第4回システム最適化に関するシンポジウム講演論文集　1995年12月

(8) ボルツマン・マシンによる構造システムの離散的最適設計

DISCRETE STRUCTURAL OPTIMIZATION BY BOLTZMANN MACHINE

脇本　恭輔*　　岸　光男**

Kyosuke WAKIMOTO　　Mitsuo KISHI

Neural networks technique can be applied to some discrete optimization problems, approximately. In this paper we introduce the Boltzmann machine in order to remove the binarization constraints. The propose method has no criterion to recognize the optimality of the obtained solution. We transform the optimization problem to a satisfaction problem by specifying an acceptable level for the objective function. Application example for a structural design is provided.

Key words : neural networks, NEURO-OPTIMIZER, Boltzmann machine, discrete optimization, structural design

1　緒言

組合せ最適化問題に対する汎用性のある近似解法の一つとして，著者らはニューロオプティマイザを提案し，その手法の有効性を示している[1)]. ニューロオプティマイザでは，ニューロンの状態が0か1の値をとるように，ニューラルネットのエネルギー関数に0-1制約関数を付加している．しかし0-1制約は，エネルギー関数の局所的最適解の個数を増加させ，大域的最適解への到達可能性を低減させる．

本研究では，0-1制約を取り除くことを目的として，ニューロンの状態が0か1のどちらかに確率的に決まるボルツマンマシン[2)]を導入する．ニューラルネットによる組合せ最適化は近似解法であり，最適解を得る保証は無い．そのため，最適化問題の目的関数に対して満足化のレベルを設定し，最適化の目的関数を制約関数に置き換えることを考える．提案手法を立体トラス構造物の最適設計問題に適用し，その有効性を検証する．

2　ニューロオプティマイザによる組合せ最適化

2.1　組合せ最適化

次のような不等号制約付きの組合せ最適化問題を考える．

$$\begin{array}{lll} \text{Find} & \boldsymbol{X} & \\ \text{Such that} & f(\boldsymbol{X}) \to \text{minimize} & (1) \\ \text{Subject to} & g(\boldsymbol{X}) \leq 0 & (2) \\ & \boldsymbol{X} \in \chi . & (3) \end{array}$$

*　　大阪府立大学大学院生　工学研究科船舶工学専攻　(〒593　大阪府堺市学園町1-1)

**　工博　大阪府立大学助教授　工学部海洋システム工学科　(〒593　大阪府堺市学園町1-1)

ここで，$\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)^T$ は最適化の変数ベクトルであり，目的関数 f および制約関数 g は $\boldsymbol{X}$ の実数値関数である．ただし，$\boldsymbol{X}$ は離散的な性質を持つ集合 χ に属する状態のみをとりうるものとする．

この最適化問題に対して，ラグランジュ関数 L を導入する．

$$L(\boldsymbol{X},\lambda) \;=\; f(\boldsymbol{X})+\lambda g(\boldsymbol{X})\,. \tag{4}$$

ラグランジュ乗数 $\lambda(\geq 0)$ の値を適切に調整できるならば，L を最小化する $\boldsymbol{X}$ が最適解 $\boldsymbol{X}^*$ となる．

2.2 ニューロオプティマイザ

ニューロン i の状態 V_i，入力 Ui，エネルギー関数 E に対して，次の状態方程式を導入する．

$$V_i(t) \;=\; \Phi[U_i(t)] \tag{5}$$
$$\frac{dU_i}{dt} \;=\; -\frac{\partial E}{\partial V_i}. \tag{6}$$

組合せ最適化の中では，ニューロンの状態が 0 または 1 の値をとりうるように，入出力関数 Φ としてシグモイド型関数

$$\Phi(u) \;=\; \frac{1}{1+e^{-u}} \tag{7}$$

を用い，さらに等号制約

$$V_i(1-V_i) \;=\; 0 \tag{8}$$

を付加する．

最適化の変数 $\boldsymbol{X}$ をニューロンの状態 $\boldsymbol{V}$ で表し，エネルギー関数としてラグランジュ関数 L を用いるならば，ニューラルネットは L の値が減少するように自律的に状態を変化させていく．すなわち，組合せ最適化問題の解が得られる．ニューラルネットによる組合せ最適化の仕組みは単純であるが，ラグランジュ乗数の調整，ニューロンによる離散変数の表現，大域的最適解の探索，といった課題が存在する．それらの課題に対処しうるものとして，著者らはニューロオプティマイザを提案した[1]．

ニューロオプティマイザでは，局所的最適解からの脱出と大域的最適解発見の可能性を高めるために，式 (6) の右辺にノイズ u_i を加える．u_i には平均 0 の正規確率乱数を用い，その分散 ${\sigma_{ui}}^2$ を

$${\sigma_{ui}}^2 \;=\; \alpha T^2 \tag{9}$$

のように与える．ここで，α は正の定数，T は温度と呼ばれるパラメタである．T は，たとえば

$$T^{(q)} \;=\; T_0/\ln(q+1) \tag{10}$$

によってコントロールされる．ただし，T_0 は初期温度，$q(=1,2,\cdots)$ は状態遷移の回数である．

3 ボルツマンマシンによる離散的最適化

3.1 0-1 制約

ニューロオプティマイザでは，式 (8) の 0-1 制約を用いる．たとえば，次の簡単な組合せ最適化問題を考えてみる．

$$
\begin{array}{lll}
\text{Find} & X & \\
\text{Such that} & f(X) = aX^2 \to \text{minimize} & (11) \\
\text{Subject to} & g(X) = 0.1 - X \leq 0 & (12) \\
 & h(X) = X(1-X) = 0\,. & (13)
\end{array}
$$

このときラグランジュ関数 L は,

$$L(X, \lambda, \mu) \;=\; f(X) + \lambda g(X) + \mu h(X) \qquad (14)$$

となり (図 1 参照), 大域的最小点 (X=1) とは別に局所的最小点を生じることがわかる. すなわち, 式 (8) の 0-1 制約は, 局所的最適解の個数を増加させ, 大域的最小点への到達可能性を低減させる.

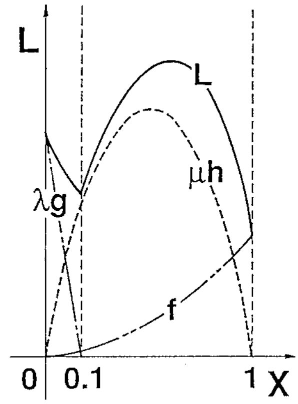

図 1　局所解をもつラグランジュ関数

3.2　ボルツマンマシンの導入

0-1 制約による弊害をなくすため, ここではボルツマンマシン[2)]の導入を考える. ボルツマンマシンは, 式 (7) の入出力関数 Φ に確率的な機能をもたせたモデルである. そこでは, ニューロンの状態 V_i が 0 あるいは 1 となる確率が Φ によって与えられる. すなわち,

$$
\begin{aligned}
Prob[V_i = 1] &= \Phi(U_i) & (15) \\
Prob[V_i = 0] &= 1 - \Phi(U_i)\,. & (16)
\end{aligned}
$$

ボルツマンマシンでは非同期的な状態遷移を原則とする. しかし, 組合せ最適化問題の規模が大きくなるにつれ, 非同期的状態遷移は感度解析の負荷を増大させてしまう.

ボルツマンマシンが単純に同期的な状態遷移を行うと, 1 つの最適化の変数に共通する各ニューロンの入力が同一となり, ニューラルネットは反復振動を始めてしまう. そこで本研究では, ニューロオプティマイザと同様に, ニューロンの入力 U_i に対しても確率ノイズ u_i を加えることにする. これによって, ボルツマンマシンによる組合せ最適化の中で同期的状態遷移が可能となる.

4　構造システムの離散的満足化設計

4.1　満足化設計

いま, 骨組構造物を対象に, その最適設計問題を次のように表す.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Find} & \boldsymbol{X} & \\
\text{Such that} & f(\boldsymbol{X}) \to \text{minimize} & (17) \\
\text{Subject to} & \boldsymbol{g}_y(\boldsymbol{X}) \leq \boldsymbol{0} & (18) \\
 & \boldsymbol{g}_b(\boldsymbol{X}) \leq \boldsymbol{0} & (19) \\
 & \boldsymbol{X} \in \chi\,. & (20)
\end{array}
$$

ここで, 各部材の断面積を設計変数 $\boldsymbol{X}$, 構造物の総重量を目的関数 $f(\boldsymbol{X})$, 各部材の降伏, 座屈に関する構造制約をそれぞれ制約関数 $\boldsymbol{g}_y(\boldsymbol{X})$, $\boldsymbol{g}_b(\boldsymbol{X})$ とする.

ところで, ニューラルネットによる組合せ最適化手法は, あくまでも近似解法であるため, 解の最適性を保証することはできない. そこで, 最小化すべき目的関数をある一定の値以下にする満足化設計を考える. すなわち, 満足化のレベル f^* を設定するならば,

$$\text{Subject to} \quad f(\boldsymbol{X}) \leq f^* \tag{21}$$

という制約条件を付加する．

4.2 数値計算例

ボルツマンマシンによる離散的満足化手法を，図 2 に示すドーム型立体トラスの部材断面最適化設計問題に適用する．ここでは，4 種類の荷重条件のもとで，構造制約を満たし，かつ構造重量が与えられた満足化のレベル以下となるように，各部材を 10 個の候補材の中から選定する．各部材は均質一様であり，作用する荷重は集中荷重のみである．構造物の対称性を考慮して，設計変数の個数は 8 個である．

ニューラルネットのシミュレーションでは，ニューロンの初期状態を乱数で与えた後，1 回の同期的状態遷移ごとに温度とラグランジュ乗数の更新を行う．ニューラルネットが 100 回の状態遷移を行うことで 1 回の試行とした．モンテカルロ法によって 2000 個発生させた可能解の分布を考慮して，満足化のレベルは 8000(kg) に設定して試行を行った．その結果，モンテカルロ法では得られにくい満足解を得ることができた (図 3 参照).

5 結言

ボルツマンマシンに基づく構造システムの離散的満足化設計法を提案した．提案手法では，優れた解を得るために，確率ノイズの温度パラメタのクーリングスケジュールに基づく多数回の状態遷移を必要とする．また，状態遷移の度に感度解析が行われるため，計算時間を短縮するには，効果的な感度解析の導入が必要である．

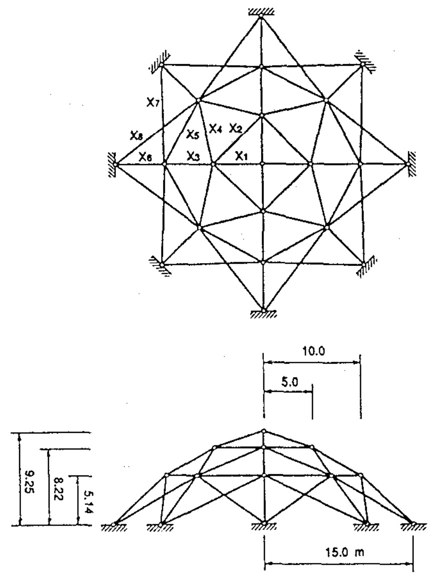

図 2 立体トラス

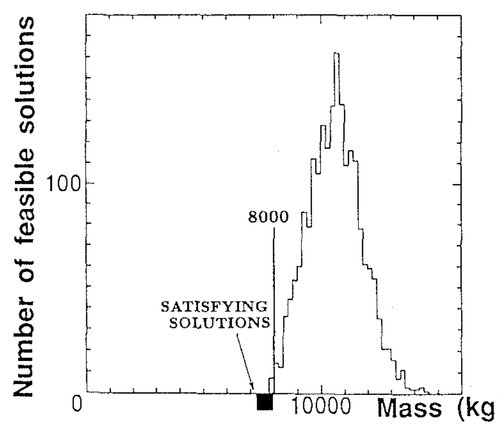

図 3 可能解の分布

参考文献

1) 矢川元基 編：ニューラルネットワーク，培風館，pp.47–76，1992.

2) 上坂吉則：ニューロコンピューティングの数学的基礎，近代科学社，pp.104–117，1993.