第3回システム最適化に関するシンポジウム講演論文集　1993年12月

(39) 有限要素法による弾性体の最適形状設計

A DESIGN OF SHAPE OPTIMIZATION OF ELASTIC BODY BY FINITE ELEMENT METHOD

田村　武*　　斉藤　恭之**
Takeshi TAMURA , Takayuki SAITO

One of the most interesting problems in the application of optimization technique to civil engineering structure is the determination of shape of structure itself. Thus far, various theories for this shape optimization problem of elastic structure have been published. In the present paper, optimal shape is derived by minimization of compliance with keeping equality of the total volume. Optimality criteria for the minimum compliance are obtained by means of a variational principle (a necessary condition), and they are solved numerically by the finite element method to confirm the validity. Finally the results of several examples of the present method are illustrated.

Key Word : compliance, variational principle, finite element method

1. まえがき

本研究では，弾性体の形状最適化を有限要素法を用いて数値解析する．最適設計は，土木構造物を考えるうえで，非常に興味深く重要な課題の1つである．最適設計には，構造部材の最適化，トラス・はり構造の最適化などがあるが，本研究では，構造物の形状の最適化を行う．構造物の最適形状を解析する場合には，様々な問題の設定方法があるが，ここでいう最適な形状とは，常に等体積条件を満足させながら，外力仕事（コンプライアンス）を最小とするような形状とする．最適形状の必要条件としては，変分法により導いたオイラーの方程式を用いた．

本研究の目的は，これらの制約条件，必要条件を満たしながら，有限要素法により数値解析を通して最適形状を生みだすプログラムを作成し，その有効性を評価することであるが，ここでは構造力学による理論解，および数理計画法による結果と比較しながら本手法の有効性と問題点について考察した．

2. 解析の手法

前述したように，ここでいう最適な形状とは与えられた外力に対して，外力仕事(コンプライアンス)が最小となるような形状とした．コンプライアンスとは柔らかさというような意味であり剛性の逆数のような意味として定義される．一定荷重のもとで生ずる変位，すなわち構造物になされる外力仕事は，ひずみエネルギーとして内部にたくわえられる．したがって，

* 工博　京都大学助教授　工学部交通土木工学科　** 京都大学大学院　工学部土木工学科

$$min(\frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\epsilon_{ij}dV) \quad (ひずみエネルギーを最小)$$

を

$$V = V_0 \quad (等体積条件)$$

と以下のつりあい式と境界条件の下で解くことになる．ここで，σ_{ij}は応力，ϵ_{ij}はひずみ，f_iは物体力，u_iは変位，T_iは表面力である．

$$\sigma_{ij,j} \quad +f_i = 0 \qquad \text{in V} \tag{1}$$

$$T_i \quad = \sigma_{ij}n_j \qquad \text{in} \quad S_\sigma \tag{2}$$

全ポテンシャル・エネルギー：

$$I = \int_V (\frac{1}{2}\sigma_{ij}\epsilon_{ij} - f_i u_i)dV - \int_{S_\sigma}(T_i u_i)dS \tag{3}$$

を用いれば上記の問題は

$$Max_{S_X}\, min_{u_i} I \quad \text{sub to } V = V_0 \tag{4}$$

と等価である．なぜなら，Iを先に最小化するためには(1)と(2)が必要条件となり，そのときのIの値は負のコンプライアンスとなるからである．しかし，本論文では $max\ min\ I$ を，領域と変位を同時に変動させて解くこととする．そうすると，必要条件として(1),(2)のつりあい式のほかは

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}\epsilon_{ij} - f_i u_i = \lambda \quad \text{(constant)} \qquad \text{on } S_X \tag{5}$$

が，3本目のオイラーの式として求められる．結局，等面積条件を保ちながら，(1),(2)とともにこの式を有限要素法で解く．

以上の理論により作成したプログラムを収束計算させながら最適な形状を求める(これをプログラム1とする)．一方，新たに制約条件(等面積条件のほか，たての幅が正という条件)を考慮した数理計画法プログラム(これをプログラム2とする)を作成し，両方を比較，検討してみた．

ただし，プログラム2における目的関数は外力仕事(コンプライアンス)であり，その微係数を必要とする．目的関数の微分には数値微分を使った．

3．解析結果

1. 静定構造物(片持ちばり)

図1に8要素の片持ちばりの最適形状の解析結果を示す．細線はプログラム1の計算値，太線はプログラム2の計算値である．右端に荷重1，モーメント1をかけている．また，はりの初期形状は長方形であり，下端部の形状のみを動かしている．端点で多少のずれはあるが，両者の結果はほぼ一致している．また(5)式から最適形状に近くなると(物体力がないとき)，下端に沿うひずみエネルギーは一様になる．図2にはその分布(各要素の下端部中央のひずみエネルギー)とその初期値の比較を示す．また図3で，目的関数(外力仕事)を収束回数ごとにプロットして比較してみた．

2. 不静定構造物

次に3径間連続ばり(真中を固定)と両端固定ばりを，それぞれ4要素で解析した．図4にプログラム1とプログラム2の形状の比較を示す．形状を見ると，荷重直下やモーメントが大きいところで幅が太くなっているというような傾向は似ているが，定量的には少々ずれている．

4．結論

静定構造物では端点に形状の多少のずれはあるものの，プログラム１とプログラム２の結果はほぼ一致し，各要素のひずみエネルギーもほとんど一様になる．一方，不静定構造物では，定性的な結果の比較しかできなかった．ここではプログラム２において目的関数の微分は数値微分で行ったが，今後の課題としては，それを解析的に微分し作成したプログラムに工夫を重ね，両プログラムの利点を有効にいかしながら，解析例を増やしより汎用性のあるプログラムを目指す．

《参考文献》

T.Tamura:A FUNDAMENTAL STUDY OF SHAPE OPTIMIZATION OF CONTINUUM,Proc. Korea-Japan Joint Seminer, PP.119-127,1992

斉藤　恭之：有限要素法による弾性体の最適形状設計，京都大学特別研究，平成５年３月

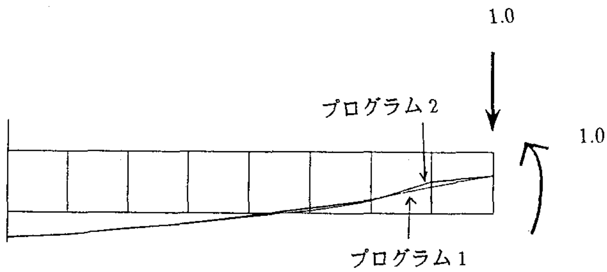

図1　　片持ちばりの形状比較

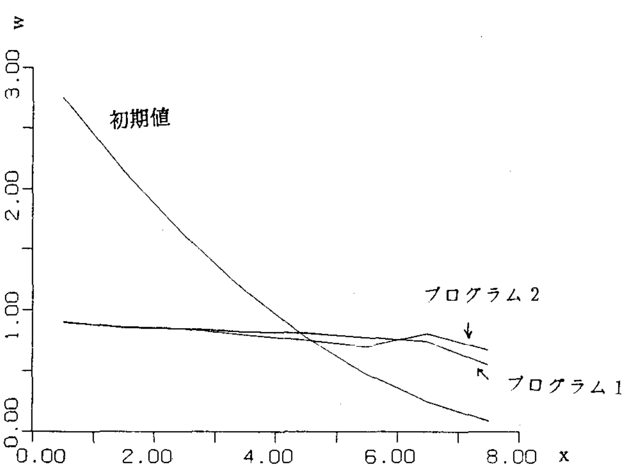

図2　　各要素のひずみエネルギーの分布の比較

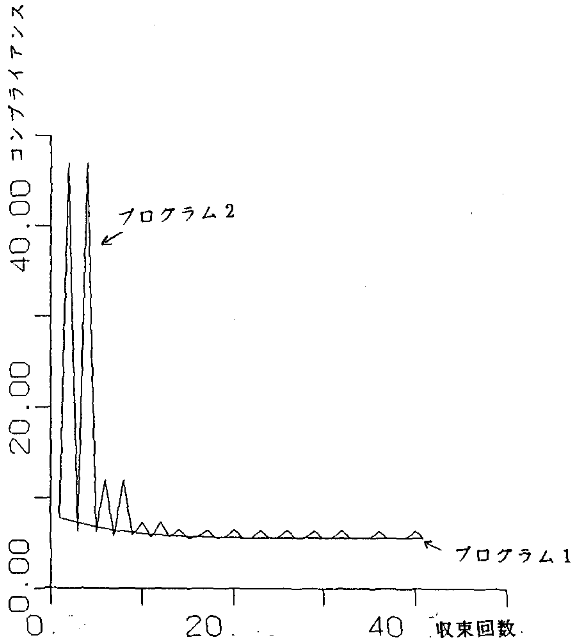

図 3　　収束回数ごとのコンプライアンスの比較

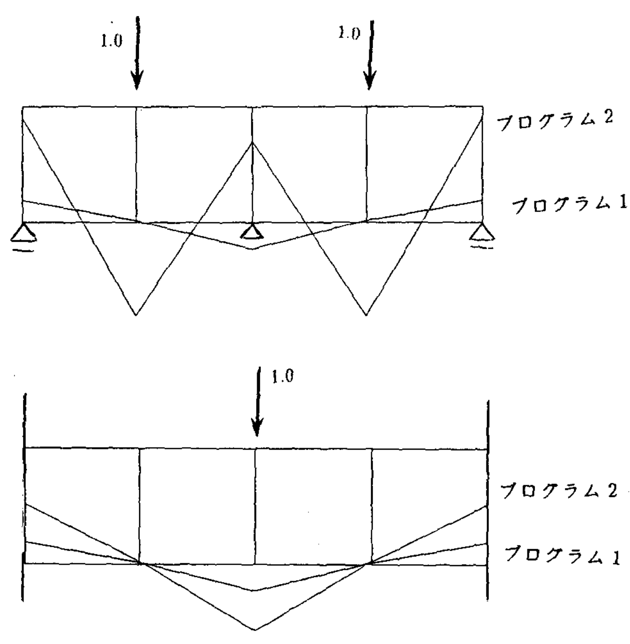

図 4　　不静定構造物の形状の比較