

(38) 境界要素法による二次元および三次元連続体の形状最適化

Shape Optimization of Two- and Three-Dimensional Bodies

by Boundary Element Method

山崎 光悦*

坂本 二郎**

Koetsu YAMAZAKI, Jiro SAKAMOTO

An efficient approximation method to determine the optimum shape of minimum weight subjected to stress constraints is suggested. The objective function of weight is approximated to an expansion of second-order Taylor series and the stress constraints to expansions of first-order Taylor series, based on the boundary element sensitivity analysis at current design point. Then the approximated subproblem is solved by a linear complementary pivot method. An adaptive mesh refinement technique is also adopted to keep the accuracy of the structural analysis. The efficiency of the approximation method suggested here is confirmed by applying to the minimum weight design problems of two- and three-dimensional bodies.

Key Words : Structural Optimum Design, Boundary Element Method, Shape Optimization, Approximation Method

1. 緒 言

数値計画法や最適性基準法によって形状を徐々に修正してゆく連続体の形状最適化法が、実用的な観点から近年注目を集め、有限要素法や境界要素法による構造解析を基礎とする種々の解法が提案されている^{1)~7)}。一般的な形状最適化問題への数値計画法と最適性基準法の適用性を考えると、種々の制約条件や目的関数を設定することが容易で汎用性の高い数値計画法による解法の方が有利である。しかし、任意形状の取扱いを可能とするには数多くの設計変数を取る必要があるため大次元の数値計画問題となり、さらには数値計画法を直接適用すると解の探索過程において設計点の移動のたびに変位や応力値などの評価のための構造解析を実施する必要がある、実用的な観点からは計算効率の問題となる。

そこで本報告では、有限要素法に比べて境界値を精度良く計算できること、要素分割や再分割が容易であるなどの利点を有する境界要素法による応力解析に基礎をおく形状最適化法の効率化について、応力制約下の二次元および三次元最小重量設計問題について検討した結果について報告する。まず、構造最適設計に占める構造解析、設計感度解析の計算時間が極めて大きいことから、構造解析、感度解析回数を低減させるための近似数値計画問題の構成法を示す。また、そのための直接微分法による設計感度解析法について詳述する。さらに二次元および三次元の最小重量設計問題に適用した数値例も示す。

2. 境界要素法による最小重量設計法の効率化

2.1 最小重量設計近似問題の構成 形状最適化問題のうち実用的にも重要な境界応力制約下の最小重量設計問題を考える。図1に示すような空間領域 Ω (境界を Γ)を占める二次元物体を考え、形状パ

* 工博 金沢大学助教授 工学部機械システム工学科

** 工修 金沢大学助手 工学部機械システム工学科

ラメータに関与する設計変数を $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{nd})^T$ (n_d は設計変数の数) とするとき、密度を ρ として目的関数の重量は次式の境界積分で表される。

$$f(\mathbf{b}) = \frac{\rho}{\beta} \int_{\Gamma} r_0 \frac{\partial r_0}{\partial n} d\Gamma \rightarrow \min \quad (1)$$

ここに、二次元の場合は $\beta=2$ 、三次元の場合は $\beta=3$ とする。境界上の点を (x_1, x_2) または (x_1, x_2, x_3) 、適当に選んだ基準点を (x_1^0, x_2^0) または (x_1^0, x_2^0, x_3^0) として、 $r_0^2 = (x_i - x_i^0)(x_i - x_i^0)$ 、また $\mathbf{n}$ を境界法線方向単位ベクトル、 n_i を方向余弦とすると $\partial r_0 / \partial n = (x_i - x_i^0) n_i / r_0$ 。ただし、以後ギリシャ小文字の添字は $i=1, 2, 3$ などとし、繰返し指標は総和規約に従うものとする。

一方、境界上に数点の観測点を考え、それら観測点の応力制約を考える。任意観測点 j の応力を σ_j 、その許容値をそれぞれ σ_{aj} と表すと、制約条件は次のように書ける。

$$g_j(\mathbf{b}) = \sigma_j / \sigma_{aj} - 1 \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

また設計変数の上下界制約を次のように課す。

$$b_i^L \leq b_i \leq b_i^U \quad (i = 1, 2, \dots, n_d) \quad (3)$$

ここに、 b_i^U, b_i^L は設計変数の上下界値とする。以上より最小重量設計問題は、式(2), (3)の制約条件の下で式(1)の重量を最小とする設計変数 $\mathbf{b}$ を見いだす問題となる。

上記の非線形設計問題は通常、数値計画法を用いて逐次解かれるが、境界応力や変位は境界要素法などの構造解析によって求める必要があるため、数値計画法によって設計点を改めるたびに繰返し構造解析や設計感度解析が実施され、最適解を得るまでの計算コストは膨大なものとなる。そこで最終的な解を得るまでの構造解析回数を減少し、最適化の効率を高めるため、1回の構造解析および設計感度解析結果を基に、目的関数を設計変数の二次に、応力制約を設計変数の一次にテーラー展開し、移動制約を課してその近似問題を逐次二次計画法などによって解く解法を考える。目的関数式(1)を設計点 $\mathbf{b}_0$ でテーラー展開し、二次までの項を取ると

$$f(\mathbf{b}) \cong \frac{1}{2} (\mathbf{b} - \mathbf{b}_0)^T \mathbf{C} (\mathbf{b} - \mathbf{b}_0) + (\nabla f)^T (\mathbf{b} - \mathbf{b}_0) + f(\mathbf{b}_0) \quad (4)$$

また制約制約条件はテーラー展開の一次までの項を取ると

$$g_j(\mathbf{b}) \cong (\nabla g_j)^T (\mathbf{b} - \mathbf{b}_0) + g_j(\mathbf{b}_0) \leq 0 \quad (5)$$

ここに、 ∇f は目的関数の設計変数に対する一次感度、 ∇g_j は制約条件の設計変数に対する一次感度、 $\mathbf{C}$ は目的関数の二次感度行列であり

$$\nabla f(\mathbf{b}) = \left(\frac{\partial f}{\partial b_1}, \frac{\partial f}{\partial b_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial b_{nd}} \right)^T \quad (6)$$

$$\nabla g_j(\mathbf{b}) = \left(\frac{\partial g_j}{\partial b_1}, \frac{\partial g_j}{\partial b_2}, \dots, \frac{\partial g_j}{\partial b_{nd}} \right)^T \quad (7)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial b_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial b_1 \partial b_{nd}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial b_{nd} \partial b_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial b_{nd}^2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

応力制約の一次感度は境界要素設計感度解析によって求むる必要がある。一方、式(4), (5)の近似精度を保证するため、設計変数の移動範囲を次式によって制限する。

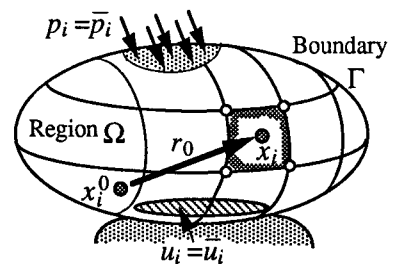


図1 形状最適化モデル

$$(1-\delta)b_0 \leq b \leq (1+\delta)b_0, \quad 0 < \delta < 1 \quad (i = 1, \dots, n_d) \quad (9)$$

実際の最適化過程では式(3)と上式のうち、厳しい方の上下限値が制約値としてとられる。

2.2 設計感度解析 上述の近似設計問題を構成するには、現設計点 b_0 での目的関数の一次および二次感度 $\partial f / \partial b_m, \partial^2 f / \partial b_m \partial b_n$ 、制約条件の一次感度 $\partial g_j / \partial b_m$ が必要となる。以下にその計算法を示す。

(1) 目的関数の設計感度 境界要素法によって構造解析を行なう場合、境界を要素に離散化し、要素内で $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ なる正規座標をとり、節点座標を x_{ij} (以下では英大文字添字は要素内節点数 N に対する指標 $J=1, 2, \dots, N$ などとする)、内挿関数を $N_J(\xi)$ あるいは $N_J(\xi, \eta)$ とすると、任意点の座標 x_i は

$$x_i = N_J x_{ij} \quad (10)$$

と表され、このとき式(1)は次のように離散化される。

$$f(b) = \frac{\rho}{\beta} \sum_e \int_{-1}^1 r_0 \frac{\partial r_0}{\partial n} |J| d\gamma = \frac{\rho}{\beta} \sum_e \int_{-1}^1 (x_i - x_i^0) n_i |J| d\gamma \quad (11)$$

ここに $\sum_e$ は境界要素に関する和を意味し、 $\int d\gamma = \int d\xi$ (二次元) $\int d\gamma = \int d\xi d\eta$ とする。 $|J|$ はヤコビアンを表す。 $\partial(\cdot) / \partial \xi = (\cdot)_{,\xi}$, $\partial(\cdot) / \partial \eta = (\cdot)_{,\eta}$ と表し、 ϵ_{ijk} を交換テンソルとすると

$$\begin{aligned} |J|^2 &= x_{i,\xi} x_{i,\xi} = N_{I,\xi} N_{J,\xi} x_{ij} x_{ij} \\ n_1 &= x_{2,\xi} / |J| = N_{I,\xi} x_{2I} / |J|, \quad n_2 = -x_{1,\xi} / |J| = -N_{I,\xi} x_{1I} / |J| \quad (\text{二次元}) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} |J|^2 &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} x_{j,\xi} x_{k,\eta} x_{l,\xi} x_{m,\eta} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} N_{I,\xi} N_{J,\eta} N_{K,\xi} N_{L,\eta} x_{ji} x_{kl} x_{IK} x_{mL} \\ n_i &= \epsilon_{ijk} x_{j,\xi} x_{k,\eta} / |J| = \epsilon_{ijk} N_{I,\xi} N_{J,\eta} x_{ji} x_{kl} / |J| \quad (\text{三次元}) \end{aligned} \quad (12')$$

と与えられる。そこで式(11)を設計変数で微分すると、その一次感度は次式のように表される。

$$\frac{\partial f}{\partial b_m} = \frac{\rho}{\beta} \sum_e \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial b_m} n_i + (x_i - x_i^0) \frac{\partial n_i}{\partial b_m} \right) |J| + (x_i - x_i^0) n_i \frac{\partial |J|}{\partial b_m} \right] d\gamma \quad (13)$$

ここに

$$\begin{aligned} |J| &= \frac{1}{|J|} N_{I,\xi} N_{J,\xi} x_{ij} \frac{\partial x_{ij}}{\partial b_m} \\ n_1 &= \frac{n_2}{|J|} \left(n_1 \frac{\partial x_{1,\xi}}{\partial b_m} + n_2 \frac{\partial x_{2,\xi}}{\partial b_m} \right), \quad n_2 = -\frac{n_1}{|J|} \left(n_1 \frac{\partial x_{1,\xi}}{\partial b_m} + n_2 \frac{\partial x_{2,\xi}}{\partial b_m} \right) \quad (\text{二次元}) \\ |J| &= \epsilon_{ijk} n_i \left(\frac{\partial x_{j,\xi}}{\partial b_m} x_{k,\eta} + x_{j,\xi} \frac{\partial x_{k,\eta}}{\partial b_m} \right) \\ n_i &= \frac{1}{|J|} \left\{ \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial x_{j,\xi}}{\partial b_m} x_{k,\eta} + x_{j,\xi} \frac{\partial x_{k,\eta}}{\partial b_m} \right) - n_i n_j \epsilon_{jkl} \left(\frac{\partial x_{k,\xi}}{\partial b_m} x_{l,\eta} + x_{k,\xi} \frac{\partial x_{l,\eta}}{\partial b_m} \right) \right\} \quad (\text{三次元}) \end{aligned} \quad (14')$$

なお、 $(\cdot)' = \partial(\cdot) / \partial b_m$ と表した。同様にして式(13)を設計変数で微分すると二階導関数の計算式も得られる。

(2) 変位感度^{8)~12)} 境界 Γ 上の要素 e の節点変位、表面力を u_{ij}^e, p_{ij}^e 、要素上の点を x_i 、ソース点を y_i として座標と同じ内挿関数を用いると、離散化した境界積分方程式は滑らかな境界上のソース点について次のように表される。

$$\frac{1}{2} u_i(y) + \sum_e \int_{-1}^1 p_{ij}^* N_I u_{ji}^e |J| d\gamma = \sum_e \int_{-1}^1 u_{ij}^* N_I p_{ji}^e |J| d\gamma \quad (15)$$

ここに u_{ij}^*, p_{ij}^* はKelvinの基本解であり、せん断弾性係数、ポアソン比を μ, ν とすると

$$\begin{aligned} u_{ij}^* &= \frac{1}{8(\beta-1)\pi(1-\nu)\mu r^{\beta-2}} [(3-4\nu)\delta_{ij} \{\beta-2+(\beta-3)\ln r\} + r_{,i} r_{,j}] \\ p_{ij}^* &= \sigma_{jk}^* n_k = -\frac{1}{4(\beta-1)\pi(1-\nu)r^{\beta-1}} [\{(1-2\nu)\delta_{ij} + \beta r_{,i} r_{,j}\} r_{,n} - (1-2\nu)(r_{,i} n_j - r_{,j} n_i)] \end{aligned}$$

$$\sigma_{jk}^* = \frac{1}{4(\beta-1)\pi(1-\nu)r^{\beta-1}} \{ (1-2\nu)(\delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k} - \delta_{ik}r_{,j}) - \beta r_{,i}r_{,j}r_{,k} \} \quad (16)$$

ただし, δ_{ij} をクロネッカーのデルタとし, また

$$r^2 = (x_i - y_i)(x_i - y_i), \quad r_{,i} = (x_i - y_i)/r, \quad r_{,n} = r_{,i}n_i$$

式(15)を設計変数 b_m で微分すると, 直接微分法による変位感度 $\dot{u}_{il}^* = \partial u_{il}^* / \partial b_m$, $\dot{p}_{il}^* = \partial p_{il}^* / \partial b_m$ を求めるための次の連立方程式を得る^{8), 12)}.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\dot{u}_i(y) + \sum_e \int_{-1}^1 p_{ij}^* N_I \dot{u}_{jl}^* |J| d\gamma + \sum_e \int_{-1}^1 (\dot{p}_{ij}^* |J| + p_{ij}^* |J|) N_I u_{jl}^* d\gamma \\ = \sum_e \int_{-1}^1 u_{ij}^* N_I \dot{p}_{jl}^* |J| d\gamma + \sum_e \int_{-1}^1 (\dot{u}_{ij}^* |J| + u_{ij}^* |J|) N_I p_{jl}^* d\gamma \end{aligned} \quad (17)$$

ここに

$$\begin{aligned} \dot{u}_{ij}^* &= u_{ij,k}^* \left(\frac{\partial x_k}{\partial b_m} - \frac{\partial y_k}{\partial b_m} \right), \quad u_{ij,k}^* = \frac{1}{8(\beta-1)\pi(1-\nu)\mu r^{\beta-1}} \{ -(3-4\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - \beta r_{,i}r_{,j}r_{,k} \} \\ \dot{p}_{ij}^* &= \sigma_{jk,l}^* \left(\frac{\partial x_l}{\partial b_m} - \frac{\partial y_l}{\partial b_m} \right) n_k + \sigma_{jk}^* \dot{n}_k \\ \sigma_{jk,l}^* n_k &= -\frac{1}{4(\beta-1)\pi(1-\nu)r^\beta} \{ (1-2\nu) \{ \delta_{ij}n_l + \delta_{jl}n_i - \delta_{il}n_j + \beta(r_{,i}n_j 3r_{,j}n_i) \} + \beta r_{,i}r_{,j}n_l \\ &\quad - \beta \{ (1-2\nu)\delta_{ij}r_{,l} - \delta_{il}r_{,j} - \delta_{jl}r_{,i} + (\beta+2)r_{,i}r_{,j}r_{,l} \} r_{,k} n_k \} \end{aligned} \quad (18)$$

式(17)のソース点 y を境界上の節点にとり, それらをまとめて行列表示すると

$$[H]\{\dot{U}\} + [\dot{H}]\{U\} = [G]\{\dot{P}\} + [\dot{G}]\{P\} \quad (19)$$

境界上の全節点数を NP とするとき

$$\{U\}^T = (u_{11}, u_{21}, u_{12}, u_{22}, \dots, u_{1NP}, u_{2NP}), \quad \{P\}^T = (p_{11}, p_{21}, p_{12}, p_{22}, \dots, p_{1NP}, p_{2NP})$$

とし, $\{\dot{U}\}, \{\dot{P}\}$ はそれぞれの感度ベクトルとする. また各行列 $[H], [\dot{H}], [G], [\dot{G}]$ の成分は式(17)の左辺第1,2項 (まとめて表した), 第3項, 右辺第1項, 第2項の積分項にそれぞれ対応する. したがって式(15)をLU分解法などによって一旦三角分解しておけば, 式(19)の両辺の第2項の定数項を計算し, 代入過程のみを実施することによって変位, 表面力感度を求めることができる.

3. 最適設計例

前章に述べた定式化に従って近似法に基づく形状最適化プログラムを作成し, 応力制約下の二次元および三次元物体の最小重量設計問題に適用した. 用いた境界要素は二次元では3節点二次の, 三次元では8節点二次のアイソパラメトリック要素である. 以下では, 紙面の都合上, 三次元コネクティング・ロッドの形状最適化の結果のみを示

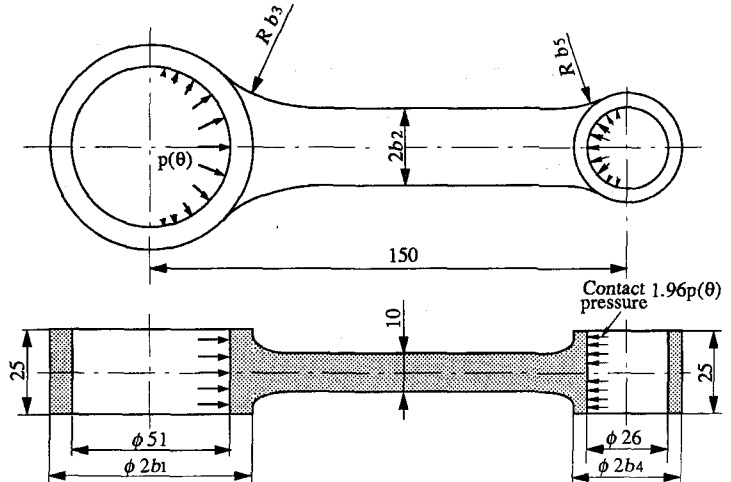


図2 軸圧縮負荷を受けるコネクティング・ロッド

す。

解析モデルは図2に示すように爆発力に相当する軸圧縮力を小端部、大端部に接触圧として受けるコネクティング・ロッドとし、大端部外半径 b_1 、ロッド幅 b_2 、ロッドと大端部付根半径 b_3 、小端部外半径 b_4 、ロッドと小端部付根半径 b_5 をそれぞれ設計変数にとった。材料定数は、 $E = 68.6 \text{ GPa}$ 、 $\nu = 0.33$ とし、負荷条件として大端部内面に爆発圧力に相当する三角関数状の接触圧を次のように負荷した。

$$p(\theta) = p_{\max} \cos \theta \quad (-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2) \quad (20)$$

また小端部内面にはそれと釣合う圧力 $1.96p(\theta)$ を負荷した。図3に要素分割図を示す。

モデルの対称性から1/4領域を解析対象とし、総節点数538、総要素数118とした。形状パラメータの初期値を $b_1 = 31.5 \text{ mm}$ 、 $b_2 = 10.0 \text{ mm}$ 、 $b_3 = 60.0 \text{ mm}$ 、 $b_4 = 17.0 \text{ mm}$ 、 $b_5 = 40.0 \text{ mm}$ として最適化を図った。最適化による形状変化に伴う分割要素のゆがみや不適切な分割の粗密を解消するためモデルの全境界を適応分割の対象とし、特にロッド付根部分に対し、超有限点写像を適用した。

制約条件は、大端部付根境界上の最大応力値、小端部付根の境界上の最大応力、大端部内面、小端部内面、ロッド中央部の5箇所とし、それぞれに対しミーゼス相当応力の上限を $\sigma_i = 3.0\sigma_0$ ($\sigma_0 = 1.96p_{\max}$)と設定して次のように与えた。

$$g_j = 3 - \sigma_j / \sigma_0 \geq 0 \quad (21)$$

また設計変数の上下限を、 $26.5 \leq b_1$ 、 $5.0 \leq b_2 \leq 10.0$ 、 $b_3 \leq 90.0$ 、 $14.0 \leq b_4$ 、 $b_5 \leq 60.0 \text{ mm}$ とした。最適化の結果、解析の繰返し数は4回で収束した。表1は初期形状と最終形状における目的関数、制約条件、設計変数値を比較して示す。ただし、表中の f_0 は初期体積を表す。図4に初期形状と最終形状を示す。最適形状では設計変数 b_3 、 b_5 の上限と、大端部付根境界上の最大応力、

表1 設計変数，目的関数，制約条件の比較

		Initial	Optimal
Objective function	f/f_0	1.000	1.467
Design variable	b_1	31.50	34.57
	b_2	10.00	8.979
	b_3	60.00	90.00
	b_4	17.00	21.21
	b_5	40.00	60.00
Constraint	g_1	-0.478	0.350
	g_2	-2.752	0.011
	g_3	0.453	0.170
	g_4	-2.281	-5.098×10^{-5}
	g_5	-2.030	2.039×10^{-4}

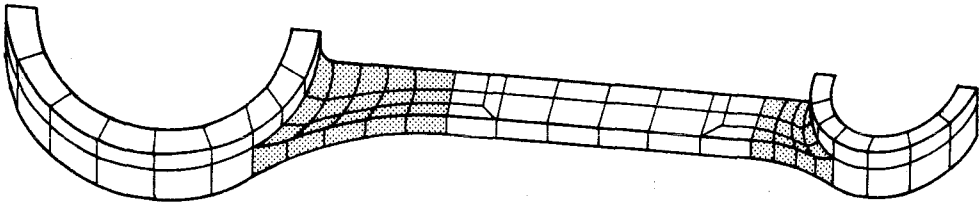


図3 要素分割

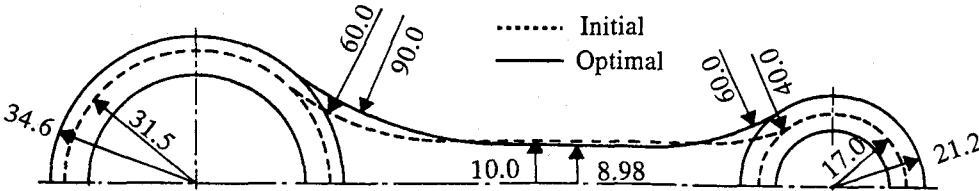


図4 初期形状と最適形状

小端部付根境界上の最大応力，小端部内面の3つの応力制約が有効となっている．図5に初期形状と最適形状における境界上のミーゼス相当応力分布を示す．初期形状において発生していた小端部，大端部付根の応力集中が，最適形状では許容応力値以下に緩和されていることが了解できる．

文 献

- 1) Mota Soares, C. A., Rodrigues, H. C. and Choi, K. K., *Trans. ASME, J. Mech. Transmissions and Automation in Design*, Vol.106, No.4, pp.518-523, 1984.
- 2) Botkin, M. E., Yang, R. J. and Bennett, J. A., *The Optimum Shape* (Bennett, J. A. and Botkin, M. E. ed.), Prentice Hall, pp.235-257, 1986.
- 3) Sandgren, E. and Wo, S. J., *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.26, No.9, pp.1913-1924, 1988.
- 4) 畔上，機械学会論文集，54巻，508号，A編，pp.2167-2175, 1988.
- 5) Kodiyalarm, S. and Vanderplaats, G. N., *AIAA Journal*, Vol.27, No.9, pp.1256-1263, 1989.
- 6) 大河内・伊藤・相原，機械学会論文集，56巻，525号，A編，pp.1304-1310, 1990.
- 7) Hajela, P. and Jih, J., *International Journal of Solids & Structures*, Vol.26, No.1, pp.29-41, 1990.
- 8) Barone, M. R. and Yang, R. J., *AIAA Journal*, Vol.26, No.5, pp.589-594, 1988.
- 9) Kane, J. H. and Saigal, S., *ASCE J. Eng. Mech.*, Vol.11, pp.1703-1722, 1988.
- 10) Barone, M. R. and Yang, R. J., *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol.74, pp.69-82, 1989.
- 11) 山崎・坂本，機械学会論文集，57巻，540号，A編，pp.1910-1915, 1990.
- 12) 山崎・坂本・北野，機械学会論文集，59巻，558号，A編，pp.400-406, 1993.

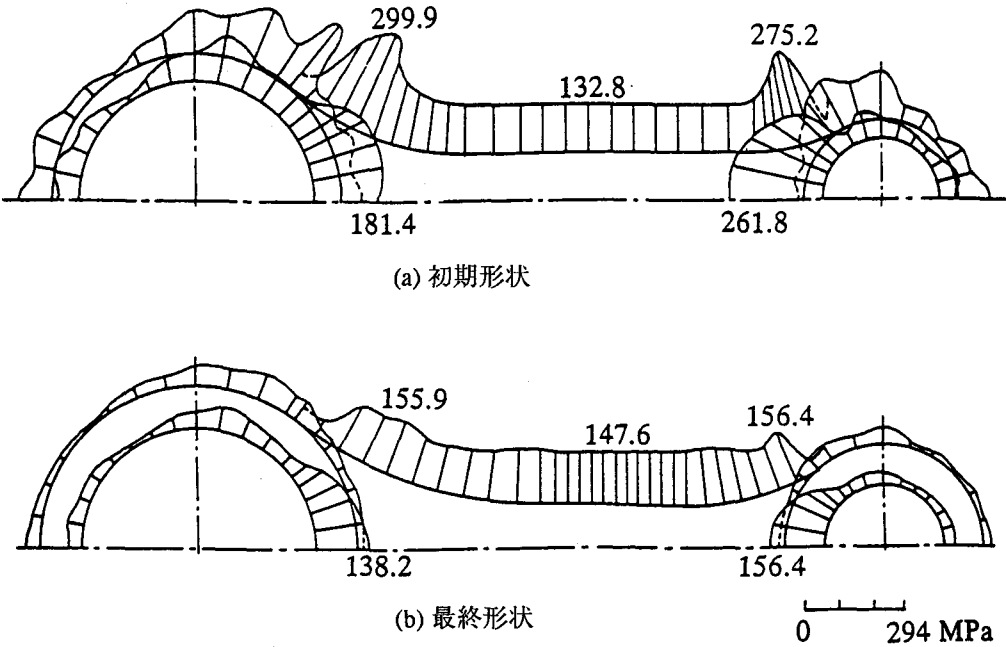


図5 境界上のミーゼス相当応力分布