第3回システム最適化に関するシンポジウム講演論文集　1993年12月

(34) 確率ダイナミックシステムのフィルタ理論

FILTER THEORY OF STOCHASTIC DYNAMIC SYSTEM

登坂宣好*　宇谷明秀**
Nobuyoshi TOSAKA and Akihide UTANI

The purpose of this paper is to propose a new filtering scheme on stochastic dynamic system of discrete-time. The projection filter proposed for the restoration of the original image from the observation is introduced instead of the Wiener filter which provides the Kalman gain in the Kalman filter theory. The new filter theory with the filter gain constracted by the projection filter is also extended nonlinear system. Theoretical basis of the new filter theory are discussed. The filtering process is compared with Kalman filter.

Key Words: Stochastic Dynamic System, Kalman Filter, New Filter Theory, Projection Filter, Parametric Projection Filter

1. はじめに

単に力学現象だけでなく，ある系の挙動が微分方程式やその離散化表現である差分方程式で支配される場合の数理モデルは一般にダイナミックシステムと呼ばれている．このシステムは，状態の推移を表す状態方程式と，状態に対する観測方程式から記述される．実際には，どちらの方程式にも，何らかの誤差の考慮が必要となり，システムは確率ダイナミックシステムとして取り扱わなければならない．

このようなシステムの挙動を解析する問題の中で，雑音に乱された観測量から信号またはシステムのパラメータのような状態量を時々刻々推定する問題が重要である．この問題は時系列に対する推定 (estimation) とかフィルタリング (filtering) 問題と呼ばれている．フィルタリング問題に対する理論は，時系列の定常性，エルゴード性および無限時間観測という仮定のもとで Kolmogorov や Wiener によって始められた．

この時系列の定常性や無限時間観測の仮定は実際に当てはまらないため，理論の改良が進められ，Kalman と Bucy[1] は，これらの仮定を取り除いた新しいフィルタリングのアルゴリズムを開発した．現在では，この理論は Kalman フィルタ理論と呼ばれ，通信，制御の分野にとどまらず，多くの分野の問題に応用されている[2]．特に最近では，構造工学や地盤工学，機械工学における逆問題の解析手法として盛んに応用されている[3]~[5]．

本論文では，離散時間確率ダイナミックシステムのフィルタリング問題に対する新しいフィルタ理論を構築する．フィルタ理論におけるフィルタリングのアルゴリズムの中で重要な役割を果たすフィルタゲインに対し，画像復元問題で使用されている射影フィルタ (projection filter:PF) 等[6]~[8] を導入することによって Kalman フィルタ理論とは異なる新しい理論が得られることを示す．同時に，この新しいフィルタ理論と Kalman フィルタ理論との相違を明らかにする．

2. 線形確率ダイナミックシステム

これまでの Kalman フィルタ理論の場合と同様に，本論文でも，対象とするシステムは次のような状態方程式と観測方程式で与えられる線形 (離散時間) 確率ダイナミックシステム[2] である．

---

* 工博，　日本大学教授　　生産工学部数理工学科，　〒275 習志野市泉町 1-2-1, TEL 0474-74-2654
**工修，　日本大学大学院　生産工学研究科，　　　〒275 習志野市泉町 1-2-1, FAX 0474-74-2669

・状態方程式

$$z_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}_k z_k + \boldsymbol{\Gamma}_k \omega_k \tag{1}$$

・観測方程式

$$y_k = M_k z_k + \nu_k \tag{2}$$

ただし, z_kは (時刻 t_kにおける) 状態ベクトル, ω_kはシステム雑音ベクトル, y_kは観測ベクトル, ν_kは観測雑音ベクトル, $\boldsymbol{\Phi}_k$ は状態遷移行列, $\boldsymbol{\Gamma}_k$は駆動行列, M_kは観測行列と呼び, z_k, ω_k, y_k, ν_kは確率変数ベクトルであり, 行列$\boldsymbol{\Phi}_k$, $\boldsymbol{\Gamma}_k$, M_kは既知の確定行列とする. なお, 確率変数ベクトルの統計的性質に関しては, 次のような仮定を行うものとする.

$$E\{z_0\} = \bar{z}_0 \ \ (\text{既知}) \tag{3}$$

$$E\{\omega_k\} = E\{\nu_k\} = \mathbf{o} \tag{4}$$

$$E\left\{(z_0 - \bar{z}_0)(z_0 - \bar{z}_0)^T\right\} = R_0 \ \ (\text{既知}) \tag{5}$$

$$E\left\{\begin{pmatrix} \omega_k \\ \nu_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_l^T \nu_l^T \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} S_k & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & Q_k \end{pmatrix} \delta_{kl} \ \ (\text{既知}) \tag{6}$$

$$E\left\{\omega_k z_l^T\right\} = E\left\{\nu_k z_l^T\right\} = \mathbf{o} \ \ (k \geq l) \tag{7}$$

ここで, Eは [illegible]をとる記号とし, 上付き Tは転置を表し, δ_{kl}はクロネッカのデルタである.

3. フィルタ問題とフィルタ理論

3.1 フィルタ問題

信号を生成するシステムの動特性, 雑音の統計的性質, 初期値に関する先験的情報を与える線形確率ダイナミックシステム (1)~(7) に対し, 時々刻々与えられる観測データ$\{y_0, y_1, \cdots, y_k\}$が得られたときの状態ベクトル$z_k$を何らかの評価基準を満足するように推定するのがフィルタリング問題である.

本論文では, k時間ステップにおける観測ベクトルy_k から状態ベクトルz_kの推定値$\hat{z}_{k/k}$をある評価基準を満足するように決定する問題, すなわちフィルタリング問題を次のような写像 (行列)B_kを構成する問題として考えることにする.

観測方程式 (2) を通して与えられた観測ノイズを含む観測ベクトルy_kから, 写像B_kによって得られる次の状態ベクトル

$$\tilde{z}_{k/k} = B_k y_k = B_k(M_k z_k + \nu_k) \tag{8}$$

が, z_kの最良な推定量となるように, ある評価基準を満足する写像B_kを, 与えられたシステムの諸量を用いて逐次的に構成することである.

特に, Kalman フィルタリング問題では, 状態ベクトルの最小分散推定量

$$\hat{z}_{k/k} = E\{z_k / y_0, y_1, \cdots, y_k\} \tag{9}$$

を決定する問題となる[1].

3.2 フィルタ理論

フィルタリング問題を解くために, 推定問題の数理モデルとして, 一般的な次のシステムを考える.

$$\left.\begin{array}{rcl} y & = & Mz + \nu \\ \tilde{z} & = & By \end{array}\right\} \tag{10}$$

ただし, 統計的性質は既に示した (3)~(7) と同様な

$$\left.\begin{array}{rcll} E\{\nu\} & = & \mathbf{o}, & E\left\{\nu\nu^T\right\} = Q \\ E\{z_0\} & = & \bar{z}_0, & E\left\{(z - \bar{z}_0)(z - \bar{z}_0)^T\right\} = R \end{array}\right\} \tag{11}$$

とする. この推定問題に対し, 求める推定量に関しては不偏推定値性 (unbiased estimator) を仮定するならば, 推定量は

$$\tilde{z} = E\{z\} + B[y - M(E\{z\})] \tag{12}$$

で与えられ, 推定誤差の共分散行列は

$$E\left\{(\boldsymbol{z}-\tilde{\boldsymbol{z}})(\boldsymbol{z}-\tilde{\boldsymbol{z}})^T\right\} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}\boldsymbol{M}^T + \boldsymbol{Q})\boldsymbol{B}^T - \boldsymbol{B}\boldsymbol{M}\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{B}^T \tag{13}$$

となる.

与えられた推定量(12)と推定誤差の共分散行列(13)を基礎として, 線形確率ダイナミックシステム(1)~(7)に対するフィルタリングのアルゴリズムを構成すると次のようになる.

・推定過程(または観測更新アルゴリズム)

$$\hat{\boldsymbol{z}}_{k/k} = \hat{\boldsymbol{z}}_{k/k-1} + \boldsymbol{B}_k(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{M}_k\hat{\boldsymbol{z}}_{k/k-1}) \tag{14}$$

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{k/k} = \hat{\boldsymbol{R}}_{k/k-1} + \boldsymbol{B}_k(\boldsymbol{M}_k\hat{\boldsymbol{R}}_{k/k-1}\boldsymbol{M}_k^T + \boldsymbol{Q}_k)\boldsymbol{B}_k^T - \boldsymbol{B}_k\boldsymbol{M}_k\hat{\boldsymbol{R}}_{k/k-1} - \hat{\boldsymbol{R}}_{k/k-1}\boldsymbol{M}_k^T\boldsymbol{B}_k^T \tag{15}$$

・予測過程(または時間更新アルゴリズム)

$$\hat{\boldsymbol{z}}_{k+1/k} = \boldsymbol{\Phi}_k\hat{\boldsymbol{z}}_{k/k} \tag{16}$$

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{k+1/k} = \boldsymbol{\Phi}_k\hat{\boldsymbol{R}}_{k/k}\boldsymbol{\Phi}_k^T + \boldsymbol{\Gamma}_k\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{\Gamma}_k^T \tag{17}$$

以上のように構成された線形確率ダイナミックシステムのフィルタリングはFig.1のように表される.

線形確率ダイナミックシステム

・状態方程式

$$\boldsymbol{z}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}_k\ \boldsymbol{z}_k + \boldsymbol{\Gamma}_k\ \boldsymbol{\omega}_k$$

・観測方程式

$$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{M}_k\ \boldsymbol{z}_k + \boldsymbol{\nu}_k$$

↓

状態ベクトルの復元

・復元方程式

$$\tilde{\boldsymbol{z}}_k = \boldsymbol{B}_k\ \boldsymbol{y}_k$$

↓

フィルタリング

・フィルタ方程式

$$\hat{\boldsymbol{z}}_{k/k} = \hat{\boldsymbol{z}}_{k/k-1} + \boldsymbol{B}_k\ (\ \boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{M}_k\ \hat{\boldsymbol{z}}_{k/k-1}\ )$$

$$\hat{\boldsymbol{z}}_{k+1/k} = \boldsymbol{\Phi}_k\ \hat{\boldsymbol{z}}_{k/k}$$

・フィルタゲイン

$$\boldsymbol{B}_k = f\ (\ \boldsymbol{M}_k\ ,\ \boldsymbol{Q}_k\ ,\ \boldsymbol{R}_k\ )$$

・推定誤差の共分散行列方程式

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{k/k} = \hat{\boldsymbol{R}}_{k/k-1} + \boldsymbol{B}_k\ (\ \boldsymbol{M}_k\ \hat{\boldsymbol{R}}_{k/k-1}\ \boldsymbol{M}_k^T + \boldsymbol{Q}_k\ )\ \boldsymbol{B}_k^T$$
$$-\boldsymbol{B}_k\ \boldsymbol{M}_k\ \hat{\boldsymbol{R}}_{k/k-1} - \hat{\boldsymbol{R}}_{k/k-1}\ \boldsymbol{M}_k^T\ \boldsymbol{B}_k^T$$

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{k+1/k} = \boldsymbol{\Phi}_k\hat{\boldsymbol{R}}_{k/k}\boldsymbol{\Phi}_k^T + \boldsymbol{\Gamma}_k\ \boldsymbol{S}_k\ \boldsymbol{\Gamma}_k^T$$

Fig.1 Filtering of linear stochastic dynamic system

式(14)~(17)で示したフィルタリング理論を用いて実際問題における状態ベクトルの推定を行うためには, 式(8)で導入された復元作用素(復元行列)$\boldsymbol{B}_k$, すなわちフィルタゲインを具体的に構成しなければならない. 前述したように, $\boldsymbol{B}_k$を決定するには, 状態ベクトルとその推定量との間に何らかの評価基準を設定しなければならない.

3.3 Kalman フィルタ

Kalmanフィルタ理論では, 復元作用素として, $\boldsymbol{z}$と$\tilde{\boldsymbol{z}}$との差の2乗の$\boldsymbol{z}$と$\boldsymbol{\nu}$とに関する平均を最小,

$$E_{\boldsymbol{z}}E_{\boldsymbol{\nu}}\ \|\ \boldsymbol{z} - \tilde{\boldsymbol{z}}\ \|^2 \longrightarrow Min \tag{18}$$

すなわち, 最小分散推定値を与える次のようなWiener フィルタ

$$B = RM^T\left(MRM^T + Q\right)^+ \tag{19}$$

を採用していることになる. ただし, 記号"+"はムーア・ペンローズの一般逆行列を意味するものである. Fig.2 は Wiener フィルタの数理モデルである.

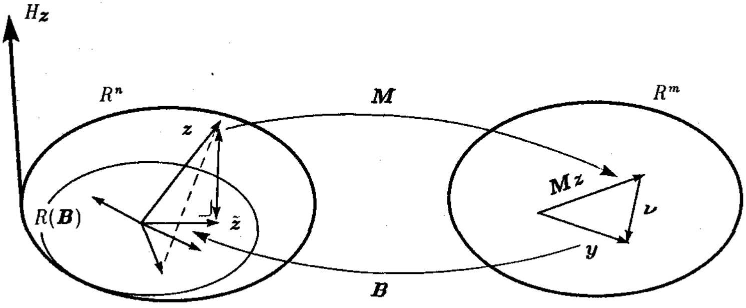

Fig.2 Mathematical model of Wiener filter

また, Kalman フィルタによるフィルタリングのアルゴリズムは Fig.3 のように表すことができる.

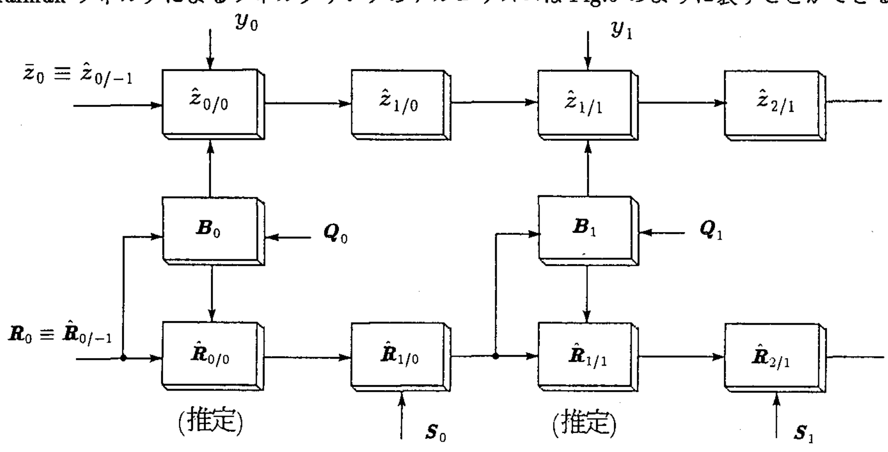

Fig.3 Algorithm of Kalman filtering

3.4 新しいフィルタ

復元作用素として, 式(19) で示した Wiener フィルタを用いることなく, 以下に述べる評価基準を満足するフィルタを採用することで新しいフィルタが構築できる. まず, M^T の値域, $R(M^T)$ への正射影作用素Pを導入し

$$BM = P \tag{20}$$

を満足するという条件のもとで, zのPによる像Pzに対して

$$E_{\nu} \| \tilde{z} - Pz \|^2 = E_{\nu} \| B\nu \|^2 \tag{21}$$

を最小にする復元フィルタBを導入する. このようなフィルタは射影フィルタ (projection filter:PF) と呼ばれている[(6)~(8)]. この拘束条件 (20) 付きの最小化問題の解は文献[(6),(7)]に与えられていて

$$B = (M^TQ^+M)^+M^TQ^+ \tag{22}$$

と表わされる. さらに, この射影フィルタに関連して

$$B = M^T(MM^T + \gamma Q)^+ \tag{23}$$

で与えられるパラメトリック射影フィルタ[8]もある．ここで，γは雑音の抑制の程度を表すパラメータである．Fig.4 は射影フィルタの数理モデルを表している．

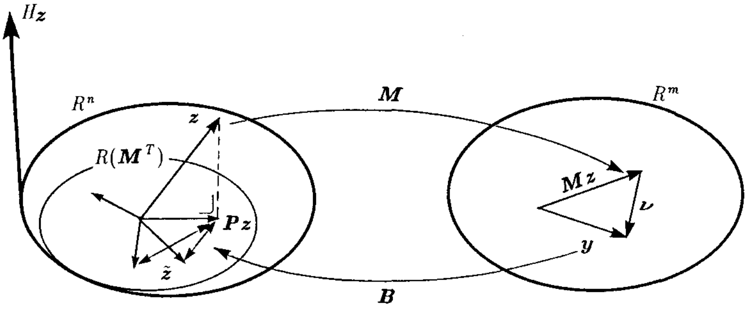

Fig.4 Mathematical model of projection filter

以上より，式(22),(23) で示した復元作用素を既出のフィルタリングアルゴリズムに取り込むことによって次のような Kalman フィルタとは異なる新しいフィルタを構成することができることになる．

・フィルタ方程式

$$\hat{\boldsymbol{z}}_{k/k} = \hat{\boldsymbol{z}}_{k/k-1} + \boldsymbol{B}_k(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{M}_k\hat{\boldsymbol{z}}_{k/k-1}) \tag{24}$$

$$\hat{\boldsymbol{z}}_{k+1/k} = \boldsymbol{\Phi}_k\hat{\boldsymbol{z}}_{k/k} \tag{25}$$

・フィルタゲイン

$$\boldsymbol{B}_k = (\boldsymbol{M}_k^T\boldsymbol{Q}_k^+\boldsymbol{M}_k)^+\boldsymbol{M}_k^T\boldsymbol{Q}_k^+ \quad or \quad \boldsymbol{B}_k = \boldsymbol{M}_k^T(\boldsymbol{M}_k\boldsymbol{M}_k^T + \gamma\boldsymbol{Q}_k)^+ \tag{26}$$

・推定誤差の共分散行列方程式

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{k/k} = \hat{\boldsymbol{R}}_{k/k-1} + \boldsymbol{B}_k(\boldsymbol{M}_k\hat{\boldsymbol{R}}_{k/k-1}\boldsymbol{M}_k^T + \boldsymbol{Q}_k)\boldsymbol{B}_k^T - \boldsymbol{B}_k\boldsymbol{M}_k\hat{\boldsymbol{R}}_{k/k-1} - \hat{\boldsymbol{R}}_{k/k-1}\boldsymbol{M}_k^T\boldsymbol{B}_k^T \tag{27}$$

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{k+1/k} = \boldsymbol{\Phi}_k\hat{\boldsymbol{R}}_{k/k}\boldsymbol{\Phi}_k^T + \boldsymbol{\Gamma}_k\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{\Gamma}_k^T \tag{28}$$

この新しいフィルタによるフィルタリングのアルゴリズムは Fig.5 のように表される．

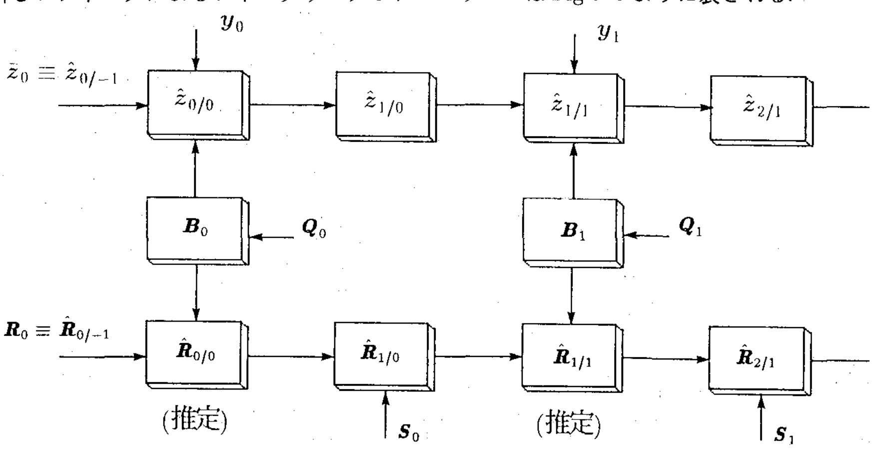

Fig.5 Algorithm of new filtering

3.5 非線形フィルタ問題

前節までで，線形確率ダイナミックシステム (1)〜(7) のフィルタリング問題に対する新しいフィルタ理論を，射影に基づく復元写像をもとに構成することができた．しかし，一般には，非線形フィルタリング問題も多く，ダイナミックシステムを非線形の場合に拡張しておく必要がある．これは，Kalman フィルタ理論を拡張 Kalman フィルタ理論[2]に拡張する考え方とまったく同様にして理論を以下のように展開して行けば良いことになる．

そこで, 観測方程式を非線形に拡張した

$$y_k = m_k(z_k) + \nu_k \tag{29}$$

を考える. ただし, m_kは非線形ベクトル関数であり, 状態ベクトルz_kに関して微分可能であると仮定する. この仮定のもとで, 上式をz_kの推定量$\hat{z}_{k/k-1}$のまわりに線形化して

$$m_k(z_k) = m_k(\hat{z}_{k/k-1}) + M_k(z_k - \hat{z}_{k/k-1}) + \cdots \tag{30}$$

を得る. この結果, 上式(30) は,

$$\eta_k \equiv y_k - m_k(\hat{z}_{k/k-1}) + M_k \hat{z}_{k/k-1} \tag{31}$$

とおくことによって次のような線形表現となる.

$$\eta_k = M_k z_k + \nu_k \tag{32}$$

ただし,

$$M_k \equiv \left(\frac{\partial m_k}{\partial z_k}\right)_{z_k = \hat{z}_{k/k-1}} \tag{33}$$

である. ここで得られた式(32) を観測方程式(2) の代わりに用いることにすれば, 既に展開してきたフィルタ理論を適用することが可能となる.

4. おわりに

以上, 本論文では, 離散時間確率ダイナミックシステムに対する, これまでの Kalman フィルタ理論とは異なる新しいフィルタ理論を構成した. 新しいフィルタ理論は, Kalman フィルタ理論における Wiener フィルタに基づく Kalman ゲインとは異なり, 射影フィルタに基づくフィルタゲインを導入したため, 推定誤差共分散行列とは独立に状態量の更新が行われることに特徴を有するものである. この特徴は, 分布定数系の逆問題に対する新しい逆解析手法を用いた弾性場の未知欠陥同定問題において既に発揮されている[(9),(10)]. 今後, この新しいフィルタ理論の適用性および有効性を, これまで Kalman フィルタが応用されてきた様々な問題に対して検討して行きたい.

参考文献

(1) Kalman, R.E., A new approach to linear filtering and prediction problems, Trans. ASME, J. Basic Eng., 82D(1), (1960), 34.

(2) 片山徹, 応用カルカンフィルタ, (1983), 朝倉書店

(3) 須藤敦史, 星谷勝, 拡張カルマンフィルタの基本的考察とEK-WLI 法の提案, 土木学会論文集, **437**, (1991), 203.

(4) 村上章, 長谷川高士, 構造工学・地盤工学における Kalman フィルタの適用, 農業土木学会論文集, **158**, (1992), 95.

(5) 登坂宣好, 宇谷明秀, Kalman フィルター境界要素法による弾性定数の同定解析, 日本建築学会構造系論文報告集, **446**, (1993), 41.

(6) 中村伸隆, 小川英光, 加法性ノイズを考慮した最適画像復元, 電子通信学会論文誌, Vol. J67-D, (1984), 563.

(7) Ogawa, H. and E. Oja, Projection Filter, Wiener Filter, and Karhunen-Loéve Subspaces in Digital Image Restoration, J. of Math. Analy. and Appl., **114**, (1986), 37.

(8) E. Oja, and Ogawa, H., Parametric Projection Filter for Image and Signal Restoration, IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing, ASSP-34, No.6, (1986), 1643.

(9) 登坂, 宇谷, 新しいフィルタと境界要素法による未知欠陥形状決定問題の解析, 日本機械学会第6回計算力学講演会講演論文集, (1993), (印刷中).

(10) 宇谷, 登坂, フィルター境界要素法の未知欠陥同定への適用, 第3回システム最適化に関するシンポジウム講演論文集, (1993), (印刷中).