

(36) 地盤物性値の空間分布のモデル化と最適問題

MODELLING OF SPATIALLY VARIABLE SOIL PROFILES USING OPTIMIZATION TECHNIQUES

鈴木 誠*

Makoto SUZUKI

When foundations and soil structures are designed based on soil sampling data, it is important to estimate the spatial variation of the soil profiles. Statistical methods have been successful in solving various geotechnical problems. When statistical analysis is employed to model the spatial variation of soil properties, optimization methods are used. Optimization techniques can also be applied to sampling strategy when additional sampling is planned to investigate the soil profile after preliminary investigation. This paper describes some applications of optimization techniques in the geotechnical engineering field. Two cases discussed are the estimation of spatial bearing capacity under a direct foundation and strategy design for additional sampling needed in foundation design.

Key Words: statistical analysis, space exploration, optimization, soil profile,
sampling strategy

1. はじめに

地盤物性値の不確定性は、土質調査・試験の誤差よりも地盤自体が持つ空間的なばらつきによるところが大きい。限られた調査・試験データから構造物の基礎や土構造物を設計するときには、安全性や安定性を確保するため地盤物性値の空間分布の推定が重要となる。このような手法として鉱山工学で実用化されてきた地盤統計学¹⁾があり、近年では水文学をはじめとする土木工学にも取り入れられてきている²⁾。地盤統計学を用いて地盤物性値の空間分布を推定するためには、2つの最適問題を扱う必要がある。1つは標本値から空間分布全体の統計パラメータを推定することであり、もう一方は標本値を条件として統計パラメータから空間分布を推定することである。前者は積率法をはじめとする手法や最尤法に基づき³⁾、後者は多変量正規分布法⁴⁾やクリッキングによる手法⁵⁾に基づく。また、地盤物性値の空間分布が確率論的に推定されると、これらの結果を土質調査・試験計画に適用し、より客観的に最適配置を決定しようとする試みがなされるようになってきた^{6,7)}。

本研究では、直接基礎を設計するための土質調査・試験計画を目的として、地盤物性値の空間分布推定における最適問題の適用について検討する。直接基礎を設計するときには、地盤の鉛直支持力度の推定が重要となる。そのため、限られた平板載荷試験から推定されるが、追加試験をすることによって推定誤差が小さくなれば許容鉛直支持力度の増加が可能となる。そこで、直接基礎の位置での鉛直支持力度の推定誤差を最小とするように、追加試験の最適配置計画を行う。

* 工博 清水建設(株) 大崎研究室研究員 (〒100 東京都千代田区内幸町2-2-2)

2. 地盤物性値のモデル化とパラメータの推定

まず、地盤物性値 z が空間座標を用いて、以下のようにトレンド成分とランダム成分の和で表現できる確率場と仮定する。

$$z = Xb + \varepsilon \quad (1)$$

ここで、 Xb はトレンド成分を表現する平均値関数であり、 b は係数ベクトルを、また X は空間座標 x に関する多項式で表現される空間座標ベクトルを表す。たとえば、1次元の場合には空間座標 x に関する次数により次のように表現できる。

$$0\text{次}: Xb=b_0, \quad 1\text{次}: Xb=b_0+b_1x, \quad 2\text{次}: Xb=b_0+b_1x+b_2x^2$$

また、 ε は平均値0で共分散マトリックス $Q_\varepsilon(\theta) (=E[\varepsilon\varepsilon^T])$ のランダム成分であり、 θ は共分散関数のパラメータである。たとえば、2点間の共分散が距離の関数で表現できるとすると、 σ^2 と a がパラメータ θ となる。

$$\text{Cov}\{z(x), z(x+\Delta x)\} = \sigma^2 \exp\{-(\Delta x/a)\} \quad (2)$$

この他、種々の共分散関数が提案されている⁸⁾。

限られたデータからトレンド成分とランダム成分を決定することになるが、地震波のようにデータが規則的に多数あるわけではないので、上記のように共分散関数などのモデルを仮定する必要がある。多数の規則的にデータがあれば積率法で計算した相関係数に重み付最小二乗法で共分散関数を求めることができるが、ここで対象としている地盤物性値などは不規則配置で数が少ないため、最尤推定法を用いる。また、仮定したモデルから最良モデルの選択規準は赤池が提案したAIC⁹⁾を用いる。

N 個の標本値から同時確率密度関数である尤度が次式で求めることができる。

$$p(z|b, \theta) = (2\pi)^{-N/2} |Q|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z-Xb)^T Q^{-1}(z-Xb)\right\} \quad (3)$$

ここで $||$ はマトリックスのデターミネントを示す。次に平均値と共分散の関数形を選択する。関数のパラメータは上式の尤度を最大にすることにより決定できるが、計算上から次式で示す負の対数尤度を最小化することにより決定する。

$$\begin{aligned} L(z|b, \theta) &= -\ln p(z|b, \theta) \\ &= \frac{N}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln|Q| + \frac{1}{2} (z-Xb)^T Q^{-1}(z-Xb) \end{aligned} \quad (4)$$

また、トレンド成分の係数ベクトル b は次式の最小二乗法によって求める。

$$\hat{b} = (X^T Q^{-1} X)^{-1} X^T Q^{-1} z \quad (5)$$

すなわち、負の対数尤度を最小化する b と θ を求める最適問題となる。最小化手法はいろいろあるが、ここでは、Appendixに示すガウス-ニュートン法を用い、繰り返し計算により求める。

最尤推定法を用いて、いくつか想定できるモデルについて最大尤度とそのときのパラメータを求める。つぎにその最大尤度とパラメータ数のトレードオフを行うAICを用いて最良モデルの選択を行う。AICは次のように定義されている。

$$\text{AIC} = -2 \times \text{最大対数尤度} + 2 \times \text{パラメータ数} \quad (6)$$

AICは最小となるモデルが最良モデルとなる規準である。平均値関数と共分散関数のモデルの組合せから、最良モデルを選択する最適問題である。

3. 地盤物性値の空間分布推定

ある位置で標本 z_0 が得られたとすると、 z_0 は次のように表現できる。

$$z_0 = X_0 b + \varepsilon_0 \quad (7)$$

X_0 は標本位置ベクトルであり、 ε_0 は平均値0で共分散マトリックス $Q_{00}(\theta) (=E[\varepsilon_0 \varepsilon_0^T])$ のランダム成分である。 z の共分散マトリックス Q_{zz} と z_0 の共分散マトリックス Q_{00} 、さらに z と z_0 の共分散マトリックスを $Q_{z0} (=Q_{0z}^T)$ とする。

地盤統計学で古くから行われているクリッキングと呼ばれる線形推定法は、標本値の線形和で任意位置での値を推定する方法である。重み係数は推定量の unbiased 性と推定誤差を最小とする条件より求められる。すなわち、推定量 $\hat{z}$ を

$$\hat{z} = \lambda z_0 \quad (8)$$

と表現すると、推定誤差は次のようになる。

$$\varepsilon = \lambda z_0 - z \quad (9)$$

推定量の unbiased 性から、

$$E[\varepsilon] = \lambda X_0 b - X b = 0 \quad (10)$$

すなわち、 $\lambda X_0 - X = 0$ となる。また、この制約条件下で、次式で示す推定誤差分散を最小とする。

$$E[\varepsilon \varepsilon^T] = \lambda Q_{00} \lambda^T - \lambda Q_{0z} - Q_{z0} \lambda^T + Q_{zz} \quad (11)$$

ここでは、ラグランジェの未定係数 μ を用いた次式を最小とする。

$$\text{Tr}[\lambda Q_{00} \lambda^T - \lambda Q_{0z} - Q_{z0} \lambda^T + Q_{zz}] - \text{Tr}[(\lambda X_0 - X) \mu] \quad (12)$$

これより、 μ は次のように求められる。

$$\mu = 2(X_0^T Q_{00}^{-1} X_0)^{-1} X^T - 2(X_0^T Q_{00}^{-1} X_0)^{-1} X_0^T Q_{00}^{-1} Q_{0z} \quad (13)$$

また、重み係数 λ は次のようになる。

$$\lambda = Q_{z0} Q_{00}^{-1} - (X - Q_{z0} Q_{00}^{-1} X_0) (X_0^T Q_{00}^{-1} X_0)^{-1} X_0^T Q_{00}^{-1} \quad (14)$$

よって、 z_0 が得られたときの z の条件付き確率である推定値 $E[z|z_0]$ と推定誤差共分散マトリックス $V[z|z_0]$ は、式(8)と式(11)より次のように表現できる。

$$E[z|z_0] = [Q_{z0} Q_{00}^{-1} + (X - Q_{z0} Q_{00}^{-1} X_0) (X_0^T Q_{00}^{-1} X_0)^{-1} X_0^T Q_{00}^{-1}] z_0 \quad (15)$$

$$V[z|z_0] = Q_{zz} - Q_{z0} Q_{00}^{-1} Q_{0z} + (X - Q_{z0} Q_{00}^{-1} X_0) (X_0^T Q_{00}^{-1} X_0)^{-1} (X - Q_{z0} Q_{00}^{-1} X_0)^T \quad (16)$$

4. 最適調査計画

図-1に示すような領域に、鉛直支持力度の空間分布を仮定する。また、解析条件は図-2に示すように●印の位置で平板載荷試験があり、長方形の直接基礎を設計するものとする。図中の数字は鉛直支持力度を示している。これらのデータから、トレンド成分として次式に示す0次と1次のモデル(case-1, case-2)と、式(2)に示す共分散関数を仮定する。

$$\text{case-1: } Xb = b_0, \quad \text{case-2: } Xb = b_0 + b_1 x + b_2 y$$

ここでは2次元場であることから、トレンド成分が1次のモデルcase-2は、係数が3つ存在する。最尤推定法で得られた統計量を表-1に示すが、本検討ではAICの小さいcase-1を採用する。

これらの統計量を用いて、クリッキングにより鉛直支持力度の空間分布を推定した。図-3に推定値を、図-4に推定誤差を示す。推定値は中央部分の比較的大きいところと右下の非常に小さいところの傾向を示している。また、推定誤差は標本点まわりに誤差が小さくなっていることがわかる。

表－1 基本統計量と尤度

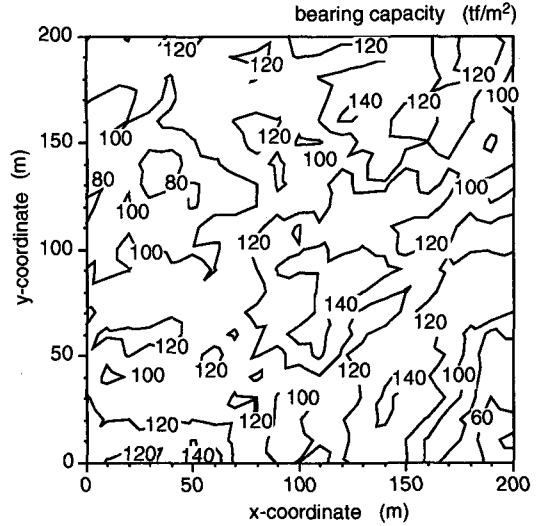
	b			σ^2	a	Negative log likelihood	AIC
	b ₀	b ₁	b ₂				
case-1	111.8	-	-	1169.2	34.626	122.65	251.30
case-2	114.2	-0.084	0.058	1170.4	37.879	122.36	254.72

追加試験を1箇所計画するときの最適位置は、直接基礎の平均鉛直支持力の推定誤差を最も小さくする位置とする。すなわち、推定誤差に最も感度の高い位置である。目的関数はブロック・クリッキング¹⁰⁾による基礎全体の平均鉛直支持力度の推定誤差分散とした。ブロック・クリッキングは式(15)、(16)の $X_0, Q_{00}, Q_{0x}, Q_{0y}$ に局所平均の概念を導入したものである。また、説明変数は追加試験の座標である。式(16)から明らかのように、クリッキングによる推定誤差分散は標本点の値に依存せず位置のみに依存することがわかる。このため、追加試験位置の検討のための評価指標となる。

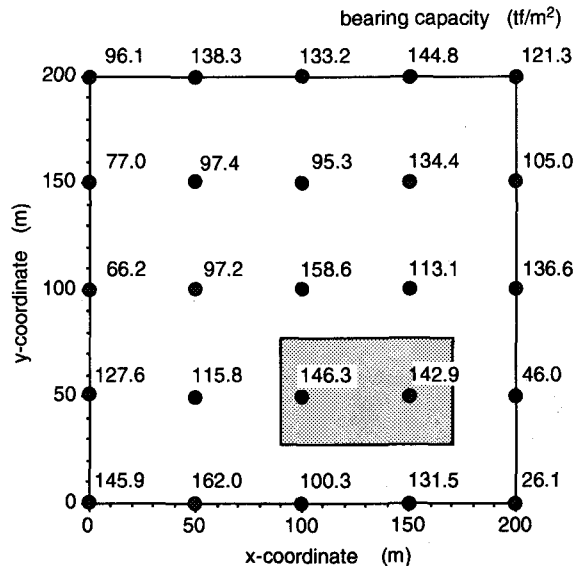
図－5に追加試験位置による基礎の平均鉛直支持力度の推定誤差分散のコンターマップを表している。追加試験がない状態での基礎の平均鉛直支持力度の推定誤差分散は10.3 tf/m²であることから、図中の10 tf/m²のコンター外側では追加試験の効果が無いことを示している。一般的にはガウス－ニュートン法などにより最適位置を求めることになるが、今回はコンターマップを作成する都合上全ての位置で計算した。最終的に最適位置は(120, 60)となった。最適位置が基礎の中心ではないのは既存の試験結果の影響が考慮されているためである。この結果より、本手法は追加調査を客観的に評価することができることがわかった。

5. まとめ

限られた平板載荷試験データから直接基礎を設計するとき、2つの最適問題を扱うことにより鉛直支持力度の空間分布を推定することができることを示した。さらに、このとき推定誤差が確率論的に評価できることから、これを目的関数とした追加試験の最適位置を検討した。このように地盤物性値の空間分布をモデル化する



図－1 鉛直支持力度の空間分布



図－2 解析モデル

ときや追加調査・試験を計画するときに洋々な形で最適問題が利用できることを示した。

今後は空間分布推定に地質学的な知見も取り込むことや追加調査・試験を複数計画するとき最適問題を検討する予定である。

Appendix. ガウスニュートン法

一般的に負の対数尤度のパラメータ θ_j に対する1階微係数は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_j} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left(Q^{-1} \frac{\partial Q}{\partial \theta_j} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} (z - Xb)^T Q^{-1} \frac{\partial Q}{\partial \theta_j} Q^{-1} (z - Xb) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

繰り返し計算では $i+1$ 回目のパラメータベクトルは i 回目のパラメータベクトルから求められる。

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \rho_i R_i g_i \quad (\text{A.2})$$

ここで、 g_i は負の対数尤度の微係数ベクトルである。

$$g_i = \left. \frac{\partial L}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_i} \quad (\text{A.3})$$

R_i は2階微係数であるヘッセマトリックスの逆マトリックスである。ヘッセマトリックスを近似して次のように表現する。

$$M_{jk} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(Q^{-1} \frac{\partial Q}{\partial \theta_j} Q^{-1} \frac{\partial Q}{\partial \theta_k} \right) \quad (\text{A.4})$$

各々の繰り返しで1次探索法を行わなければ $\rho_i=1$ となり、繰り返し計算は次のようになる。

$$\theta_{i+1} = \theta_i - M_i^{-1} g_i \quad (\text{A.5})$$

参考文献

- 1) Journel, A.G. and Huijbregts, Ch. J. : Mining Geostatistics, Academic Press, 1978.
- 2) Marsily, G. : Quantitative Hydrogeology, Academic Press, 1986.
- 3) Cressie, N. : Statistics for Spatial Data, John Wiley & Sons, 1991.

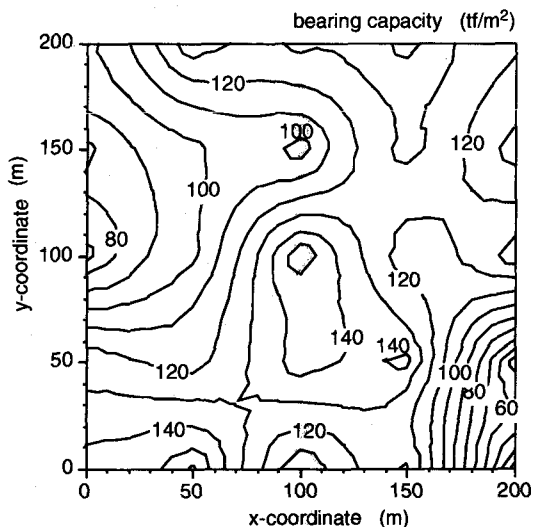


図-3 鉛直支持力度の推定値

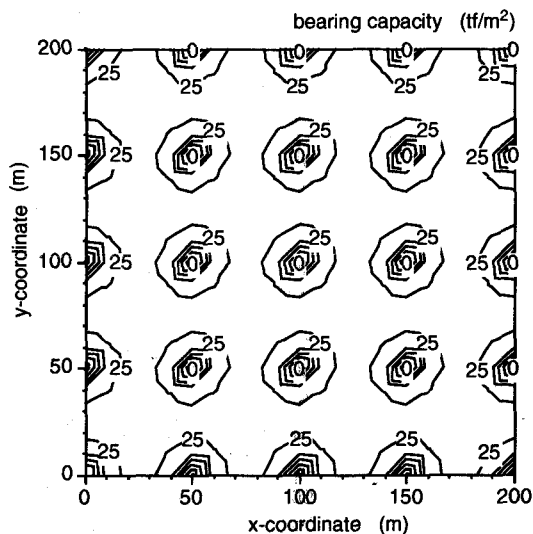


図-4 鉛直支持力度の推定誤差

- 4) 米田稔、古市徹、井上頼輝:不均質帯水層における物質移動予測への確率論的アプローチ, 衛生工学研究論文集, Vol. 19, pp. 50-59, 1983.
- 5) Matheron, G. : Principle of geostatistics, Economic Geology, Vol. 58, pp. 1246-1266, 1963.
- 6) 小川保、竹内友章、本多眞、鈴木誠:地盤物性値の空間分布推定と追加調査計画に関する検討, 土木学会第47回年次学術講演会, III-344, pp. 728-729, 1992.
- 7) Christakos, G. : Random Field Models in Earth Sciences, Academic Press, 1992.
- 8) Vanmarcke, E.H. : Probabilistic modeling of soil profiles, Jour. Geotech. Eng. Div., ASCE, Vol. 103, No. 11, pp. 1227-1246, 1977.
- 9) Akaike, H. : A new look at the statistical model identification, IEEE Trans. Automat. Control, AC-19, pp. 716-723, 1974.
- 10) Burgess, T.M. and Webster, R. :Optimal interpolation and isarithmic mapping of soil properties, 2, Block Kriging, Jour. Soil Science, Vol. 31, pp. 333-341, 1980.

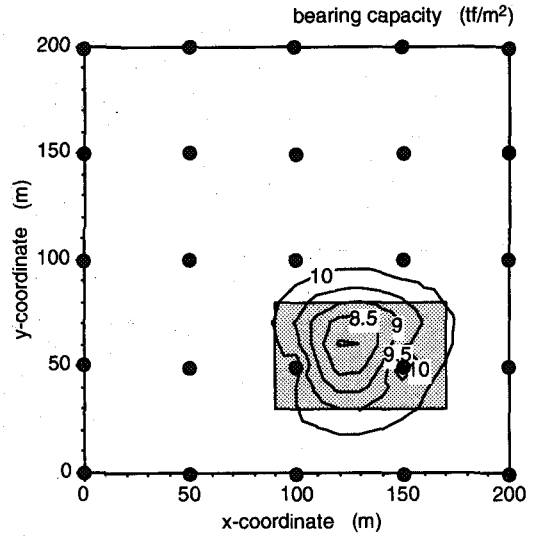


図-5 追加試験位置と推定誤差