

(42) WILFS法による構造物の適応震動制御

ADAPTIVE CONTROL OF SEISMIC RESPONSE OF STRUCTURES BY WILFS METHOD

野田 茂* 井上 潤**

By Shigeru NODA and Jun INOUE

In this study, a method to synthesize an optimal controller by using adaptive control theory is presented. The design procedure of the optimum control consists of an identification of the structure and a synthesis of the controller. The iterated linear filter-smoother with weighted local iteration (WILFS) was proposed to use in the estimation of the structural parameters. Incorporating the nonlinear state and observation equations from the equation of motion in the iterated extended Kalman filter algorithm, the stiffness and damping parameters were estimated. The sum of time-dependent quadratic form and the seismic energy input to the structural system was adopted for a criterion function of the optimal vibration control. The optimal controller was easy to be synthesized based on the physical model identified by this algorithm. By carrying out computer simulations, the usefulness of WILFS method for the optimum control was verified.

Key Words : Adaptive control, WILFS method, Seismic response, Structural identification, Active control

1. 序論

近年、コンピューターで情報処理を行うインテリジェントビルが発達してきた。そのため、その社会的中枢機能の重要性が増している。これらの構造物が強震時に損傷を受けると、それは都市全体のシステムダウンにつながる恐れがある。

こうした中で、どのような地震動に対しても地震応答を積極的に制御しようとするアクティブコントロールの考え方は、現在、最も優れた振動制御手法の一つとして幅広く応用されつつある。アクティブコントロールは、基本的に、外部から振動体にエネルギーを加えて、能動的に振動を抑制する方式である。これは、パッシブな機構の他に、アクチュエータ、センサーおよび制御装置により構成される。

一般に、構造物の材料特性などは経時変化する。従って、強震時に構造物の振動制御を行う際には動特性を表すパラメーターを適宜推定しておくことが重要である。このためには、各センサーの観測情報から、時々刻々、構造同定を行って自らの体質を認知し、それに基づいて、最適な振動制御力を即座に決定しなければならない。現在、このような構造同定を伴う地震応答のアルゴリズムの開発が求められており、その有効性を明らかにすることが必要である。

本研究では、線形多自由度構造物を対象として、構造同定を行いながら、最適な制御力を算出する方法を考案し、数値シミュレーションによって、その有効性を調べる。

構造同定の効率化は、拡張カルマンフィルターとスムージングのローカルな繰り返しを時々刻々行うとともに、推定誤差共分散に重みを掛けることによって実施する。ここではこの方法をWILFS(Weighted Iterated Linear Filter-Smoother)法と称する。最適制御力は、構造同定を行った結果に対し、拡張された時間依存型

* 工博 鳥取大学助教授 工学部社会開発システム工学科(〒680 鳥取市湖山町南4-101)

** 鳥取大学大学院生 工学研究科社会開発システム工学専攻(同上)

の評価関数を最小にするように定める。このようなアルゴリズムは系の特性が変化するような非線形構造物にも適用可能である。

2. WILFS 構造同定法による逐次型最適制御

(1) 対象モデル

本研究では、構造同定を伴う振動制御アルゴリズムの有効性を確認するため、最も単純なモデルを対象とする。図1にはここで用いる振動制御装置付き線形5質点系構造物を示す。

式(1)は線形連続型状態方程式、式(2)は線形離散型観測方程式(補遺A.も参照のこと)である。

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + BU(t) + W_1 \ddot{z}_g(t) \quad (1)$$

$$Y(t_k) = P\hat{h}(t_k) + V(t_k) \quad (2)$$

ただし、

$$Z(t) = \left\{ \begin{array}{l} X(t) \\ \dot{X}(t) \end{array} \right\}, \quad A = \left[\begin{array}{cc} O & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{array} \right], \quad W_1 = \left[\begin{array}{c} O \\ -M^{-1}m \end{array} \right] \quad (3)$$

$$U(t) = \{\dots u_i(t) \dots\}^T, \quad B = \left[\begin{array}{c} O \\ M^{-1}H \end{array} \right]$$

ここに、 $Z(t)$ は変位と速度応答からなる状態量ベクトル、 $U(t)$ は制御力ベクトル、 $\ddot{z}_g(t)$ は地動加速度、 A, B と W_1 は質量(M, m)、減衰(C)と剛性(K)からなるマトリックス・ベクトルである。

式(2)において、 $Y(t_k)$ は観測量である絶対加速度応答ベクトル、 $\hat{h}(t_k)$ は状態量から計算される絶対加速度応答ベクトル、 $V(t_k)$ は観測ノイズベクトル(平均0、分散 $\Lambda(t_k)$)である。また、 P と H は、それぞれ、観測位置と制御位置を表すマトリックスである。

(2) WILFS 構造同定法

a) EK-WGI 法

強震時に経時変化する構造物の動特性を自ら把握すると共に、制振化を図ることは重要である。すなわち、動特性を表すパラメーターを適宜推定し、その時点での構造物の揺れを抑える最適な制御力を決定するのである。このためには、地震動とその応答量を瞬時に時々刻々検知し、同定と制御力を即座に決定しなければならない。なお、ここでは、制御装置が完全に作動すると仮定し、遅延時間などを無視する。

これまで、動特性を表すパラメーターと応答量よりなる状態量の推定問題が取り扱われてきた。特に、地震動や応答量の観測データを用いて、拡張カルマンフィルターを適用したEK-WGI法がよく用いられている¹⁾。

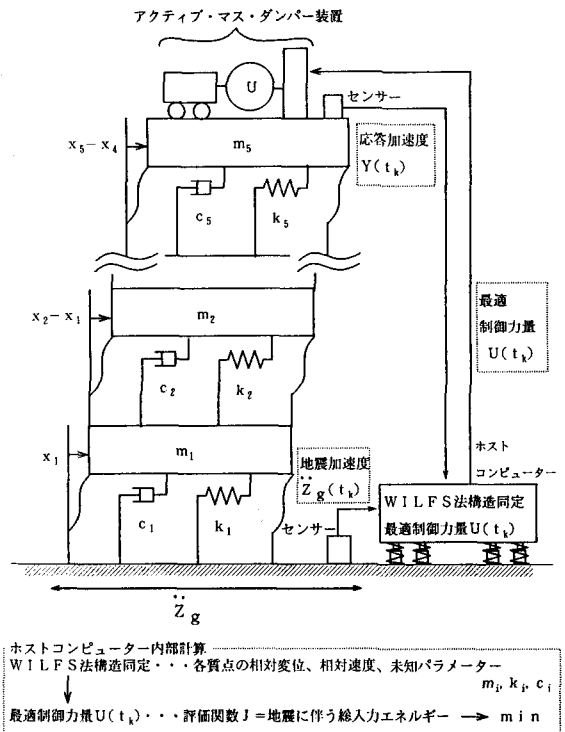


図1 制御装置付き線形多自由度構造物

パラメータ推定を行うとき、未知パラメータと応答量(運動方程式) X は一つの状態方程式で表される。この状態方程式 $f(X)$ と観測方程式 $h(X)$ は、推定すべきパラメータを含むため、非線形方程式となる。

フィルター理論に基づく最適推定において、両者の非線形式は等価な線形式に変換される。このためには、状態量に関する偏微分を求め、推移マトリックスや観測量への変換マトリックスを計算しなければならない。これには、テーラー展開に伴う近似計算を必要とする。

状態方程式の非線形性による推定誤差の増大は、初期値の影響の減少や数値計算の安定化のために、重み付きグローバルな繰り返しによって低減されている。

b) WILFS 法

状態推定と振動制御は時々刻々行わなければならない。すなわち、リアルタイムにオンラインで、構造同定と振動制御を実施することが望ましい。グローバルな繰り返しを伴う拡張カルマンフィルターでは継続時間にわたる観測を事前に必要とする。そのため、この方法ではリアルタイムに構造同定を行うことができない。また、拡張カルマンフィルターのみで各時刻の状態量を推定すると、その誤差は大きくなるであろう。

上記の理由のため、本研究では、観測時点で最適制御を実施できるように、かつ状態方程式や観測方程式の非線形性に伴う誤差の増大を低減させる同定法を考える。

微小な時間帯において、ローカルに構造同定を繰り返すことにより、繰り返し線形近似による現推定値の改善とスムージングによる前推定値の改善を図ることができる。その結果、最適な状態推定量 \hat{X} (各質点の相対変位、相対速度と未知パラメータ)が得られる。ここではこの操作をILFS(Iterated Linear Filter-Smoother)法と呼ぶ^{2),3)}。

上記の方法ではローカルな繰り返し推定を行っている。そのため、推定誤差共分散は時間とともに小さくなることが考えられる。そこで、本研究では、次時点の推定の際、初期推定誤差共分散に重みを掛け、効率的な推定を実施できるような工夫を施す。ここではこの方法をWILFS法と呼ぶ。

図2はWILFS法に基づいた逐次型最適制御のフローを示したものである。

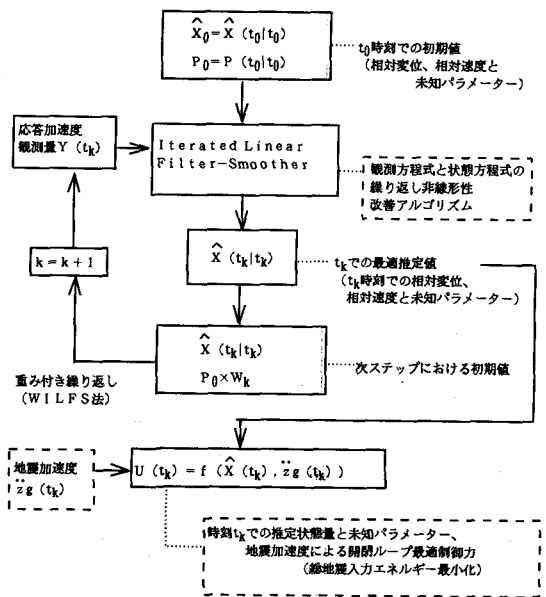


図2 WILFS法による逐次型最適制御のフローチャート

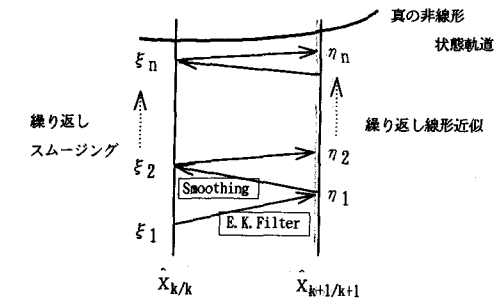


図3 ILFS(Iterated Linear Filter-Smoother)法による精度の改善

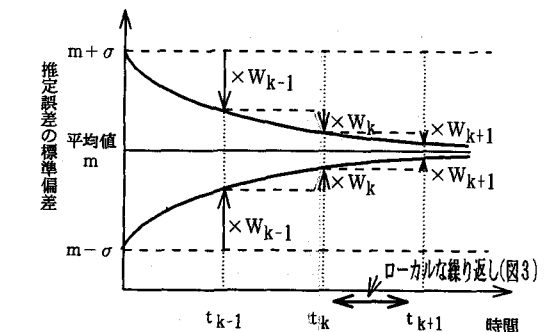


図4 WILFS(Weighted-ILFS)法の考

c) 同定のアルゴリズム

本研究では、次に示すようなアルゴリズムによって、時々刻々、状態推定を行う。このアルゴリズムを採用すれば、式(6)～(12)を反復的に繰り返すことにより、式(10)の $\eta^{(i+1)}$ は収束し、時刻 k の最適推定値 $\hat{X}_{k/k} (= \eta^{(n)})$ が得られる。図3は、繰り返し i に伴う一連のアルゴリズムの収束性を示したものである。

ここでは、時々刻々と微小な時間帯 (t_k, t_{k+1}) において、ローカルな繰り返しを併用している。そのため、式(10)の繰り返し線形近似によって、現推定値の改善を、式(12)のスージングによって、前推定値の改善を図ることが容易である。さらに、ローカルな繰り返しを行うときの推定誤差分散の初期値は、図4(式(5))に示すように、初期推定誤差分散 $P_{0/0}$ に重み (W_k) を掛けて、低減させる。これにより、安定したかつ効率的な推定値を得ることができる。

(初期条件)

$$\eta^{(1)} = \hat{X}_{k/k-1}^{(1)}, \quad \xi^{(1)} = \hat{X}_{k-1/k-1} \quad (4)$$

$$P_{k/k}^{(1)} = P_{0/0} W_k \quad (5)$$

(予測値の計算)

$$\bar{X}_k = \xi^{(i)} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\bar{X}(\tau), \tau) d\tau \quad (6)$$

$$\hat{X}_{k/k-1}^{(i)} = \bar{X}_k + \Phi_{k/k-1}^{(i)} \{ \hat{X}_{k-1/k-1} - \xi^{(i)} \} \quad (7)$$

(拡張カルマンフィルターの演算)

$$P_{k/k-1}^{(i)} = \Phi_{k/k-1}^{(i)} P_{k-1/k-1} \Phi_{k/k-1}^{(i)T} (\xi^{(i)}) \quad (8)$$

$$K_k^{(i)} = P_{k/k-1}^{(i)} M_k^{(i)T} [M_k^{(i)} P_{k/k-1}^{(i)} M_k^{(i)T} + \Lambda(k)]^{-1} \quad (9)$$

$$\eta^{(i+1)} = \hat{X}_{k/k-1}^{(i)} + K_k^{(i)} [Y_k - h_k^{(i)} - M_k^{(i)} \{ \hat{X}_{k/k-1}^{(i)} - \eta^{(i)} \}] \quad (10)$$

(スージングの演算)

$$S_{k-1}^{(i)} = P_{k-1/k-1} \Phi_{k/k-1}^{(i)T} P_{k/k-1}^{(i)-1} \quad (11)$$

$$\xi^{(i+1)} = \hat{X}_{k-1/k-1} + S_{k-1}^{(i)} \{ \eta^{(i+1)} - \hat{X}_{k/k-1}^{(i)} \} \quad (12)$$

上式において、ベクトルやマトリックスの意味は次の通りである。すなわち、 $\hat{X}_{k-1/k-1}$ は時刻 t_{k-1} における推定状態量、 $P_{k-1/k-1}$ は時刻 t_{k-1} における $\hat{X}_{k-1/k-1}$ の推定誤差共分散行列、 $\hat{X}_{k/k-1}^{(i)}$ は時刻 t_{k-1} において繰り返し i 回目に計算された時刻 t_k の推定状態量、 $P_{k/k-1}^{(i)}$ は時刻 t_{k-1} において繰り返し i 回目に計算された $\hat{X}_{k/k-1}^{(i)}$ の推定誤差共分散行列、 $K_k^{(i)}$ は時刻 t_k において繰り返し i 回目に計算されたフィルターのゲイン行列、 $S_k^{(i)}$ は時刻 t_k において繰り返し i 回目に計算されたスージングのゲイン行列、 $\Phi_{k/k-1}^{(i)}$ は繰り返し i 回目の状態方程式の時刻 t_{k-1} から t_k への推移行列、 $M_k^{(i)}$ は繰り返し i 回目の観測方程式の時刻 t_k における変換行列である。

なお、 $\Phi_{k/k-1}^{(i)}$ と $M_k^{(i)}$ は次式で求められる。

$$\Phi_{k/k-1}^{(i)} \cong I + \Delta \left[\frac{\partial f_{i'}(X_t, t)}{\partial X_{j'}} \right]_{X_t = \xi^{(i)}}, \quad M_k^{(i)} \cong \left[\frac{\partial h_{i'}(X_{t_k}, t_k)}{\partial X_{j'}} \right]_{X_{t_k} = \eta^{(i)}} \quad (13)$$

ただし、 $f_{i'}(X_t, t)$ は $f(X_t, t)$ の要素、 $h_{i'}(X_{t_k}, t_k)$ は $h(X_{t_k}, t_k)$ の要素、 $X_{j'}$ は X_t (あるいは X_{t_k})の要素である。

本方式では、観測時点で最適制御を実施できるように、状態方程式や観測方程式の非線形性に伴う誤差の増大を低減させ、最適な状態推定量を求めることができる。上述の詳細な説明については補遺A.を参照さ

りたい。

(3) 逐次型最適制御

a) 運動方程式

ここでは、文献4)を参考にして、新しく評価関数を設定し、最適制御力を求める。

まず、式(1)の微分方程式の解を定める。初期条件 $t=0$ のとき $Z(0)=0$ とし、微小時間 Δ 内において、状態量は変化しないと仮定する。この仮定の下で、式(1)の解の積分項を台形近似すると、状態量 Z は次のようになる。

$$Z(t) = D(t-\Delta) + \frac{\Delta}{2} \left\{ BU(t) + W_1 \ddot{z}_g(t) \right\} \quad (14)$$

$$\text{ただし、} \quad D(t-\Delta) = e^{A\Delta} \left[Z(t-\Delta) + \frac{\Delta}{2} \left\{ BU(t-\Delta) + W_1 \ddot{z}_g(t-\Delta) \right\} \right] \quad (15)$$

b) 評価関数

次に、時間依存型の評価関数として、着目時刻 t での運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーと制御エネルギーおよびその時点までの総地震入力エネルギーの和を考え、それを最小にするような制御力を求める。Sato et al.⁴⁾のアルゴリズムに従えば、エネルギーの関係式は、運動方程式の両辺に $\dot{X}^T(t)$ を掛けて、時刻0から時刻 t までの積分をとると、次のようになる。

$$\int_0^t \dot{X}^T(\tau) M \ddot{X}(\tau) d\tau + \int_0^t \dot{X}^T(\tau) C \dot{X}(\tau) d\tau + \int_0^t \dot{X}^T(\tau) K X(\tau) d\tau + \int_0^t \dot{X}^T(\tau) m \ddot{z}_g(\tau) = \int_0^t \dot{X}^T(\tau) H U(\tau) d\tau \quad (16)$$

式(16)の左辺は、時刻 $t-\Delta$ から時刻 t までと時刻0から時刻 $t-\Delta$ までの項に分けて考えられる。すなわち、次式が成り立つ。

$$\frac{1}{2} \dot{X}^T(t) M \dot{X}(t) + \frac{\Delta}{2} \dot{X}^T(t) C \dot{X}(t) + \frac{\Delta}{2} \dot{X}^T(t) K X(t) + \frac{\Delta}{2} \dot{X}^T(t) m \ddot{z}_g(t) + E(t-\Delta) = \int_0^t \dot{X}^T(\tau) H U(\tau) d\tau \quad (17)$$

ここでは、時刻 $t-\Delta$ から時刻 t までの2次形式の評価関数と総地震入力エネルギーを考え、時間依存型の評価関数 $J(t)$ を次のように設定する。

$$J(t) = \frac{1}{2} \Delta \{ Z^T(t) Q Z(t) + U^T(t) R U(t) + S(t-\Delta) \} + \alpha \{ Z^T(t) W_2 \ddot{z}_g(t) + E(t-\Delta) \} \quad (18)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} W_2 &= \left\{ \begin{array}{c} O \quad \frac{\Delta}{2} m^T \\ \frac{1}{2} K \quad O \\ O \quad \frac{1}{2} M \end{array} \right\}^T \\ Q_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} K & O \\ O & \frac{1}{2} M \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} O & O \\ \frac{\Delta}{2} K & \frac{\Delta}{2} C + \frac{1}{2} M \end{bmatrix} \\ Q &= Q_1 + \alpha Q_2 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} K & O \\ \frac{\Delta}{2} \alpha K & \frac{\Delta}{2} \alpha C + \frac{1+\alpha}{2} M \end{bmatrix} \\ S(t-\Delta) &= Z^T(t-\Delta) Q_1 Z(t-\Delta) + U^T(t-\Delta) R U(t-\Delta) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここで、式(18)の第1項目は、時刻 $t-\Delta$ から時刻 t までの運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーと制御エネルギーを評価したものである。ただし、式(17)の左辺第1項目から第3項目の値(マトリックス Q_2 に関する項)が含まれている。式(18)の第2項目は、時刻0から時刻 $t-\Delta$ までの総地震入力エネルギーを含めて評価したもので、式(17)の左辺第4と第5項目を意味する。なお、 α は式(18)の第1項目と第2項目の比を表したものである。また、 R は制御力の重み係数マトリックス($\text{diag}(r_i)$)である。

c) 最適制御力

ここでは、式(14)の拘束条件の下で、式(18)によって与えられた評価関数 $J(t)$ を最小化するように、ラグランジュの未定乗数法を用いる。このため、拡張された評価関数を次のように設定する。

$$J'(t) = \frac{1}{2} \Delta \{ Z^T(t) Q Z(t) + U^T(t) R U(t) + S(t - \Delta) \} + \alpha \{ Z^T(t) W_2 \ddot{z}_g(t) + E(t - \Delta) \} + \Lambda \left[Z(t) - D(t - \Delta) - \frac{\Delta}{2} \{ B U(t) + W_1 \ddot{z}_g(t) \} \right] \quad (20)$$

ここに、 Λ はラグランジュ乗数ベクトルである。

式(20)の拡張された評価関数を最小化するための必要条件は次の3つである。

$$\frac{\partial J'}{\partial Z} = 0, \quad \frac{\partial J'}{\partial U} = 0, \quad \frac{\partial J'}{\partial \Lambda} = 0 \quad (21a, b, c)$$

式(20)と条件式(21a,b,c)より、以下の式が導かれる。

$$\frac{\Delta}{2} (Q + Q^T) Z(t) + \alpha W_2 \ddot{z}_g(t) + \Lambda^T = 0 \quad (22a)$$

$$\Delta R U(t) - \frac{\Delta}{2} B^T \Lambda^T = 0 \quad (22b)$$

$$Z(t) = D(t - \Delta) + \frac{\Delta}{2} \{ B U(t) + W_1 \ddot{z}_g(t) \} \quad (22c)$$

式(22c)は拘束条件式(14)そのものである。式(22a)と式(22b)より、 Λ を消去すると、制御力 $U(t)$ は次のようになる。

$$U(t) = -\frac{\Delta}{4} R^{-1} B^T (\hat{Q} + \hat{Q}^T) \hat{Z}(t) - \frac{\alpha}{2} R^{-1} B^T W_2 \ddot{z}_g(t) \quad (23)$$

ここで、 \hat{Q} と $\hat{Z}(t)$ は、それぞれ、同定アルゴリズムによって求められた推定パラメーター(剛性 K と減衰 C)と推定応答量(相対変位と相対速度)によって評価される量である。なお、補遺 A. では質量も推定パラメーターとして採用している。しかし、数値計算ではこれを確定量としたため、上記のように設定した。

3. 数値計算例および考察

上述した逐次型推定制御アルゴリズムの有効性を確認するため、図1に示すように、最上階にアクティブマスダンパーを設置した線形5自由度構造物を計算の対象とした。表1は各質点における質量、剛性と減衰を示したものである。ここでは、全質点の加速度応答と図5の地動加速度(El Centro波)をセンサーで検知し、最上階の最適制御力を求めた。なお、質量は既知とし、全質点の剛性と減衰を未知パラメーターと考えた。

図2のフローに従い、WILFS 構造同定を行う際の未知パラメーターの初期平均値はわかっているとした。また、パラメーターの初期推定誤差共分散は、ガウス分布の仮定と平均値の大きさを考えて、与えた。式

表1 5質点系構造モデル

質点	質量 m (ton/gal)	剛性 k (ton/cm)
1層	6.22	4814
2層	3.16	2490
3層	2.66	1049
4層	0.35	605
5層	1.22	111

減衰 $c = 0.0051k$ (ton/kine)

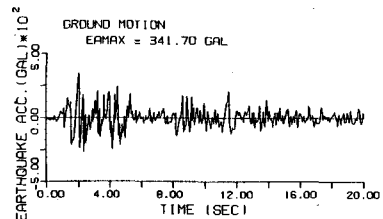


図5 地震入力加速度

(20)中の α は 10^{-2} 、制御の重み係数 r_i すなわち R は 10^{-4} と設定した。ローカルな繰り返しに伴う重みの W は、種々の検討の結果、1よりも少し小さ目の値にした。

図6は、無制御時における3つの質点(1, 3, 5)における変位応答を示したものである。これは運動方程式を直接解いて求めた応答波形である。図より、対象とした構造物は最上部が非常に揺れやすい構造を有していることがわかる。これは、最上層の質量が大きく、剛性が小さいためである。振動モードを勘案すると、最上層は大きく揺れることが理解できる。最上層が応答は、第4層に比べて、5倍強に増幅されている。このため、ここでは最上層の揺れを抑えることを特に制御の目標とする。

図7は、最適制御力が最上部に作用したときの各質点(1, 3, 5)の変位応答を示したものである。制御力(図8)は、その時点における構造物全体の総地震入力エネルギーが最小となるように決定されている。制御力は約0.5秒前後にスパイクを示している。これは、この時間前後における構造パラメーターの推定に左右されたものである。図7からわかるように、図6の無制御時の変位応答に比べて、各応答量はかなり低減されており、制御の効果は明らかである。特に、最も揺れやすい最上部では、約10分の1にまで低減されており、揺れにくくなっていることがわかる。

WILFS構造同定法によって逐次的に求めた構造パラメーター(第1, 3と5層目の剛性と減衰)の時系列変化は、図9のようになる。図9より、入力加速度の強震部付近で、剛性の推定値はあまりよくないことがわかる。しかし、その後は地動と応答の観測値に追従して、真値に収束していく傾向にある。剛性は、全体的に見れば、うまく推定できていると言える。このことは、前述した入力加速度に応じて、図4のように反復計算の重み W を変更したことにより、推定精度の向上を図れたことを示唆するものである。

一方、剛性に比べて、減衰が推定応答に与える感度は小さかった。そのため、図9よりわかるように、最

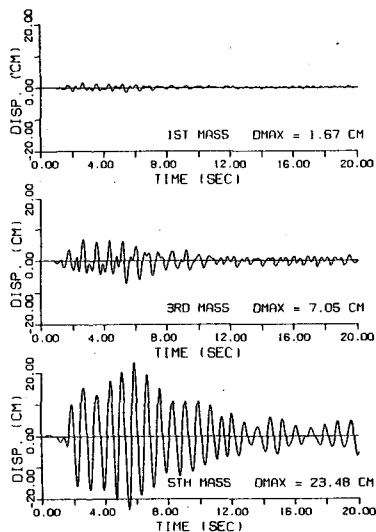


図6 無制御時における変位応答

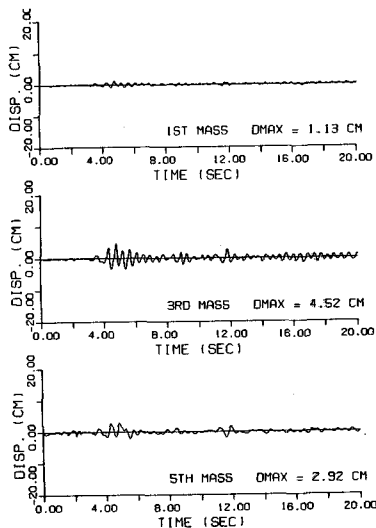


図7 制御時における変位応答

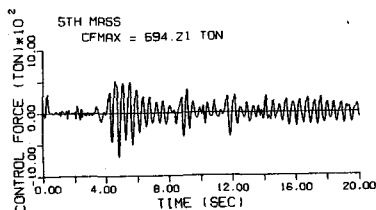


図8 最適制御力

下層(質点1)の減衰は、強震部から急激に変化し始め、真値より低い値に収束した。しかし、他の質点における減衰の推定値は時系列的に極端に変化しなかった。このことは、減衰定数を推定することが剛性のそれに比べて、非常に難しいことを意味する。

多自由度系の構造同定は、様々な工夫をして効率化を図らなければ、難しいと言われている。本研究では、このような構造同定を行いながら、最適制御を実施している。同定の精度は一部でよくない点もあるが、強震部付近を除いて、全体的にはバランスのとれた構造同定と制御を行うことができた。

一般に、制御力の重み係数 R を減少させると、制御力は増大し、応答量は減少するというトレードオフの関係が成立する。そのため、パラメータの R や α を変化させて、構造同定を伴う振動制御の計算を実施したが、上記と同様の結果が得られた。

本研究によりわかるように、同定と振動制御を同時に実施することは困難を伴う場合もある。振動制御を行わず構造同定のみを実施しても、減衰の推定精度は剛性に比べてあまり良くないことが知られている。従って、適応制御を実構造物に適用する際には、本論で扱ったような数理的アプローチを取るのではなく、ニューラルの解法を用いることも必要であろう。

4. 結論

本研究では、ローカルな繰り返しによって観測方程式の、さらにスムージングを併用して状態方程式の非線形性に伴う推定誤差の増大を低減させる逐次型推定アルゴリズムを提案した。最適制御力は、上記アルゴリズムによって推定した応答量と推定パラメータを用いると、フィードバック・フィードフォワードの最適制御則から計算できる。このように、本方法は構造同定と制御力を同時に算出できる利点を有している。主な結果をまとめれば、次のようになる。

- 1) WILFS 法では、構造同定を時々刻々行えるために、最適な状態推定値を容易に得ることができる。同時に、開閉ループ制御則を用いて、逐次的に最適振動制御を行えるメリットを有する。
- 2) 本アルゴリズムを多層の建築構造物に適用したところ、加速度応答の観測量に基づいてパラメータの安定解が得られるとともに、無制御時の応答に比べて、制振効果が明らかになった。特に、減衰に比べて、剛性の同定結果はかなり良かった。

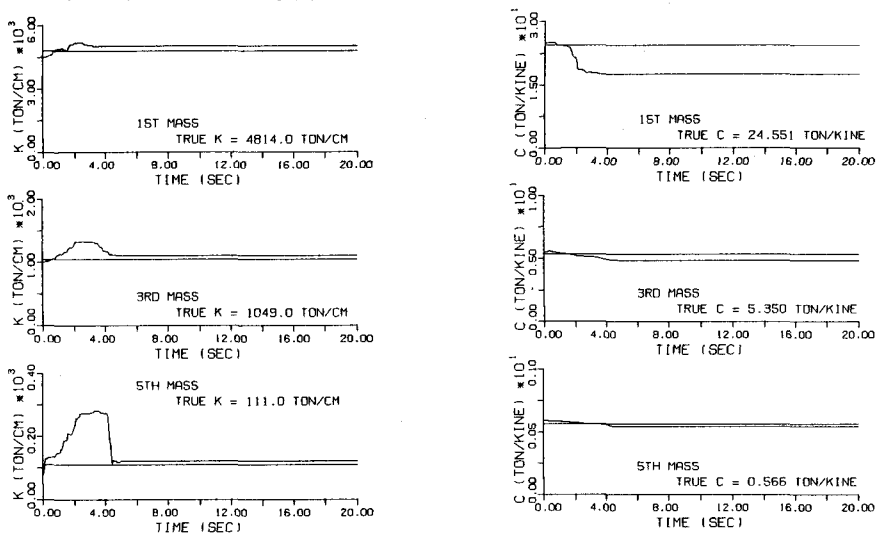


図9 剛性と減衰の推定値の時系列変化

参考文献

- 1) 齊藤 悦郎: EK-WGI法の開発と振動工学における同定問題への応用に関する研究、武蔵工業大学博士論文、昭和61年2月。
- 2) Jazwinski, A.H.: Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, 1970.
- 3) Wishner, R.P., J.A. Tabaczynski and M. Athans: A comparison of three non-linear filters, Automatica, Vol.5, pp.487 ~ 496, 1969.
- 4) Sato, T., K. Toki and K. Sugiyama: Optimal control of seismic response of structures, Structural Eng./Earthq. Eng., Vol.7, No.1, pp.179s ~ 188s, April 1990.

補遺 A. WILFS 法による構造同定

一般に、構造応答(状態量)の観測データにはノイズや計器特性が含まれる。さらに、状態量の全てが観測できるとは限らない。このような問題点に対処するため、フィルター理論では、状態方程式とは別に、状態量を変換した観測方程式を導入している。

本研究では、式(1)の線形連続型状態方程式と式(2)の線形離散型観測方程式を対象としている。式(1)は、式(23)を考慮すると、次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} X(t) &= \dot{X}(t) \\ \frac{d}{dt} \dot{X}(t) &= - \left\{ \begin{aligned} M^{-1}K + \frac{(\Delta)^2}{8} \alpha M^{-1} R' M^{-1} K \\ M^{-1}C + \frac{(\Delta)^2}{4} \alpha M^{-1} R' M^{-1} C + \frac{\Delta(1+\alpha)}{4} M^{-1} R' \end{aligned} \right\} X \\ &\quad - \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta}{4} \alpha M^{-1} R' \{ \mathbf{1} \} + \{ \mathbf{1} \} \end{aligned} \right\} \ddot{z}_g \end{aligned} \right\} \quad (A1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし、} \quad R' &= H R^{-1} H^T = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & r'_i & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \\ r'_i &= \frac{\delta_i}{r_i} \quad (i \text{ 層を制御するとき } \delta_i = 1, \text{ その他 } \delta_i = 0) \end{aligned} \right\} \quad (A2)$$

式(2)中の P は、観測マトリックスで、 i 層(質点)の応答を観測するとき $p_i = 1$ 、観測しないとき $p_i = 0$ となる。

$$P = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & p_i & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \quad (A3)$$

式(1)ではシステムノイズを考慮していない。一方、式(2)の $V(t_k)$ は観測ノイズで、以下の性質を満たす。

$$\left. \begin{aligned} E[V(t_k)] &= 0 \\ E[V(t_k)V^T(\tau)] &= \Lambda(t_k)\delta(t_k - \tau) \end{aligned} \right\} \quad (A4)$$

式(1)は、未知パラメーター(質量、剛性と減衰)を含む状態空間表示に拡張することができる。そのため、 n 質点系の変位応答を X_1 、速度応答を X_2 と定義する。さらに、各質点単独系の固有円振動数、減衰定数と質量に関する状態量として、 $X_3 \sim X_5$ を考える。すなわち、次式を定義する。

$$\left. \begin{aligned}
 X_1 &= \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T \\
 X_2 &= \{\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n\}^T \\
 &= \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}\}^T \\
 X_3 &= \left\{ \frac{k_1}{m_1}, \frac{k_2}{m_1}, \dots, \frac{k_i}{m_i}, \frac{k_{i+1}}{m_i}, \dots, \frac{k_{n-1}}{m_{n-1}}, \frac{k_n}{m_{n-1}}, \frac{k_n}{m_n} \right\}^T \\
 &= \{x_{2n+1}, x_{2n+2}, \dots, x_{4n-1}\}^T \\
 X_4 &= \left\{ \frac{c_1}{m_1}, \dots, \frac{c_i}{m_i}, \dots, \frac{c_n}{m_n} \right\}^T \\
 &= \{x_{4n}, x_{4n+1}, \dots, x_{5n-1}\}^T \\
 X_5 &= \left\{ \frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_i}, \dots, \frac{1}{m_n} \right\}^T \\
 &= \{x_{5n}, x_{5n+1}, \dots, x_{6n-1}\}^T
 \end{aligned} \right\} \quad (A5)$$

なお、 X_4 については、 X_3 と異なり、文献1)を参照にすると、次式のような変換を用いることができるため、推定パラメーターの数を $(2n-1)$ から n に減らすことができる。

$$\begin{aligned}
 \frac{c_{i+1}}{m_i} &= \frac{c_{i+1}}{m_{i+1}} \times \frac{k_{i+1}/m_i}{k_{i+1}/m_{i+1}} \\
 &= x_{4n+i} \times \frac{x_{2n+2i}}{x_{2n+(2i+1)}}
 \end{aligned} \quad (A6)$$

(ただし、 $i = 1, \dots, n-1$)

以上の結果、式(1)の状態方程式は次のようになる。

$$\frac{dX}{dt} = f(X, t) \quad (A7)$$

$$\begin{aligned}
 \text{ただし、} X &= (X_1^T, X_2^T, X_3^T, X_4^T, X_5^T)^T \\
 &= (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n | \dot{x}_{n+1}, \dots, \dot{x}_{2n} | \dot{x}_{2n+1}, \dots, \dot{x}_{4n-1} | \dot{x}_{4n}, \dots, \dot{x}_{5n-1} | \dot{x}_{5n}, \dots, \dot{x}_{6n-1}) \\
 &= (x_{n+1}, \dots, x_{2n} | \dots, g_i, \dots | \dots, 0, \dots | \dots, 0, \dots | \dots, 0, \dots)
 \end{aligned} \quad (A8)$$

なお、上式の加速度成分 g_i については補遺B.(1)を参照されたい。

本研究では、観測量として、絶対加速度応答を用いている。式(2)を未知パラメーターを含む状態量 X (式(A8))で表すと、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 Y(t_k) &= Ph(X, t_k) + V(t_k) \\
 &= P \begin{Bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_i \\ \vdots \\ h_n \end{Bmatrix} + V(t_k)
 \end{aligned} \quad (A9)$$

$$\text{ただし、} \quad h_i = g_i + \ddot{z}_g \quad (A10)$$

式(A7)の状態方程式と式(A9)の観測方程式を基本としたWILFS法の推定アルゴリズムが式(4)~(12)である。観測方程式の非線形性は式(10)によって、状態方程式の非線形性は式(12)によって改善される。

数値計算で対象とした5質点系に着目すると、式(13)の推移行列 Φ と変換行列 M は、おのおの、式(A11)と式(A13)で表せる。

$$\Phi = \begin{bmatrix} I & \phi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} + I & \phi_{23} & \phi_{24} & \phi_{25} \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (A11)$$

$$\text{ただし、} \quad \phi_{ij} = \Delta \left[\frac{\partial f_i(\bar{X}, t)}{\partial X_j} \right] \quad (\text{A12})$$

$$M = \begin{bmatrix} m'_1 & m'_2 & m'_3 & m'_4 & m'_5 \end{bmatrix} \quad (\text{A13})$$

$$\begin{aligned} \text{ただし、} \quad m'_j &= \left[\frac{\partial h_i(X, t_k)}{\partial X_j} \right] \\ &= \left[\frac{\phi_{2j}}{\Delta} \right] \quad (\text{ただし、} j = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (\text{A14})$$

なお、式(A11)のサブマトリックス ϕ_{ij} を具体的に示すと、補遺B.(2)のようになる。

本アルゴリズムによれば、 $\hat{X}(t_{k-1}|t_{k-1})$ と $P(t_{k-1}|t_{k-1})$ が与えられると、まず、式(6)~(9)と式(11)を計算することができる。式(10)において、観測方程式の非線形性に伴う推定誤差の増大は、基本軌道回りで近似的に線形化することにより、低減される。式(12)では、このようにして時刻 t_k において推定された値を基準に、時刻 t_{k-1} での推定値をスムージングすることによって、解を改善している。このことは状態方程式の非線形性に伴う誤差の増大を低減していることにつながる。

以上の手続を反復的に n 回繰り返すことによって収束した式(10)の推定値を用いると、時刻 t_k での最適推定値は式(A15)で、推定誤差共分散は式(A16)で求められる。

$$\hat{X}_{k/k} = \eta^{(n)} \quad (\text{A15})$$

$$P_{k/k} = [I - K_k^{(n)} M_k^{(n)}] P_{k/k-1}^{(n)} [I - K_k^{(n)} M_k^{(n)}]^T + K_k^{(n)} \Lambda(k) K_k^{(n)T} \quad (\text{A16})$$

補遺B. 同定アルゴリズムに必要な式

(1) 加速度応答 g_i (式(A7))

式(A7)の加速度応答 g_i は、式(A1)の第2式を状態変数で表すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} g_1 &= \dot{x}_{n+1} \\ &= -(x_{2n+1} + x_{2n+2}) \left(1 + \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_1 x_{5n} \right) x_1 + x_{2n+2} \left(1 + \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_1 x_{5n} \right) x_2 \\ &\quad - \left(x_{4n} + x_{4n+1} \frac{x_{2n+2}}{x_{2n+3}} \right) \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_1 x_{5n} \right) x_{n+1} - \frac{\Delta(1+\alpha)}{4} r'_1 x_{5n} x_{n+1} \\ &\quad + x_{4n+1} \frac{x_{2n+2}}{x_{2n+3}} \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_1 x_{5n} \right) x_{n+2} - \left(1 + \frac{\Delta}{4} \alpha r'_1 x_{5n} \right) \ddot{z}_g \end{aligned} \quad (\text{B1})$$

⋮

$$\begin{aligned} g_i &= \dot{x}_{n+i} \\ &= x_{2n+(2i-1)} \left(1 + \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_i x_{5n+(i-1)} \right) x_{i-1} - \left(x_{2n+(2i-1)} + x_{2n+2i} \right) \left(1 + \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_i x_{5n+(i-1)} \right) x_i \\ &\quad + x_{2n+2i} \left(1 + \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_i x_{5n+(i-1)} \right) x_{i+1} + x_{4n+(i-1)} \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_i x_{5n+(i-1)} \right) x_{n+(i-1)} \\ &\quad - \left(x_{4n+(i-1)} + x_{4n+i} \frac{x_{2n+2i}}{x_{2n+(2i+1)}} \right) \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_i x_{5n+(i-1)} \right) x_{n+i} - \frac{\Delta(1+\alpha)}{4} r'_i x_{5n+(i-1)} x_{n+i} \\ &\quad + x_{4n+i} \frac{x_{2n+2i}}{x_{2n+(2i+1)}} \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_i x_{5n+(i-1)} \right) x_{n+(i+1)} - \left(1 + \frac{\Delta}{4} \alpha r'_i x_{5n+(i-1)} \right) \ddot{z}_g \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

(ただし、 $i = 2, \dots, n-1$)

⋮

$$g_n = \dot{x}_{2n}$$

$$\begin{aligned}
&= x_{4n-1} \left(1 + \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_n x_{6n-1} \right) x_{n-1} - x_{4n-1} \left(1 + \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_n x_{6n-1} \right) x_n + x_{5n-1} \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_n x_{6n-1} \right) x_{2n-1} \\
&\quad - x_{5n-1} \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_n x_{6n-1} \right) x_{2n} - \frac{\Delta(1+\alpha)}{4} r'_n x_{6n-1} x_{2n} - \left(1 + \frac{\Delta}{4} \alpha r'_n x_{6n-1} \right) \ddot{z}_g \quad (B3)
\end{aligned}$$

(2) 推移行列 ϕ_{ij} (式(A11))

式(A11)の推移行列は、式(A12)を用いれば、次式で表せる。

$$\phi_{12} = \begin{bmatrix} \ddots & & O \\ & \Delta & \\ O & & \ddots \end{bmatrix} \quad (B4)$$

$$\phi_{21} = \Delta \begin{bmatrix} F_{21,11}, & F_{21,12}, & & & O \\ & \ddots & & & \\ & & F_{21,i(i-1)}, & F_{21,ii}, & F_{21,i(i+1)}, \\ & & & \ddots & \\ O & & & & F_{21,n(n-1)}, & F_{21,nn} \end{bmatrix} \quad (B5)$$

$$\phi_{22} = \Delta \begin{bmatrix} F_{22,11}, & F_{22,12}, & & & O \\ & \ddots & & & \\ & & F_{22,i(i-1)}, & F_{22,ii}, & F_{22,i(i+1)}, \\ & & & \ddots & \\ O & & & & F_{22,n(n-1)}, & F_{22,nn} \end{bmatrix} \quad (B6)$$

$$\phi_{23} = \Delta \begin{bmatrix} F_{23,11}, & F_{23,12}, & F_{23,13}, & & O \\ & \ddots & & & \\ & & F_{23,i(2i-1)}, & F_{23,i(2i)}, & F_{23,i(2i+1)}, \\ & & & \ddots & \\ O & & & & & F_{23,n(2n-1)} \end{bmatrix} \quad (B7)$$

$$\phi_{24} = \Delta \begin{bmatrix} F_{24,11}, & F_{24,12}, & & & O \\ & \ddots & & & \\ & & F_{24,ii}, & F_{24,i(i+1)} & \\ & & & \ddots & \\ O & & & & & F_{24,nn} \end{bmatrix} \quad (B8)$$

$$\phi_{25} = \Delta \begin{bmatrix} F_{25,11}, & & & & O \\ & \ddots & & & \\ & & F_{25,ii}, & & \\ & & & \ddots & \\ O & & & & & F_{25,nn} \end{bmatrix} \quad (B9)$$

ただし、式(B4)~式(B9)中の要素 $F_{ij,kl}$ を具体的に示すと、次のようになる。

a) ϕ_{21} の要素について

$$F_{21,11} = -(x_{2n+1} + x_{2n+2}) \left(1 + \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_1 x_{5n} \right)$$

$$F_{21,12} = x_{2n+2} \left(1 + \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_1 x_{5n} \right)$$

⋮

$$\begin{aligned}
F_{21,i(i-1)} &= x_{2n+(2i-1)} \left(1 + \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_i x_{5n+(i-1)} \right) \\
F_{21,ii} &= -(x_{2n+(2i-1)} + x_{2n+2i}) \left(1 + \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_i x_{5n+(i-1)} \right) \\
F_{21,i(i+1)} &= x_{2n+2i} \left(1 + \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_i x_{5n+(i-1)} \right) \\
&\quad (\text{ただし、} i = 2, \dots, n-1) \\
&\vdots \\
F_{21,n(n-1)} &= x_{4n-1} \left(1 + \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_n x_{6n-1} \right) \\
F_{21,nn} &= -x_{4n-1} \left(1 + \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_n x_{6n-1} \right)
\end{aligned}$$

以上 (B10)

b) ϕ_{22} の要素について

$$\begin{aligned}
F_{22,11} &= - \left(x_{4n} + x_{4n+1} \frac{x_{2n+2}}{x_{2n+3}} \right) \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_1 x_{5n} \right) - \frac{\Delta(1+\alpha)}{4} r'_1 x_{5n} \\
F_{22,12} &= x_{4n+1} \frac{x_{2n+2}}{x_{2n+3}} \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_1 x_{5n} \right) \\
&\vdots \\
F_{22,i(i-1)} &= x_{4n+(i-1)} \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_i x_{5n+(i-1)} \right) \\
F_{22,ii} &= - \left(x_{4n+(i-1)} + x_{4n+i} \frac{x_{2n+2i}}{x_{2n+(2i+1)}} \right) \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_i x_{5n+(i-1)} \right) \\
&\quad - \frac{\Delta(1+\alpha)}{4} r'_i x_{5n+(i-1)} \\
F_{22,i(i+1)} &= x_{4n+i} \frac{x_{2n+2i}}{x_{2n+(2i+1)}} \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_i x_{5n+(i-1)} \right) \\
&\quad (\text{ただし、} i = 2, \dots, n-1) \\
&\vdots \\
F_{22,n(n-1)} &= x_{5n-1} \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_n x_{6n-1} \right) \\
F_{22,nn} &= -x_{5n-1} \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_n x_{6n-1} \right) - \frac{\Delta(1+\alpha)}{4} r'_n x_{6n-1}
\end{aligned}$$

以上 (B11)

c) ϕ_{23} の要素について

$$\begin{aligned}
F_{23,11} &= - \left(1 + \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_1 x_{5n} \right) x_1 \\
F_{23,12} &= \left(1 + \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_1 x_{5n} \right) (x_2 - x_1) \\
&\quad + \frac{x_{4n+1}}{x_{2n+3}} \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_1 x_{5n} \right) (x_{n+2} - x_{n+1}) \\
F_{23,13} &= x_{4n+1} \frac{x_{2n+2}}{x_{2n+3}} \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_1 x_{5n} \right) (x_{n+1} - x_{n+2}) \\
&\vdots \\
F_{23,i(2i-1)} &= \left(1 + \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_i x_{5n+(i-1)} \right) (x_{i-1} - x_i) \\
F_{23,i(2i)} &= \left(1 + \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_i x_{5n+(i-1)} \right) (x_{i+1} - x_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{x_{4n+i}}{x_{2n+(2i+1)}} \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_i x_{5n+(i-1)} \right) (x_{n+(i+1)} - x_{n+i}) \\
F_{23,i(2i+1)} &= x_{4n+i} \frac{x_{2n+2i}}{x_{2n+(2i+1)}} \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_i x_{5n+(i-1)} \right) (x_{n+i} - x_{n+(i+1)}) \\
& \quad (\text{ただし, } i = 2, \dots, n-1)
\end{aligned}$$

$$\vdots \\
F_{23,n(2n-1)} = \left(1 + \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_n x_{6n-1} \right) (x_{n-1} - x_n)$$

以上 (B12)

d) ϕ_{24} の要素について

$$\begin{aligned}
F_{24,11} &= - \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_1 x_{5n} \right) x_{n+1} \\
F_{24,12} &= \frac{x_{2n+2}}{x_{2n+3}} \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_1 x_{5n} \right) (x_{n+2} - x_{n+1}) \\
& \quad \vdots \\
F_{24,ii} &= \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_i x_{5n+(i-1)} \right) (x_{n+(i-1)} - x_{n+i}) \\
F_{24,i(i+1)} &= \frac{x_{2n+2i}}{x_{2n+(2i+1)}} \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_i x_{5n+(i-1)} \right) (x_{n+(i+1)} - x_{n+i}) \\
& \quad (\text{ただし, } i = 2, \dots, n-1)
\end{aligned}$$

$$\vdots \\
F_{24,nn} = \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_n x_{6n-1} \right) (x_{2n-1} - x_{2n})$$

以上 (B13)

e) ϕ_{25} の要素について

$$\begin{aligned}
F_{25,11} &= - \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_1 (x_{2n+1} + x_{2n+2}) x_1 + \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_1 x_{2n+2} x_2 \\
& \quad - \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_1 \left(x_{4n} + x_{4n+1} \frac{x_{2n+2}}{x_{2n+3}} \right) x_{n+1} - \frac{\Delta(1+\alpha)}{4} r'_1 x_{n+1} \\
& \quad + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_1 x_{4n+1} \frac{x_{2n+2}}{x_{2n+3}} x_{n+2} - \frac{\Delta}{4} \alpha r'_1 \ddot{z}_g
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \quad \vdots \\
F_{25,ii} &= \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_i x_{2n+(2i-1)} (x_{i-1} - x_i) + \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_i x_{2n+2i} (x_{i+1} - x_i) \\
& \quad + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_i x_{4n+(i-1)} (x_{n+(i-1)} - x_{n+i}) \\
& \quad + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_i x_{4n+i} \frac{x_{2n+2i}}{x_{2n+(2i+1)}} (x_{n+(i+1)} - x_{n+i}) \\
& \quad - \frac{\Delta(1+\alpha)}{4} r'_i x_{n+i} - \frac{\Delta}{4} \alpha r'_i \ddot{z}_g \\
& \quad (\text{ただし, } i = 2, \dots, n-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \quad \vdots \\
F_{25,nn} &= \frac{\Delta^2}{8} \alpha r'_n x_{4n-1} (x_{n-1} - x_n) + \frac{\Delta^2}{4} \alpha r'_n x_{5n-1} (x_{2n-1} - x_{2n}) \\
& \quad - \frac{\Delta(1+\alpha)}{4} r'_n x_{2n} - \frac{\Delta}{4} \alpha r'_n \ddot{z}_g
\end{aligned}$$

以上 (B14)