第4回システム最適化に関するシンポジウム講演論文集　1995年12月

(3) 修正ｲﾝﾎﾟｰﾀﾝｽ・ｻﾝﾌﾟﾘﾝｸﾞによる離散変数の最適化

Optmization of the Discrete Parameters using an Importance Sampling

須藤　敦史*　　星谷　勝**
Atsushi SUTOH　Masaru HOSHIYA

In most system optimization approaches, continuous optimization techniques have often used. However, in generally, structural system parameters consist of both discrete and continuous elements. Hence, an efficient algorithm which is relevant to a discrete parameters is desirable.

In this study, an algorithm is proposed to estimate the discrete parameters, based on an Importance Sampling procedure of Monte-Calro method. In this method, discrete parameters which are randomly sampled from an Importance Sampling, are updated with objective function, and numerical examples are worked out to demonstrate the discrete parameters optimization of the proposed algorithm.

Kay Words:Mote-Carlo method, Importance Sampling, Discrete parameters optimization

1．はじめに

離散変数を有する最適設計問題の多くは、組み合わせ最適化問題として定式化され、最近では大規模な離散変数を有するｼｽﾃﾑ最適化の必要性が生じてきている。このような状況下、組み合わせ最適化問題に対して確率的手法としてﾗﾝﾀﾞﾑｻｰﾁ(Random Sesrch)[1]や生物体の進化現象(環境適応性)を最適化理論として工学ﾓﾃﾞﾙに応用した遺伝的ｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑ(Genetic Algorithm:GA)[2]が、組み合わせ最適化の探索に用いられている。

このうちﾗﾝﾀﾞﾑｻｰﾁは、ﾓﾝﾃｶﾙﾛ法[3]を基本として対象とする確率変数をﾗﾝﾀﾞﾑに発生させ、多くの解候補の集合の中から最適な解を見つける手法であるために、多くの確率変数を有する場合や広い範囲に確率変数が分布する場合には、探索時間を必要とする。

一方、ﾗﾝﾀﾞﾑｻｰﾁの中でｲﾝﾎﾟｰﾀﾝｽ・ｻﾝﾌﾟﾘﾝｸﾞ法[4]は、構造信頼性設計などにおいて、破壊確率の精度向上や計算時間の効率化を図る目的で用いられている手法である。このｲﾝﾎﾟｰﾀﾝｽ・ｻﾝﾌﾟﾘﾝｸﾞ法は、破壊事象の発生確率の高い領域にｻﾝﾌﾟﾘﾝｸﾞ密度関数を設定し、そこにｻﾝﾌﾟﾙを集中させることで少ないｻﾝﾌﾟﾙ数で効率的に破壊確率を求めようとする考え方の手法である。この概念を用いて、ｻﾝﾌﾟﾘﾝｸﾞ密度関数を実際に得られたｻﾝﾌﾟﾙの統計的性質で更新を行いながら、破壊確率を求める手法がｱﾀﾞﾌﾟﾃｨﾌﾞ・ｻﾝﾌﾟﾘﾝｸﾞ法[5,6]である。

以上のようにｲﾝﾎﾟｰﾀﾝｽ・ｻﾝﾌﾟﾘﾝｸﾞ法の概念は、事象の発生確率の高い領域、言い換えれば限定したｻﾝﾌﾟﾙ領域にｻﾝﾌﾟﾙを集中させることで、少ないｻﾝﾌﾟﾙ数で精度の高い確率を求めようとする手法であるため、計算時間を要する離散変数の組み合わせ最適化問題の解法として定式化が可能である。

そこで本研究は、ﾗﾝﾀﾞﾑｻｰﾁを基本としたｱﾀﾞﾌﾟﾃｨﾌﾞ・ｻﾝﾌﾟﾘﾝｸﾞ法の概念を離散変数の組み合わせ最適化問題に応用し、効率的に最適解を探索する手法(修正ｲﾝﾎﾟｰﾀﾝｽ・ｻﾝﾌﾟﾘﾝｸﾞ法)の提案を行っている。

---

*　　博士(工学)　(株)地崎工業 技術開発部　主任研究員　(〒105 東京都港区西新橋2-23-1)
**　　Ph.D.　武蔵工業大学 工学部 土木工学科　教授　(〒158 東京都世田谷区玉堤1-28-1)

2．修正ｲﾝﾎﾟｰﾀﾝｽ・ｻﾝﾌﾟﾘﾝｸﾞ法

一般的に最適化問題は目的関数を用いて式(1)のように表される[7]。

目的関数：　$Z(y)=[g_1(y),g_2(y),\cdots,g_n(y)]$　　(1.a)

$Z(y)$：目的関数，y：変数ﾍﾞｸﾄﾙ
$y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$，m：要素個数
$g_n(y)$：ｼｽﾃﾑ要素，n：ｼｽﾃﾑ個数

$Z(y)\rightarrow$ min or max

制約条件：　$y \in S$　ただし　$S \subset \Omega$　　(1.b)

Ω：基本空間，S：許容領域集合

最適化は、許容領域集合に属する変数ﾍﾞｸﾄﾙのうちで目的関数を最小もしくは最大にする解または解候補を求める問題となる。また、変数ﾍﾞｸﾄﾙが離散変数に場合には組み合わせ最適化問題となる。

ここで、問題を離散変数を有するｼｽﾃﾑの最適化問題を考える。ﾗﾝﾀﾞﾑｻｰﾁにおいて離散変数ﾍﾞｸﾄﾙは、式(1.b)に示すように許容領域集合より抽出されるｻﾝﾌﾟﾙﾍﾞｸﾄﾙとなり、抽出されるｻﾝﾌﾟﾙﾍﾞｸﾄﾙの数が多ければ最適な解の組み合わせが得られる確率は高くなる。

ここで、離散変数のk組目のｻﾝﾌﾟﾙﾍﾞｸﾄﾙは式(2)に示すようになり、そのときに目的関数を式(3)に示す。

$$y^k=\{y_1^k,y_2^k,\cdots,y_{m2}^k\} \quad (2)$$

$$Z(y^k)=[g_1(y^k),g_2(y^k),\cdots,g_n(y^k)] \quad (3)$$

m_2：離散変数の個数，k：ｻﾝﾌﾟﾙ組数

ここで、最適化は式(4)に示すように目的関数の最小値が得られる解の組み合わせを探索する問題とする。

$$Z(y^k)\rightarrow \min \quad (4)$$

しかし、離散変数が多くなれば、最適解に探索に多大な計算時間を要することになる。このような離散変数の組み合わせ最適化問題は、対象となる基本空間Ωにおける確率Pにより期待値を可能領域で最大にする問題となる。しかし確率Pが既知でないため、期待値を推定しながら最適化を行う必要が生じる。

そこで、ﾓﾝﾃｶﾙﾛ法の一解析手法であるｲﾝﾎﾟｰﾀﾝｽ・ｻﾝﾌﾟﾘﾝｸﾞ法を適用し、確率変数をﾗﾝﾀﾞﾑに発生させ目的関数を計算することにより、期待値(最適解)を推定する手法を提案する。この方法は、目的関数の大きさを調べることで期待値が存在する可能性の高い領域を近似改善的に推定してゆく逐次最適化手である。以下にこの修正ｲﾝﾎﾟｰﾀﾝｽ・ｻﾝﾌﾟﾘﾝｸﾞのｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑの詳細を記述する。

最適化ｽﾃｯﾌﾟ1回目

1). 離散変数ﾍﾞｸﾄﾙを許容領域内(D_1)においてﾗﾝﾀﾞﾑに1組ｻﾝﾌﾟﾙを抽出し、ｻﾝﾌﾟﾙ・ﾍﾞｸﾄﾙの目的関数の値を求める。

(領域：D_1 ｽﾃｯﾌﾟ(1)-ｻﾝﾌﾟﾙ1組)　$y_{(1)}^1=\{y_1^1,y_2^1,\cdots,y_{m2}^1\}$

$$Z(y_{(1)}^1)=[g_1(y_{(1)}^1),g_2(y_{(1)}^1),\cdots,g_n(y_{(1)}^1)]$$

2). 1)の手順をi回繰り返し、i組のｻﾝﾌﾟﾙ・ﾍﾞｸﾄﾙに対して目的関数値を求める。

(領域：D_1 ｽﾃｯﾌﾟ(1)-ｻﾝﾌﾟﾙi組)　$y_{(1)}^i=\{y_1^i,y_2^i,\cdots,y_{m2}^i\}$

$$Z(y_{(1)}^i)=[g_1(y_{(1)}^i),g_2(y_{(1)}^i),\cdots,g_n(y_{(1)}^i)]$$

3). 上記手順により求められた目的関数値の大きさにより、目的とするｻﾝﾌﾟﾙ・ﾍﾞｸﾄﾙの存在範囲を調べる。そして次のｻﾝﾌﾟﾙ・ﾍﾞｸﾄﾙの探索領域(D_2)を求める。

最適化ｽﾃｯﾌﾟ2回目

最適化ｽﾃｯﾌﾟ(1)で限定された探索領域(D_2)において1)～3)の手順を再度行い、次のｻﾝﾌﾟﾙ・ﾍﾞｸﾄﾙの探索領域(D_3)を求める。ここで最適化ｽﾃｯﾌﾟ2回目以降、領域限定にともなう局所最適化を回避するために、限定以前の許容領域内(D_1)においてｻﾝﾌﾟﾙk_1を再抽出する。

(領域：D_2 ｽﾃｯﾌﾟ(2)-ｻﾝﾌﾟﾙi_1組)　$y_{(1)}^{i1}=\{y_1^{i1},y_2^{i1},\cdots,y_{m2}^{i1}\}$

$$Z(y_{(2)}^{i1})=[g_1(y_{(2)}^{i1}),g_2(y_{(2)}^{i1}),\cdots,g_n(y_{(2)}^{i1})]$$

（領域：D_1 ｽﾃｯﾌﾟ(2)-ｻﾝﾌﾟﾙk_1組）

$$y^{k1}_{(2)}=\{y^{k1}_1, y^{k1}_2, \cdots, y^{k1}_{m2}\}$$

k_1：再抽出ｻﾝﾌﾟﾙ個数, $k_1=\alpha\cdot i_1$（α：再抽出率）

$$Z(y^{k1}_{(2)})=[g_1(y^{k1}_{(2)}), g_2(y^{k1}_{(2)}), \cdots, g_n(y^{k1}_{(2)})]$$

最適化ｽﾃｯﾌﾟj回目

以降、各最適化ｽﾃｯﾌﾟにおいてｻﾝﾌﾟﾙを行いながら、最適解の探索を行う。ここで、効率的に探索を行うために各ｽﾃｯﾌﾟにおいてｻﾝﾌﾟﾙの数を順次減少させる。

（領域：D_j ｽﾃｯﾌﾟ(j)-ｻﾝﾌﾟﾙi_{j-1}組）

$$y^{ij-1}_{(j)}=\{y^{ij-1}_1, y^{ij-1}_2, \cdots, y^{ij-1}_{m2}\}$$

$i>i_1>\cdots>i_{j-1}$：ｻﾝﾌﾟﾙ個数

$$Z(y^{ij-1}_{(j)})=[g_1(y^{ij-1}_{(j)}), g_2(y^{ij-1}_{(j)}), \cdots, g_n(y^{ij-1}_{(j)})]$$

（領域：D_1 ｽﾃｯﾌﾟ(j)-ｻﾝﾌﾟﾙk_{j-1}組）

$$y^{kj-1}_{(j-1)}=\{y^{kj-1}_1, y^{kj-1}_2, \cdots, y^{kj-1}_{m2}\}$$

k_{j-1}：再抽出ｻﾝﾌﾟﾙ個数, $k_{j-1}=\alpha\cdot i_{j-1}$（$\alpha$：再抽出率）

$$Z(y^{kj-1}_{(j-1)})=[g_1(y^{kj-1}_{(j-1)}), g_2(y^{kj-1}_{(j-1)}), \cdots, g_n(y^{kj-1}_{(j-1)})]$$

以上の手順を繰り返すことにより、目的関数を最大もしくは最小にする最適解候補を逐次的に求める手法である。ここで、提案する修正ｲﾝﾎﾟｰﾀﾝｽ・ｻﾝﾌﾟﾘﾝｸﾞ法のｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑを図-1に示す。

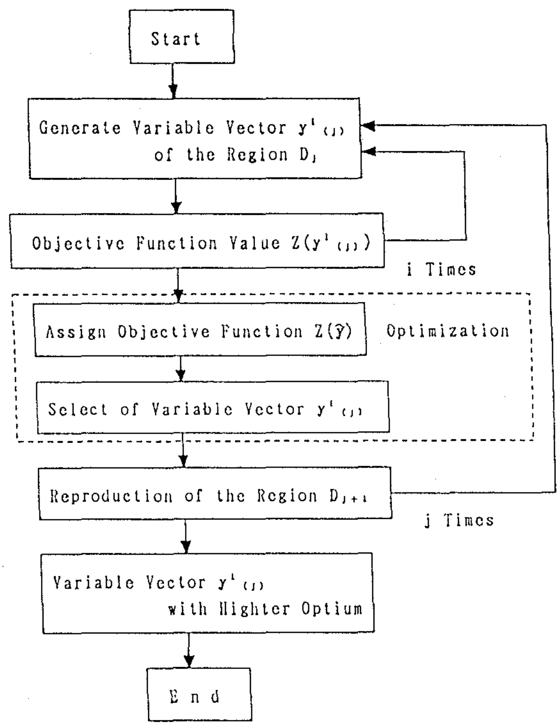

図-1 修正ｲﾝﾎﾟｰﾀﾝｽ・ｻﾝﾌﾟﾘﾝｸﾞ ｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑ

3．修正ｲﾝﾎﾟｰﾀﾝｽ・ｻﾝﾌﾟﾘﾝｸﾞのﾏﾙｺﾌ(確率)過程による考察

確率的な最適化問題では、その確率構造が既知でないため期待値の計算が困難な場合が多い。そこで実際は何らかの方法で確率*や期待値の計算を近似的に行う工夫が必要となる。

そこで本節では、提案した修正ｲﾝﾎﾟｰﾀﾝｽ・ｻﾝﾌﾟﾘﾝｸﾞ法のﾏﾙｺﾌ(確率)過程による考察を行う[8]。

前節と同様に許容ｻﾝﾌﾟﾙ領域(D_1)において、ﾗﾝﾀﾞﾑにi組のｻﾝﾌﾟﾙを抽出するとすると、ｻﾝﾌﾟﾙ・ﾍﾞｸﾄﾙは以下のようになる。

（領域：D_1 ｽﾃｯﾌﾟ(1)-ｻﾝﾌﾟﾙ1組～i組）

$$\begin{aligned} y^1_{(1)}&=\{y^1_1\in D_1, y^1_2\in D_1, \cdots, y^1_{m2}\in D_1\} \\ &\vdots \\ y^i_{(1)}&=\{y^i_1\in D_1, y^i_2\in D_1, \cdots, y^i_{m2}\in D_1\} \end{aligned} \qquad (5)$$

本手法では次ｽﾃｯﾌﾟのｻﾝﾌﾟﾙ領域D_2を上記のｻﾝﾌﾟﾙの目的関数値より求める。したがって、k回目のｻﾝﾌﾟﾙ領域D_kはk-1回目のｻﾝﾌﾟﾙﾍﾞｸﾄﾙにより決定されるため、この過程はﾏﾙｺﾌ過程となる。このﾏﾙｺﾌ過程をｽﾃｯﾌﾟ回数に対する条件付き確率で表すと式(6)のようになる。

$$f(y^i_{(k)}|y^i_{(1)}, y^i_{(2)}, \cdots, y^i_{(k-1)})=f(y^i_{(k)}|y^i_{(k-1)}) \qquad (6)$$

一般にﾏﾙｺﾌ過程では、状態iから状態jへの推移を推移確率行列Pを用いて、確率変数の分布π_tからπ_{t+1}への状態推移を式(7)のように表す。

$$\pi_{t+1}=\pi_t\cdot P \qquad (7)$$

π_t：時刻tにおける状態確率分布($1\cdot N$)

$\pi_0=[y_1, y_2, \cdots, y_N]$, N：解候補数

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1N} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N1} & P_{N2} & \cdots & P_{NN} \end{bmatrix}$$

ここで本手法では、ｻﾝﾌﾟﾙを抽出しながら領域を限定してゆく。これを推移確率行列では、限定した領域の推移確率行列の要素を1にし、また排除した領域では0にしていると言える。このように唯一の推移確率行列を推定してゆく過程を吸収ﾏﾙｺﾌ過程と言う。しかし、ここでは確率が既知でないため、得られるｻﾝﾌﾟﾙ値によって吸収的な推移確率行列の推定を行う。

推移確率をﾏﾙｺﾌ連鎖の時刻0からTまでの状態確率分布の履歴が$y_0, y_1, \cdots, y_T$となる確率を考えると式(8)となる。

$$P_{y0,y1}\cdot P_{y1,y2}\cdots P_{yT-1,yT} = \prod_{i=1}^{S}\prod_{j=1}^{S} P_{ij}^{n_{ij}} \tag{8}$$

n_{ij}:状態iからjへの推移回数

y_0:Given

いま、推移確率行列は未知であるため推移回数n_{ij}(ｻﾝﾌﾟﾙ)より推定する。ここで、P_{ij}を未知ﾊﾟﾗﾒｰﾀとして式(8)の対数尤度関数Lを求めると次式となる。

$$\log L = \sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{S} n_{ij}\log P_{ij} \tag{9}$$

また、上式を最大にする推移確率P_{ij}の推定値は式(10)のようになる。

$$P_{ij} = n_{ij} / n_i \tag{10}$$

$$\because\ n_i = \sum_{j=1}^{S} n_{ij}$$

したがって、推定値はﾏﾙｺﾌ連鎖の状態iからjに推移したｻﾝﾌﾟﾙ数の要素を列の総数で割った値となる。しかし、本手法では式(10)に示した推移確率行列を近似的にｻﾝﾌﾟﾙを抽出する領域に置き換えている。

4. 数値 解析

提案手法の離散変数の組み合わせ最適化問題への適応性を確認する目的で、図-2に示す既製型鋼を用いたﾄﾗｽ構造物の最小重量設計問題を検討する。設計変数はﾄﾗｽ部材の数と同じ5変数(表-1)とし、各部材がとり得る断面積を表-2に示す。

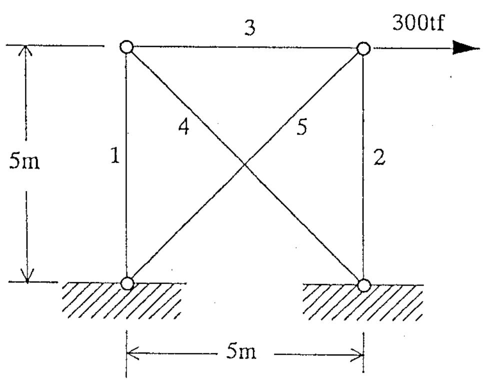

図-2 5部材ﾄﾗｽ

表-1 部材-変数表

状態変数	1	2	3	4	5
部材番号	1	2	3	4	5

表-2 部材の断面積

No	断面積 (cm²)	No	断面積 (cm²)
0	22.72	15	195.40
1	29.94	16	209.40
2	38.36	17	217.90
3	54.08	18	221.70
4	67.55	19	238.20
5	70.21	20	259.40
6	80.42	21	278.70
7	90.64	22	301.70
8	100.90	23	319.20
9	133.60	24	343.80
10	138.80	25	349.40
11	148.80	26	400.50
12	163.90	27	451.60
13	167.10	28	502.70
14	179.10		

ここで、使用鋼材の重量最小を目的としているため、目的関数は鋼材の総体積とする。また、ｻﾝﾌﾟﾘﾝｸﾞを行う領域の限定基準と優先順位は以下に示す順序とする。

1). ﾄﾗｽの構造解析より部材が降伏(応力の絶対値が2,100kgf/cm^2を上回る)する場合

2). 目的関数が平均値より大きい(重量大)場合

ここでは、本手法の離散変数の組み合わせ最適化問題に対する適用性を確認するとともに、ｻﾝﾌﾟﾙｻｲｽﾞの大きさの検討を行った。各解析ｹｰｽを表-3に、解析結果を図-3に示す。また解析ｹｰｽ1より得られた各ｽﾃｯﾌﾟの解析最適解を表-4に示す。なお最適化を行った回数は10回(領域限定9回)とし、限定以前の領域におけるｻﾝﾌﾟﾙの再抽出率は10%としている。

表-3 解析ｹｰｽ

解析 ｹｰｽ	変数列個数	減少個数
Case1 (5部材ﾄﾗｽ)	80	8
Case2 (5部材ﾄﾗｽ)	50	5

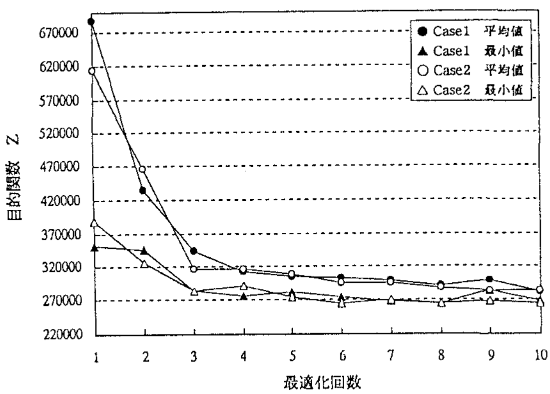

図-3 5部材ﾄﾗｽの解析結果

表-4 各ｽﾃｯﾌﾟの最適解

No.	1	2	3	4	5	最小値	平均値
1	1	22	3	1	15	352199.44	688704.50
2	1	16	9	1	15	345809.44	435280.25
3	6	13	0	1	14	282933.59	343634.06
4	5	12	0	1	14	276228.59	313235.13
5	6	12	0	1	14	281333.56	305438.34
6	6	10	0	2	14	274737.44	302257.84
7	4	10	0	2	14	268302.44	298474.69
8	5	10	0	1	14	263678.59	290512.34
9	5	12	2	1	14	284048.56	298482.66
10	5	11	0	1	14	268678.59	281078.09

図-3より、目的関数の平均・最小値ともに一様に減少しており、最小目的関数も3回程度の領域限定でほぼ収束している。ここで最適解は[1,9,0,1,14:240944.3cm^3]になることにより、本解析では最適解に近い準最適解が得られたことになる。

5. 結　論

本研究では、離散変数を有するｼｽﾃﾑの組み合わせ最適化手法に対して、ﾓﾝﾃｶﾙﾛ法を基本としたｱﾀﾞﾌﾟﾃｨﾌﾞ・ｻﾝﾌﾟﾘﾝｸﾞ法の概念を用いた修正ｲﾝﾎﾟｰﾀﾝｽ・ｻﾝﾌﾟﾘﾝｸﾞ法の提案を行った。加えて、ﾏﾙｺﾌ過程による提案手法の考察を行い、その適用性を数値解析により検証した結論を以下に示す。

(1)本手法はﾏﾙｺﾌ過程によりｻﾝﾌﾟﾙﾍﾞｸﾄﾙを抽出し、吸収状態推移確率を推定してゆく手法である。ただし、推移確率を近似的にｻﾝﾌﾟﾙを抽出する領域に置き換え、最適解近傍のみがｻﾝﾌﾟﾙとして得られるようにしている。

(2)本手法は多点探索手法であり、目的関数の偏微分係数を用いない手法であるため、離散変数を有するｼｽﾃﾑの最適化問題に適用が可能である。

参考 文献

1)Torn, A., Zilinskas, A.:Global Optimization, Springer, 1989.
2)Goldberg, D. E.:Genetic Algorithm in Search, Optimization and Mechine Learning, Addison-Wesly Publishing Company, 1989.
3)Rubinstein, R. Y.:Simulation and Monte Calro Method, John Wiley & Sons, New York, 1981.
4)星谷 勝・忽那幸浩:重要ｻﾝﾌﾟﾘﾝｸﾞとｶﾙﾏﾝﾌｨﾙﾀによる信頼性解析, 土木学会論文集, No. 427/Ⅰ-17, pp. 193-192, 1991.
5)Bucher, C. G.,:Adaptive Sampling -An Iterative Fast Monte-Calro Procedure, Structural Safety, Vol. 5, pp. 119-125, 1988.
6)白木 渡・G. I. Schueller:条件付き破壊確率を用いた繰り返しﾓﾝﾃｶﾙﾛ法とその構造物の動的信頼性度評価への応用, 構造工学論文集, Vol. 35A, pp. 467-477, 1989.
7)土木学会構造工学委員会編:構造ｼｽﾃﾑの最適化-理論と応用-, 土木学会, 1988.
8)森村英典・高橋幸雄:ﾏﾙｺﾌ解析, 日科技連, 1995.