13	10	77	22 23	100
39	13 14	10			

に、いくつかの例題に対し、数値計算を行った。得られた知見を以下にまとめる。

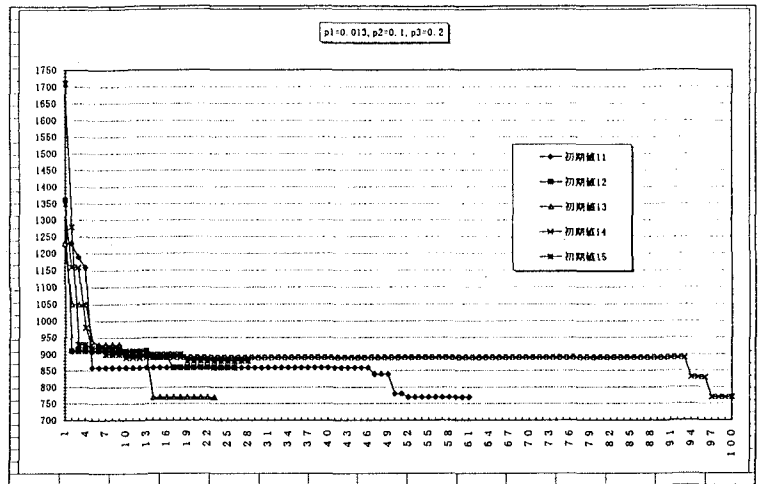
①ネットワーク問題はGAの適用に即した形での定式化が容易な問題であり、従来のアルゴリズムでは計算が困難であった立体グラフや、大規模な問題にも簡単に用いることが出来る。

②一方正解への収束性は、問題の性格によりかなり異なる。現実の問題ではさほど解の構造が複雑になることはないかも知れないが、本研究に示したような、わざと複雑化させた「だまし問題」では解のプロセスにかなりの工夫が必要である。

③収束初期における解の改良には通常のGA操作が非常に有効であるが、後半部分で必要とされる集団の遺伝因子の多様性の確保には、突然変異の手法の多様化やその確率の増加を必要とし、ランダムサーチとの境界が曖昧になる傾向がみられる。



図－4 例題2の収束状況（通常の突然変異）



図－5 例題2の収束状況（突然変異改良型）

参考文献

- 1) 鹿、杉本、山本：遺伝的アルゴリズムの応用に関する基礎的研究、第2回システム最適化シンポジウム講演論文集、pp.181-186、1991年11月。
※4年前の本シンポジウムでは、GAをタイトルに含むものはこの文献を含めて2編、2年前の第3回では7編、今回はさらに増加が見込まれると聞き及ぶ。
- 2) 赤松、桑原：渋滞ネットワークにおける動的利用者均衡配分、土木学会論文集 No.488/IV-23、pp.21-30、1994年4月。
- 3) 若林、飯田、井上：シミュレーションによる道路網の交通量変動分析とリンク信頼度推定法、土木学会論文集 No.458/IV-18、pp.35-44、1993年1月。
- 4) 高田至郎：ライフライン地震工学、共立出版、1991年9月。
- 5) 磯山、片山：大規模水道システムの地震時信頼度評価法、土木学会論文報告集第321号、pp.37-48、1982年5月。
- 6) 野田、宮下：電話網の震害後復旧予測のためのニューラルネットワーク、構造工学論文集Vol.39A、pp.643-656、1993年3月。
- 7) 能島、亀田：地震時のシステム間相互連関を考慮したライフライン系のリスク評価法、土木学会論文集 No.507/I-30、pp.231-241、1995年1月。
- 8) 佐藤、伯野：障害波及を考慮したライフライン設計への一考察、第16回地震工学研究発表会講演概要集、pp.185-188、1981年6月。
- 9) 吉田仁：供給量を考慮したネットワークシステムの信頼性解析、東京大学卒業論文、1981年2月。
- 10) V. 舛田(五百井他訳)：コンピュータによるグラフ理論の応用、pp.111-119、共立出版、1981年。