

(32) 非線形履歴劣化多自由度系の震動特性の同定

IDENTIFICATION OF A HYSTERETIC AND DEGRADING MULTISTORY STRUCTURE BY EK-WGI PROCEDURE

野田 茂* 久保田秀樹**

By Shigeru NODA and Hideki KUBOTA

A method was presented to identify the structural parameters on a hysteretic and degrading model for multidegree of freedom structure by the Extended Kalman filter (the EK-WGI method). The identification procedure was divided into two stages. As the first stage, the elastic parameters of linear system were identified. At the second stage of identification, the other parameters which govern the hysteresis were identified using the values estimated at the first stage. Numerical results show that the present method predicts the linear and nonlinear behavior of the structure very well even for the case with severe nonlinearity. However, the estimated parameters are not quite satisfactory, particularly for inelastic parameters which are insensitive to the structural response.

Key Words: Parameter identification, EK-WGI method, Versatile hysteretic model, MDOF nonlinear structure, Two-stage iteration procedure

1. はじめに

土木工学の技術は、近代社会の始めから、国家の進むべき方向に大きく貢献してきた。さらに、21世紀に視点をおくとき、今世紀の残りの期間は、新技術を駆使するなど、土木が質的に変化をとげ、またその社会的使命が重要になるであろう。今日、大都市では都市機能がインテリジェント化し、ますます高度情報化が進んでいる。今まで設計・施工された構造物だけではなく、都市機能の崩壊を防ぐための構造物の出現や設計と施工の合理化が期待されている。

都市に建つ構造物は、構造自体の安全性と同時に、それを使用する人間の安全性・居住性や機器の作動性などの機能的な面も保証しなければならない。構造物内の機器などの機能が不能になると、都市機能の保持ができなくなり、ひいては都市機能全体の崩壊につながる恐れがでてくる。このためには、各種センサーを有し、自然界が与える外乱（地震や風など）や危険を未然に感知し、好ましい姿勢と対応がとれる「知的制御システム」を構築する必要がある。また、最近では、設計と実際の挙動の相違を補うために、現場計測情報をもとに次の状況を予測しながら、施工・管理を進める情報化の研究開発が盛んである。これにより、より安全でかつ経済的な施工が可能になり、維持管理と補修などの費用を最小にした最適構造物が完成する。このためにはシステム同定と制御の技術が必要になる。

同定の研究は、土木工学の分野にかかわらず、広範囲にわたる応用の可能性を有している。現在、建設会社においては、知的な構造物の開発のみならず、動的問題や現場計測管理に同定手法を用いる機運が急速に高まっている。計測データに基づき、現象を認識したり、将来の挙動を予測して、システムの性質を明らかにすることは重要である。

地盤-基礎-上部構造物あるいは地盤中に建設された地中構造物において、その動特性は経年変化し、強

* 工博 鳥取大学助教授 工学部社会開発システム工学科 (〒680 鳥取市湖山町南 4-101)

** 横河電機(株) エンジニアリング本部 (〒180 東京都武蔵野市中町 2-9-32)

震時には非線形挙動を呈し、その性質はますます複雑になる。軟弱地盤上の盛土工事や埋立工事では沈下現象が発生する。また、トンネル工事においては、地山の初期応力や力学特性を求めて、施工管理を行う必要がある。計測データから有用な情報を抽出するために、カルマンフィルターを用いれば、効率的な同定結果が得られることが知られている。

本研究では、多面型劣化履歴復元力特性を有する非線形多自由度構造物を対象にして、観測応答量から、構造物の動特性を規定するパラメーターを同定することを試みる。ここでは、最適解（推定値）への収束状況を調べるとともに、同定の繰り返しの伴う応答量やパラメーターの変化について分析する。

本論と同様な試みとしては、万能型復元力特性の1自由度非線形系¹⁾や免震基礎²⁾を対象にした同定、線形多自由度構造物の局所的な断面での剛性の同定³⁾あるいはバイリニア履歴系を有する非線形多自由度系の同定⁴⁾が実施されている。これらの研究と異なり、本研究の特徴は、劣化履歴復元力特性を有する多自由度構造物の全体系を対象として、弾性および非弾性パラメーターの同定と分析を行っている点にある。

なお、本論文は既発表の成果⁵⁾をとりまとめたものであることをことわっておく。

2. 多面型履歴復元力特性を有する多自由度構造物の地震応答

(1) せん断型多自由度構造系の運動方程式

本研究で対象とした N 自由度の構造モデルは、図1に示すように、曲げモーメントの作用しないせん断型非線形モデルである。 m_i, c_i と k_i は、質点 i の質量、減衰係数と微小振動時の剛性である。 $\ddot{z}_g$ は地動加速度、 u_i は質点 i と質点 $(i-1)$ 間の層間変位である。 ϕ_i は質点間の劣化履歴復元力特性を示す。

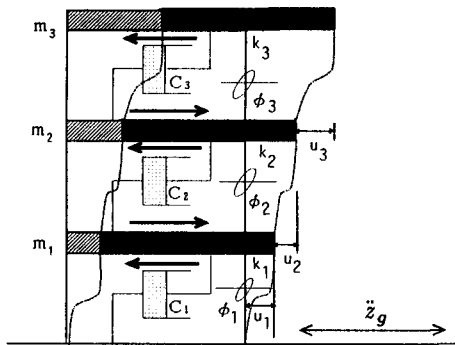


図1 劣化履歴復元力特性を有するせん断型多自由度構造物

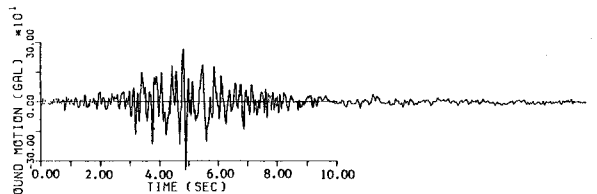


図2 入力地震加速度

質点 i における慣性力、粘性減衰力と復元力の釣合いを考えれば、次の運動方程式が得られる。

$$m_i \ddot{x}_i + c_i \dot{u}_i + k_i \phi_i - (1 - \delta_{iN})(c_{i+1} \dot{u}_{i+1} + k_{i+1} \phi_{i+1}) = -m_i \ddot{z}_g \quad (1)$$

ただし

$$x_i = \text{地面に対する質点 } i \text{ の相対変位}$$

$$= \sum_{j=1}^i u_j \quad (2)$$

$$u_i = x_i - x_{i-1} (x_0 = 0) \quad (3)$$

$$\phi_i = \text{質点 } i \text{ の非線形復元力特性}$$

$$= \alpha_i u_i + (1 - \alpha_i) z_i \quad (4)$$

ここに、 δ_{ij} はクロネッカーデルタ記号、 α_i は降伏比、 z_i は履歴変位を示す。

全体系は、各層を単独に取り出したとき、それらの部分系が直結したものとして表せる。そこで、部分系 i (i 層) を1自由度系と見なすと、微小線形振動時の等価固有円振動数 ω_i と等価減衰定数 h_i ($i = 1 \sim N$) は、次のように表せる。なお、これらは、多自由度系の振動モードに対応するものではないことに留意されたい。

$$\left. \begin{aligned} \omega_i &= \sqrt{k_i/m_i} \\ h_i &= c_i/2\sqrt{m_i k_i} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

上式を用いれば、式(1)は次のようになる。

$$\ddot{x}_i + \bar{f}_i - \frac{m_{i+1}}{m_i}(1 - \delta_{iN})\bar{f}_{i+1} = -\ddot{z}_g \quad (6)$$

ただし、

$$\bar{f}_i = 2h_i\omega_i\dot{u}_i + \omega_i^2\phi_i \quad (7)$$

バイリニア履歴系の非線形復元力特性を考えると、質点間の層間変位 u_i は、クーロンスライダーが付加されたばね $((1 - \alpha_i)k_i$ の剛性) の伸び z_i と、クーロンスライダーの滑り $v_i (= u_i - z_i)$ の和で表せる。この場合、 z_i の履歴モデルは完全弾塑性の特性を有する。 z_i は、降伏変位を Y_i とすると、次式の微分方程式で示される。

$$\dot{z}_i = \dot{u}_i \{1 - H(\dot{x}_i)H(z_i - Y_i) - H(-\dot{x}_i)H(-z_i - Y_i)\} \quad (8)$$

バイリニア履歴系の運動は物理的に次のようである。 $|z_i| < Y_i$ のとき、クーロンスライダーは静止しているので、 $\dot{v}_i = 0$ 、剛性は k_i となる。 $|z_i| = Y_i$ では、 $\dot{z}_i = 0$ 、すなわち $\dot{u}_i = \dot{v}_i$ となる。このとき、剛性は $\alpha_i k_i$ である。クーロンスライダーの滑り方向は、 z_i の伸縮方向と一致しているため、 $z_i v_i > 0$ となる。 z_i と v_i は、この状態で、それぞれ独立したものと見てよい。

バイリニア履歴系の挙動は、上式に示すように、比較的単純である。しかしながら、強震時における非線形復元力特性は現実には複雑な挙動を示す。そのような非線形挙動を忠実に追跡するためには、式(8)のような特定の数式で表すのではなく、復元力モデル自体が柔軟性に富み、かつ比較的多くの非線形挙動を表現できる方がよい。そこで、ここでは、履歴変位 z_i を表すのに、Bouc⁶⁾およびWen⁷⁾が提案した万能型復元力特性モデルを用いることにした。 z_i は次の微分方程式を満たす。

$$\dot{z}_i = \frac{A_i \dot{u}_i - \nu_i (\beta_i |\dot{u}_i| |z_i|^{n_i-1} z_i + \gamma_i \dot{u}_i |z_i|^{n_i})}{\eta_i} \quad (9)$$

上式からわかるように、非線形劣化履歴モデルのパラメーター ($n_i, \beta_i, \gamma_i, A_i, \eta_i$ と ν_i) は、多面的な履歴性状を支配する。すなわち、このモデルでは、複雑な制御によって復元力特性を表現する必要がなく、パラメーターの与え方により、剛性の劣化過程をも含めた履歴性状を容易に表現できる。 A_i, η_i と ν_i は、式(10)に示す履歴エネルギー ϵ_i の関数であり、劣化特性を支配する非負のパラメーター ($\delta_{A_i}, \delta_{\eta_i}$ と δ_{ν_i}) を用いると、式(11)のようになる。

$$\epsilon_i = (1 - \alpha_i)k_i z_i \dot{u}_i = m_i(1 - \alpha_i)\omega_i^2 z_i \dot{u}_i \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} A_i &= A_{i0} - \delta_{A_i} \epsilon_i \\ \eta_i &= \eta_{i0} + \delta_{\eta_i} \epsilon_i \\ \nu_i &= \nu_{i0} + \delta_{\nu_i} \epsilon_i \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここで、 A_{i0}, η_{i0} と ν_{i0} は初期値である。

結局、万能型劣化履歴復元力特性を有する非線形多自由度系の運動方程式は、次式に示す微分方程式となる。ただし、状態量 $X = \{\dots, x_i, \dot{x}_i, z_i, \epsilon_i, \dots\}^T$ の初期値 ($t=0$) は 0 とする。

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \vdots \\ x_i \\ \dot{x}_i \\ z_i \\ \epsilon_i \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \dot{x}_i \\ -2h_i\omega_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) + \alpha_i\omega_i^2(x_i - x_{i-1}) + (1 - \alpha_i)\omega_i^2 z_i - \frac{m_{i+1}}{m_i}(1 - \delta_{iN}) \cdot \{2h_{i+1}\omega_{i+1}(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) + \alpha_{i+1}\omega_{i+1}^2(x_{i+1} - x_i) + (1 - \alpha_{i+1})\omega_{i+1}^2 z_{i+1}\} - \ddot{z}_g \\ \{(A_{i0} - \delta_{A_i}\epsilon_i)(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) - (\nu_{i0} + \delta_{\nu_i}\epsilon_i)(\beta_i|\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}|^{n_i-1} z_i + \gamma_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1})|z_i|^{n_i}) / (\eta_{i0} + \delta_{\eta_i}\epsilon_i) \\ m_i(1 - \alpha_i)\omega_i^2 z_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (12)$$

本研究では、上式を解くのに、Runge-Kutta-Gill 法（京都大学大型計算機センターの SSL II 使用）を用いた。

(2) 応答計算例

ここでは、入力地震動と万能型復元力特性のパラメーターを与えて、3 質点系の構造物の地震応答を計算した。これは、同定の検証のために、与じめ実施しておくものである。

対象とした構造物の質量 m_i (ton/gal) は、下層から上層に対し、6.22, 3.16, 2.66 である。微小線形振動時の初期剛性 k_i (ton/cm) は、下層から、4814, 2490 と 1049, 降伏比 α_i は 0.082, 0.116, 0.123 とした。構造物の減衰行列としては剛性比例形を採用した。等価減衰定数 h_i は 2% にした。

復元力のパラメーターは次のようにした。まず、 A_{i0} , η_{i0} と ν_{i0} の初期値は 1 とする。履歴の形状を決める n_i は質点に係わらず 2 に、 β_i と γ_i は 0.05 とした。劣化特性を示すパラメーターは各質点において同一の値を有する、すなわち、 δ_{A_i} , δ_{η_i} と δ_{ν_i} は 0.0001 とした。

図 2 の入力加速度波形に対する応答計算結果が図 3 である。サンプリング時間間隔は 0.01 秒である。上段から順に、各質点の相対変位 x_i 、相対速度 $\dot{x}_i$ 、相対加速度 $\ddot{x}_i$ と復元力特性（すなわち ϕ_i と u_i の関係）を示す。図より、上層ほど揺れ易く、非線形特性の強いことがわかる。剛性は軟化型の履歴特性を有している。形状パラメーターの n , β と γ を用と、このような特性を有する履歴特性を的確に表現できることがわかる。上層になるほど、剛性の劣化が目立つ。特に 3 層目の復元力は微小振動時の線形特性から時間とともに履歴を描き始め、その履歴特性が劣化している。地震波のコーダ部において、劣化後の剛性は、初動部の初期剛性に比べ、かなり小さくなっている。質点 3 の加速度応答においては、低層のそれに比べ、長周期化現象により、短周期成分が減っていることがわかる。

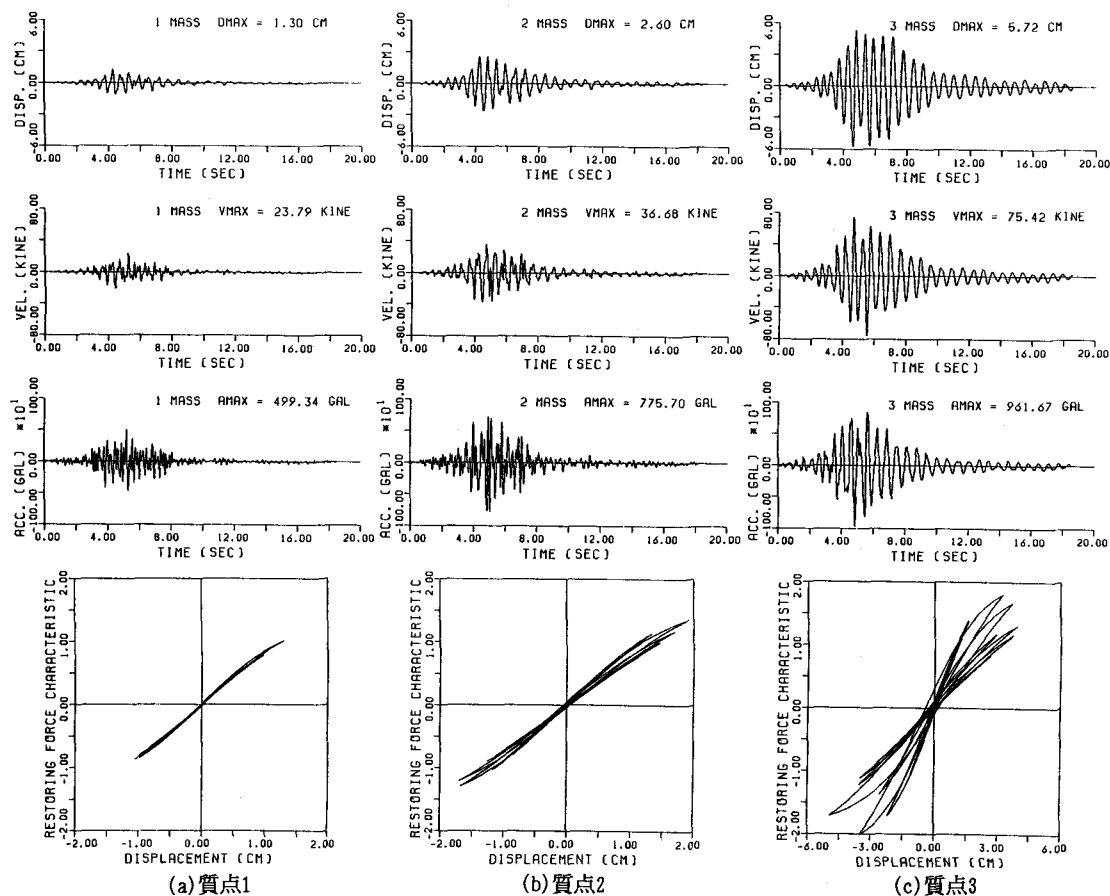


図3 3質点系構造物に対する応答（変位、速度、加速度と復元力特性）

本研究では、図2の地震動と図3の応答の一部が観測されるとし、構造系の未知の万能型劣化復元力特性を同定することを試みる。そこで、3.では、このような柔軟性をもつ履歴モデルを用いて、線形・非線形系パラメーターと振動特性を同定するのに必要な状態方程式と観測方程式の定式化、および拡張カルマンフィルターのアルゴリズムについて述べる。

3. 拡張カルマンフィルターによる構造同定

(1) 状態方程式と観測方程式

今、 i 質点において同定すべき状態量 $Y_i = \{y_{12(i-1)+1} \cdots y_{12(i-1)+12}\}^T (i = 1 \sim N)$ を、 $y_{12(i-1)+1} = x_i, y_{12(i-1)+2} = \dot{x}_i, y_{12(i-1)+3} = z_i, y_{12(i-1)+4} = \epsilon_i, y_{12(i-1)+5} = h_i, y_{12(i-1)+6} = \omega_i, y_{12(i-1)+7} = \alpha_i, y_{12(i-1)+8} = \beta_i, y_{12(i-1)+9} = \gamma_i, y_{12(i-1)+10} = \delta_{Ai}, y_{12(i-1)+11} = \delta_{\eta i}$ および $y_{12(i-1)+12} = \delta_{vi}$ とする。なお、万能型復元力特性のパラメーター n_i は既知の値とし、予じめ各質点ごとに与えておく。構造系の状態量 X は、 $12N$ 要素からなり、 $\{\cdots Y_i^T \cdots\}^T (i = 1 \sim N)$ である。

状態量に関する微分方程式は、運動方程式、万能型劣化履歴復元力モデルと履歴エネルギーに関する式((6), (9) と (10))を用いると、次のようになる。ただし、 $x_i, \dot{x}_i, z_i$ と ϵ_i 以外の状態量、すなわち線形系パラメーター (h_i と ω_i) と非線形系パラメーター ($\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_{Ai}, \delta_{\eta i}$ と δ_{vi}) は基本的に時系列変化しないと考える。

$$\frac{d}{dt} X = \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \vdots \\ Y_i \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \dot{x}_i \\ -\bar{f}_i + \frac{m_i+1}{m_i}(1 - \delta_{iN})\bar{f}_{i+1} - \ddot{z}_g \\ g_i \\ m_i(1 - y_{12(i-1)+7})y_{12(i-1)+6}^2 y_{12(i-1)+3}(y_{12(i-1)+2} - y_{12(i-2)+2}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (13)$$

ただし、 $\bar{f}_i$ は式(7) から、

$$\begin{aligned} \bar{f}_i = & 2y_{12(i-1)+5}y_{12(i-1)+6}(y_{12(i-1)+2} - y_{12(i-2)+2}) \\ & + y_{12(i-1)+6}^2 \{y_{12(i-1)+7}(y_{12(i-1)+1} - y_{12(i-2)+1}) \\ & + (1 - y_{12(i-1)+7})y_{12(i-1)+3}\} \end{aligned} \quad (14)$$

であり、 g_i は式(9) から、

$$\begin{aligned} g_i = & [(A_{i0} - y_{12(i-1)+10}y_{12(i-1)+4})(y_{12(i-1)+2} - y_{12(i-2)+2}) \\ & - (v_{i0} + y_{12(i-1)+12}y_{12(i-1)+4}) \\ & \cdot \{y_{12(i-1)+8}|y_{12(i-1)+2} - y_{12(i-2)+2}|y_{12(i-1)+3}|^{n_i-1}y_{12(i-1)+3} \\ & + y_{12(i-1)+9}(y_{12(i-1)+2} - y_{12(i-2)+2})|y_{12(i-1)+3}|^{n_i}\}] \\ & / (\eta_{i0} + y_{12(i-1)+11}y_{12(i-1)+4}) \end{aligned} \quad (15)$$

となる。

式(13)は連続型の状態方程式を示している。各質点の状態量は12ある。この場合、センサーによって直接観測される状態量は、地面に対する相対変位応答波形 x_i 、相対速度応答波形 $\dot{x}_i$ あるいは両波形のいずれかであると考ええる。センサーは任意の質点に取り付けられるものとする。すると、センサーの設置位置とその種類(変位計、速度計や加速度計)に応じて、観測方程式が考えられる。ここでは、離散型の状態ベクトル X_{t_k} (k ステップの時点、 $t_k = k\Delta t$, Δt =サンプリング時間間隔)を考えて、観測ノイズ V_{t_k} が付加した観測量を $\bar{Y}_{t_k}$ で表す。

$$\bar{Y}_{t_k} = MX_{t_k} + V_{t_k} \quad (16)$$

ただし、 M は観測係数行列、 V_{t_k} はホワイトノイズである。その統計的特性として、期待値は $E[V_{t_k}] = 0$ 、共分散は $E[V_{t_k}V_{t_l}] = R_{t_k}\delta_{kl}$ (δ_{kl} =クロネッカーデルタ記号)で表す。

今、全質点で変位と速度応答が観測されるとすると、 $\bar{Y}_{t_k}$ と M は次のようになる。

$$\bar{Y}_{t_k} = \{x_1\dot{x}_1 \cdots x_i\dot{x}_i \cdots x_N\dot{x}_N\}_{t_k}^T \quad (17)$$

$$M = \left[\begin{array}{cccccccccccc} D & & & & 0 & & & & & & & \\ & D & & & & & & & & & & \\ & & \cdots & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & D & & & & & \end{array} \right] \quad (18)$$

$$D = \left[\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

(2) 拡張カルマンフィルターへの定式化

本研究において、拡張カルマンフィルターは、非線形連続型状態方程式(19)と線形離散型観測方程式(20)を基本としている。式(19)は式(13)に、式(20)は式(16)に対応する。これらの基本式から、非確率関数である基準軌跡のまわりで等価な線形式を導き、それにカルマンフィルターのアルゴリズムを用いて、観測データを順次取り込めば、漸化的な最適状態推定を行うことができる。カルマンフィルターは、最尤法によるパラメーター推定に基づいている。

$$\frac{dX_t}{dt} = f(X_t, t) \quad (19)$$

$$\bar{Y}_t = MX_t + V_t \quad (20)$$

ただし、初期時点 t_0 の最適推定値 $\hat{X}_{t_0}$ と推定誤差共分散 P_{t_0} には既知の量を与える。 X_{t_0} は正規分布に従い、 $X_{t_0} \sim N(\hat{X}_{t_0}, P_{t_0})$ である。

拡張カルマンフィルターのアルゴリズムは次のようである⁸⁾。

a) フィルター方程式

$$\left. \begin{aligned} \hat{X}_{t_{k+1}/t_k} &= \hat{X}_{t_k/t_k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\hat{X}_{t/t_k}, t) dt \\ \hat{X}_{t_{k+1}/t_{k+1}} &= \hat{X}_{t_{k+1}/t_k} + K(\hat{X}_{t_{k+1}/t_k}, t_{k+1})(\bar{Y}_{t_k} - M\hat{X}_{t_{k+1}/t_k}) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

b) カルマンゲイン

$$K(\hat{X}_{t_{k+1}/t_k}, t_{k+1}) = P_{t_{k+1}/t_k} M^T (M P_{t_{k+1}/t_k} M^T + R_{t_{k+1}})^{-1} \quad (22)$$

c) 予測(推定)誤差共分散行列

$$\left. \begin{aligned} P_{t_{k+1}/t_k} &= \Phi(\hat{X}_{t_k/t_k}; t_{k+1}, t_k) P_{t_k/t_k} \Phi^T(\hat{X}_{t_k/t_k}; t_{k+1}, t_k) \\ P_{t_{k+1}/t_{k+1}} &= (I - K(\hat{X}_{t_{k+1}/t_k}, t_{k+1})M) P_{t_{k+1}/t_k} (I - K(\hat{X}_{t_{k+1}/t_k}, t_{k+1})M)^T \\ &\quad + K(\hat{X}_{t_{k+1}/t_k}, t_{k+1}) R_{t_{k+1}} K^T(\hat{X}_{t_{k+1}/t_k}, t_{k+1}) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

d) 初期値

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_{t_0/t_0} &= \dot{X}_{t_0} \\ P_{t_0/t_0} &= P_{t_0} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式(21)～(23)を用いると、式(24)のもとで、時点 $t_k (= k\Delta t)$ における最適推定値は、時々刻々、漸化的に求められる。なお、式(21)の数値積分はRunge-Kutta-Gill法によって計算する。

カルマンフィルタールゴリズムにおける記号の意味は次の通りである。 $\dot{X}_{t_k/t_k}$ と $\dot{X}_{t_{k+1}/t_k}$ は、おのこの、 t_k 時点の観測量 $\bar{Y}_{t_k}$ が与えられたときの、 t_k 時点と t_{k+1} 時点における状態推定(t_k 時点の推定値は最適推定値となる)である。 P_{t_k/t_k} は真値 X_{t_k} と最適推定値 $\dot{X}_{t_k/t_k}$ の差の共分散行列、 P_{t_{k+1}/t_k} は真値 X_{t_k} と $\dot{X}_{t_{k+1}/t_k}$ の差の共分散行列である。

式(23)における遷移行列 Φ は、時点 t_k と時点 t_{k+1} の状態量を関係づける。この遷移行列は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\dot{X}_{t_k/t_k}; t_{k+1}, t_k) &= I + \Delta t \cdot F(\dot{X}_{t_k/t_k}, t_k) \\ F(\dot{X}_{t_k/t_k}, t_k) &= \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \frac{\partial f_i(X_{t_k}, t_k)}{\partial X_j} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}_{X_{t_k} = \dot{X}_{t_k/t_k}} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

式(25)における F は、式(13)右辺の列ベクトルの i 要素を j 番目の状態量 $X_j (j = 1 \sim 12N)$ で偏微分することを示している。なお、 X_j は $X_1 \sim X_{12N}$ よりなる。 X_j を質点 i の状態量 Y_i と対応させれば、 $Y_i = \{y_{12(i-1)+1} \cdots y_{12(i-1)+12}\}^T = \{X_{12(i-1)+1} \cdots X_{12(i-1)+12}\}^T$ である。

具体的に、式(13)の遷移行列を求めると、付録のようになる。

(3) 同定の基本方針

各質点の状態量は、1) 応答量としての変位 x_i 、速度 $\dot{x}_i$ 、履歴変位 z_i と履歴エネルギー ε_i 、2) 線形系のパラメーターである等価減衰定数 h_i と等価固有円振動数 ω_i および3) 非線形系の6つのパラメーター($\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta A_i, \delta \eta_i$ と δv_i)の3グループよりなる。各グループの状態量は異なる性状を示す。そこで、本研究では、星谷・丸山の研究¹⁾と同様に、パラメーターを2つのグループに分け、初期微小振動区間における線形系パラメーターの同定と、観測データの全継続時間での非線形系パラメーターの同定という2段階アルゴリズムを採用する。このように時間区間を分けて異なる物理量を推定する考え方は他の研究にも見られる。すなわち、Toki et al.⁹⁾は、線形構造物を対象にしているものの、入力地震動と構造パラメーターを推定するのに、この2段階推定アルゴリズムを導入している。

初動部の振動応答は大きくなく、線形系の挙動を示すと考えられる。第1段階では、線形振動時間帯において、非線形系パラメーターの初期状態ベクトルと初期誤差共分散行列を0とおき、線形系パラメーターの初期値を与え、上記1)の応答と2)の線形系パラメーターを同定する。次に、第2段階では、第1段階で同定した線形系パラメーターを固定し(初期状態ベクトルとして採用するが、初期誤差共分散行列は0とする)、非線形系パラメーターの初期条件を与え、観測データの全継続時間において構造系の非線形復元力特性(すなわち上記1)と3))を同定する。地震動を受けると、構造系は静止状態から、振動を始める。従って、初期の挙動は線形的であるから、非線形系パラメーターの初期状態ベクトルは0としてよい。

各段階の同定は、星谷・斉藤¹⁰⁾が提案した重み付きグローバルな繰返し法(EK-WGI法)によった。これは、同定結果が初期条件の影響を受けなければ、安定した同定結果を与えるという考え方に基づいている。このアルゴリズムでは、任意初期条件($\dot{X}_{t_0/t_0}$ と P_{t_0/t_0})のもとで実施した拡張カルマンフィルターの同定結果($\dot{X}_{t_s/t_s}$ と P_{t_s/t_s} ; t_s = 観測データの時間長)に対し、次のような操作を行う。つまり、安定性評価基準とパラメーターの収束判定基準を満たさない場合、 $\dot{X}_{t_s/t_s}$ と重み W を乗じた WP_{t_s/t_s} を改めて初期条件、すなわち $\dot{X}_{t_0/t_0}$ および P_{t_0/t_0} として採用し、再び拡張カルマンフィルターによる同定を行い、3回目以降も同様に、拡張カルマンフィルターのグローバルな繰返しをする。

安定性評価基準 $\bar{\theta}$ は、次式に示すように、状態量の最適推定値と観測値の2乗平均相対誤差 r_j を用いて、同定の推定精度を評価する指標である¹⁰⁾。ここでは、 m 回目と $(m+1)$ 回目のグローバルな繰返しにお

ける $\bar{\theta}_m$ と $\bar{\theta}_{m+1}$ に対して、 $|\bar{\theta}_m - \bar{\theta}_{m+1}|/\bar{\theta}_{m+1} < \varepsilon_{\bar{\theta}}$ ($\varepsilon_{\bar{\theta}}$ = 収束判定値) を満たすまで、同定を行うとする。

$$\begin{aligned} r_j &= \left\{ \frac{\sum_{k=1}^s (\bar{y}_{j,t_k} - \hat{X}_{j,t_k/t_k})^2 / \sum_{k=1}^s \hat{X}_{j,t_k/t_k}^2}{\sum_{j=1}^L \left(r_j - \sum_{l=1}^L r_l / L \right)^2} \right\}^{1/2} \\ \bar{\theta} &= \left\{ \sum_{j=1}^L \left(r_j - \sum_{l=1}^L r_l / L \right)^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、任意質点の変位または速度応答 (サンプル番号 j) が、時点 t_k で $\bar{y}_{j,t_k}$ として、観測 (観測波形数 L) されるとする。 $\hat{X}_{j,t_k/t_k}$ は、サンプル番号 j に対応して、式 (21) から求められる最適推定値である。

一方、パラメータの収束判定基準は、 m 回目と $(m+1)$ 回のグローバルな繰り返し時の相対誤差に基づいて、求められる。なお、 $\bar{\pi} < \varepsilon_{\bar{\pi}}$ ($\varepsilon_{\bar{\pi}}$ = 収束判定値) のとき、最適推定値が得られる。

$$\bar{\pi} = \sum_{j=1}^{IN} \left| (\hat{X}_{j,t_s/t_s}^m - \hat{X}_{j,t_s/t_s}^{m+1}) / \hat{X}_{j,t_s/t_s}^{m+1} \right| \quad (27)$$

ここで、 $\hat{X}_j$ としては、第 1 段階の同定でパラメータ h_i と ω_i ($i=2, i=1 \sim N$) を、第 2 段階の同定で 6 つのパラメータ ($\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_{A_i}, \delta_{\eta_i}$ と $\delta_{v_i}, i=6, i=1 \sim N$) を用いる。なお、式 (27) で分母が 0 となる時系列点は無視して考える。

同定の際、初期誤差共分散 P_{t_0/t_0} の与え方に注意しなければならない。これは、任意の値に設定することができず、構造系の振動特性に基づいた物理的な条件によって決められる量である。また、この問題に付随して、重み W としては、グローバルな繰り返しにおいて収束を速めたり、安定した結果が得られるようにするため、物理的に意味のある値を用いる必要がある。

4. 数値計算結果および考察

同定の計算に用いた観測データは、図 3 に示した変位応答および速度応答波形にホワイトノイズを付加したものである。ホワイトノイズは文献 11) に示されている三角級数モデルによる方法 (2) によって求めた。周波数帯域 0.1 ~ 10 Hz の有帯域ホワイトノイズのパワースペクトルは、各質点の変位および速度応答 (図 3) のエネルギーの 1% に相当するように定めた。

(1) 等価減衰定数および等価固有円振動数の同定

図 2 に示した地震入力加速度を見ると、初期の地動の振幅は微小である。そのため、それに対応する図 3 の構造応答は線形挙動をすると考えられる。ここでは、微小線形振動時の等価減衰定数 h_i と等価固有円振動数 ω_i ($i=1 \sim 3$) を同定するために、0 ~ 3 sec における変位および速度応答波形と入力地震動を用いた。

質点に係らず、等価減衰定数の初期推定値は 0.01 に、等価固有円振動数のそれは 40 (rad/sec) に設定した。また、初期条件として、等価減衰定数と等価固有円振動数の推定誤差分散には、おのおの、 10^{-5} と 100 を用いた。EK-WGI 法におけるグローバルな繰り返しの重み W としては、 h_i と ω_i に対して、それぞれ、1.1 と 100 を採用した。カルマンフィルターアルゴリズムにおける観測ノイズの分散 R_{t_k} は、質点ならびに応答によらずに、同一の値 10 を用いた。

図 4 は、グローバルな繰り返しに伴う評価基準値 $\bar{\theta}$ (式 (26)) の変化を示したものである。これより、繰り返しとともに、評価基準値は一定の値に収束していることがわかる。ここでは、7 回目の繰り返しで、最適値に収束したと判定した。

初期推定ならびに最適収束時における等価減衰定数と等価固有円振動数の経時変化を示すと、図 5 のようになる。これより、等価減衰定数は、等価固有円振動数に比べて、時間とともに変動する傾向にあることがわかる。しかし、1 回目に比べて、10 回目のグローバルな繰り返し中における推定値の変動はそれほど大きくない。一方、図 6 には、EK-WGI 法における同定の各グローバルな繰り返し時に得られた推定値の収束過程を示す。等価固有円振動数は、繰り返しの初期に変動している質点もあるが、5 回目以降のグローバルな繰り返しに対し、次第に安定状態へと移行している。一方、等価減衰定数は、グローバルな繰り返しとともに、初期値から漸増していく傾向にあるが、一定値に収束するまでには至っていない。このような推定

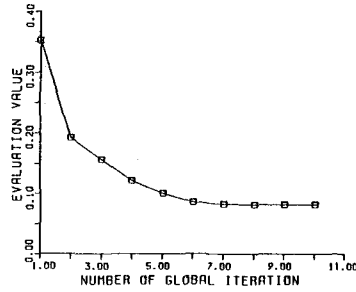


図4 線形応答を示す初期振動区間でのグローバルな繰り返し回数に対する評価基準値の変化

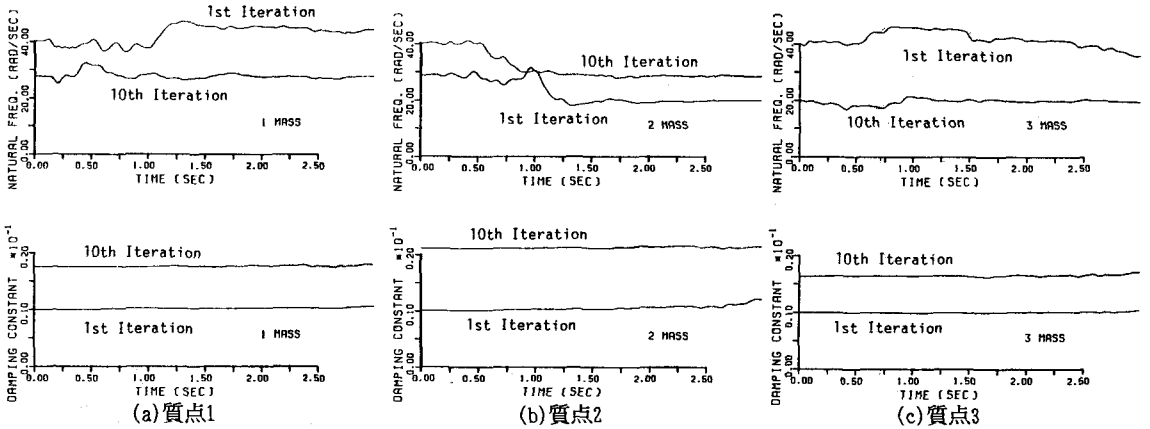


図5 1回目と最適収斂時における線形系パラメータの経時変化

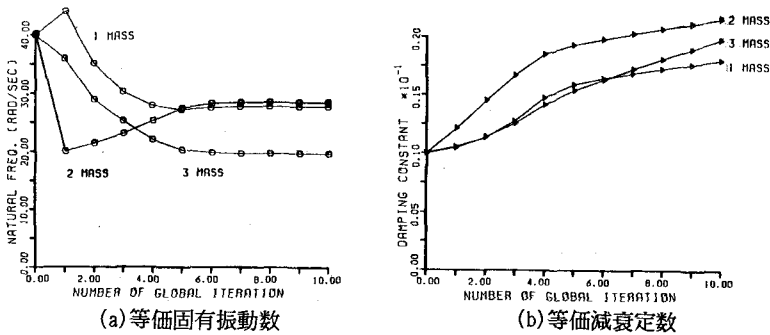


図6 グローバルな繰り返し回数に対する線形系パラメータの収束過程

値の変動過程に係わらず、図4の評価基準値は、6回目以降のグローバルな繰り返しにおいて、さほど変化していない。

推定値と真値の比、すなわち同定率は、質点1, 2と3の等価減衰定数に対して、90.0, 108.0, 99.2%、等価固有円振動数について、99.8, 101.6, 99.8%となる。同定結果は、既知の真値に対して、非常によい対応を示していることがわかる。

(2) 非線形復元力特性の同定

等価減衰定数 h_i と等価固有円振動数 ω_i は、4.(1) で求めた同定結果を固定して用いる。すなわち、状態量の $y_{12(i-1)+5}(h_i)$ と $y_{12(i-1)+6}(\omega_i)$ ($i=1 \sim 3$) には同定値を与え、それらの推定誤差分散を0とする。また、降伏比 α_i は固定しているため、同定パラメータとして考えない。この場合、状態量の $y_{12(i-1)+7}(\alpha_i)$ は真値として固定する。従って、同定パラメータは、 $\beta_i, \gamma_i, \delta_{A_i}, \delta_{\eta_i}$ および δ_{v_i} となる。

同定に用いた初期条件は次のようである。構造系の初期の応答挙動は線形的であるから、各質点における非線形系パラメーターの初期推定値を0とすることが可能である。一方、初期推定誤差分散は、質点によらず、 β と γ に対して 10^{-6} に、 δ_A 、 δ_η と δ_ν について 10^{-11} に設定した。重みWは、グローバルな繰り返し時において、できる限り、パラメーターが非負の値となるように、かつ安定した解を得ることができるように決めた。ここでは、質点によらず、 δ_A 、 δ_η と δ_ν の重みを2に固定した。一方、 β の重みとしては、質点1で1.7の、質点2で1.3の、質点3で1の、 γ の重みとしては質点1で6の、質点2で2.5の、質点3で1.5の値を付与した。

全継続時間(18sec)で同定を試みた結果、評価基準値 $\bar{\theta}$ の収束状況は図7のようになる。ここでは、同定すべきパラメーターの収束判定基準値 π (式(27))の変化をも勘案し、7回目のグローバルな繰り返しで、収束したものと考えた。

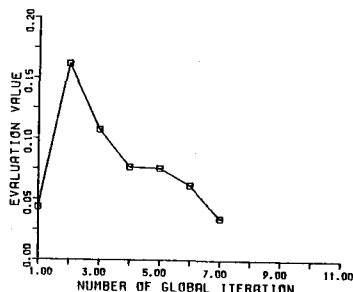


図7 全継続時間区間でのグローバルな繰り返し回数に対する評価基準値の変化

各グローバルな繰り返し時に同定されたパラメーターの収束過程を示すと、図8のようになる。パラメーターの β と γ は、質点によらず、ほぼ同一の値に収束しており、グローバルな繰り返しで安定した同定結果を与えている。パラメーター δ_A はほぼ真値に近い推定値を示している。パラメーター δ_η と δ_ν については精度のよい同定結果を得ていない。ちなみに、同定率(推定値/真値)を質点1, 2と3の順に示すと、パラメーター β については107.5, 98.2, 101.9%、パラメーター γ については98.6, 114.9, 104.5%、パラメーター δ_A については86.5, 115.0, 126.4%、パラメーター δ_η については61.7, 37.2, 152.9%、パラメーター δ_ν については63.6, 205.6, 61.8%となる。パラメーターの δ_η と δ_ν の同定結果は各質点によって異なっている。これは、これらパラメーターの変化が応答あるいは非線形劣化履歴復元力特性に及ぼす影響が小さく、感度が鈍いために生じたものである。

図9には、1回目と7回目のグローバルな繰り返し時に同定された各パラメーターの経時変化を示す。1回目の計算に対し、線形振動から非線形挙動への推移時点すなわち約4sec以降において、各パラメータは初期条件の0から変化を始めていることがわかる。質点1における7回目のグローバルな繰り返し時の地震入力波形の主要動付近で、パラメーターの γ はかなり変動している。その結果、非線形復元力特性は、既知の値に比べて、複雑な挙動を示す。この挙動を除くと、7回目のグローバルな繰り返し時における各パラメーターの経時変化はスムーズであり、ある値の収束結果が得られている。ただし、前述したように、 δ_η と δ_ν は、質点によって異なる推定値に収束している。

図10は、線形および非線形系のパラメーターの最適同定値を用いて求めたときの応答計算結果である。真の応答特性(図3)と図10の結果を比べると、波形特性ならびに多面型復元力特性モデルを示す履歴性状はかなりよい対応を示している。図8と9よりわかるように、一部のパラメーターは必ずしも真値に収束していないが、実測と推定の応答はよく対応している。初期のグローバルな繰り返し時において、復元力特性の同定結果は不安定であった。しかし、7回目のグローバルな繰り返しによって、全継続時間における非線形挙動は真の挙動によく一致していた。このことは、グローバルな繰り返しにより、同定結果の精度が向上することを意味する。しかし、非線形系パラメーター、特に劣化特性を示すパラメーター δ_η と δ_ν は振動応答の変化に鈍感であり、これらのパラメーターを同定することはそれほど容易ではない。

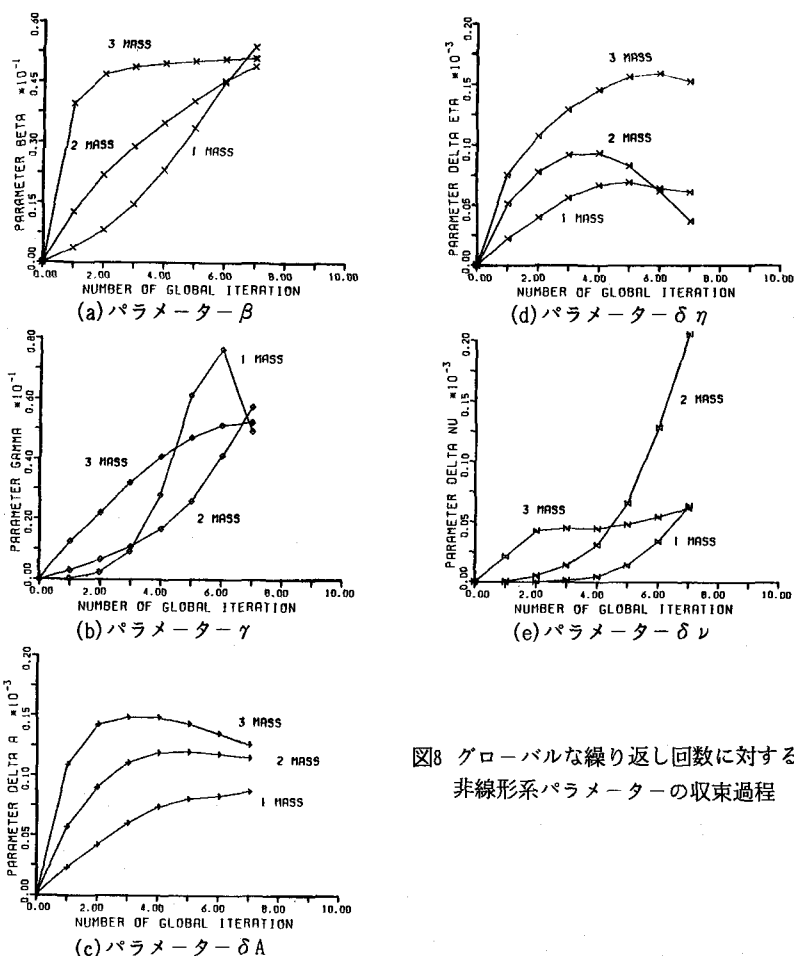


図8 グローバルな繰り返し回数に対する
非線形系パラメーターの収束過程

5. おわりに

本研究では、Bouc および Wen が提案した剛性劣化を伴う多面型復元力特性モデルを用いて、非線形多自由度構造物の動特性の同定アルゴリズムを開発し、数値計算例によってその有効性を検証した。構造系の非線形挙動は、地震入力波形とその応答(変位応答と速度応答)波形を観測データとして、同定した。

解析手法としては、拡張カルマンフィルターのアルゴリズムに重み付きグローバルな繰り返しを併用した EK-WGI 法(星谷・斉藤の方法)を用いた。さらに、星谷・丸山による 2 段階推定アルゴリズムをも採用した。この方法により、第 1 段階では初期微小振動区間で線形系に關与するパラメーターがまず同定され、次に第 2 段階では全継続時間の観測データを用いて履歴パラメーターを推定することができる。

数値計算の結果、微小線形振動時の等価減衰定数と等価固有円振動数は、かなり精度よく同定され、グローバルな繰り返しに対して安定的である。また、多面型復元力モデルの形状を支配する非線形系パラメーター β と γ も、既知の真値にほぼ収束する傾向にあった。一方、劣化特性を規定するパラメーター、特に $\delta \eta$ と $\delta \nu$ については、最適値に至らず、しかも質点によって推定値の収束過程が異なる。しかしながら、このような同定パラメーターを用いて計算した応答特性は真の挙動をほぼ忠実に表していた。このことは、劣化特性を示すパラメーターの応答に及ぼす影響が小さいことによる。それにも係わらず、グローバルな繰り返しとともに、構造系の非線形挙動は複雑な変化を示すものの、最終的には真の挙動により対応を示す。

多面型復元力特性モデルのパラメーターの同定精度を高めるためには、重みの与え方に工夫の余地を残している。しかし、本方法は、1 自由度系或多自由度系に係らず、また線形・非線形系にも適用できるような汎用的なアルゴリズムとなっており、実用に供するものと考えられる。

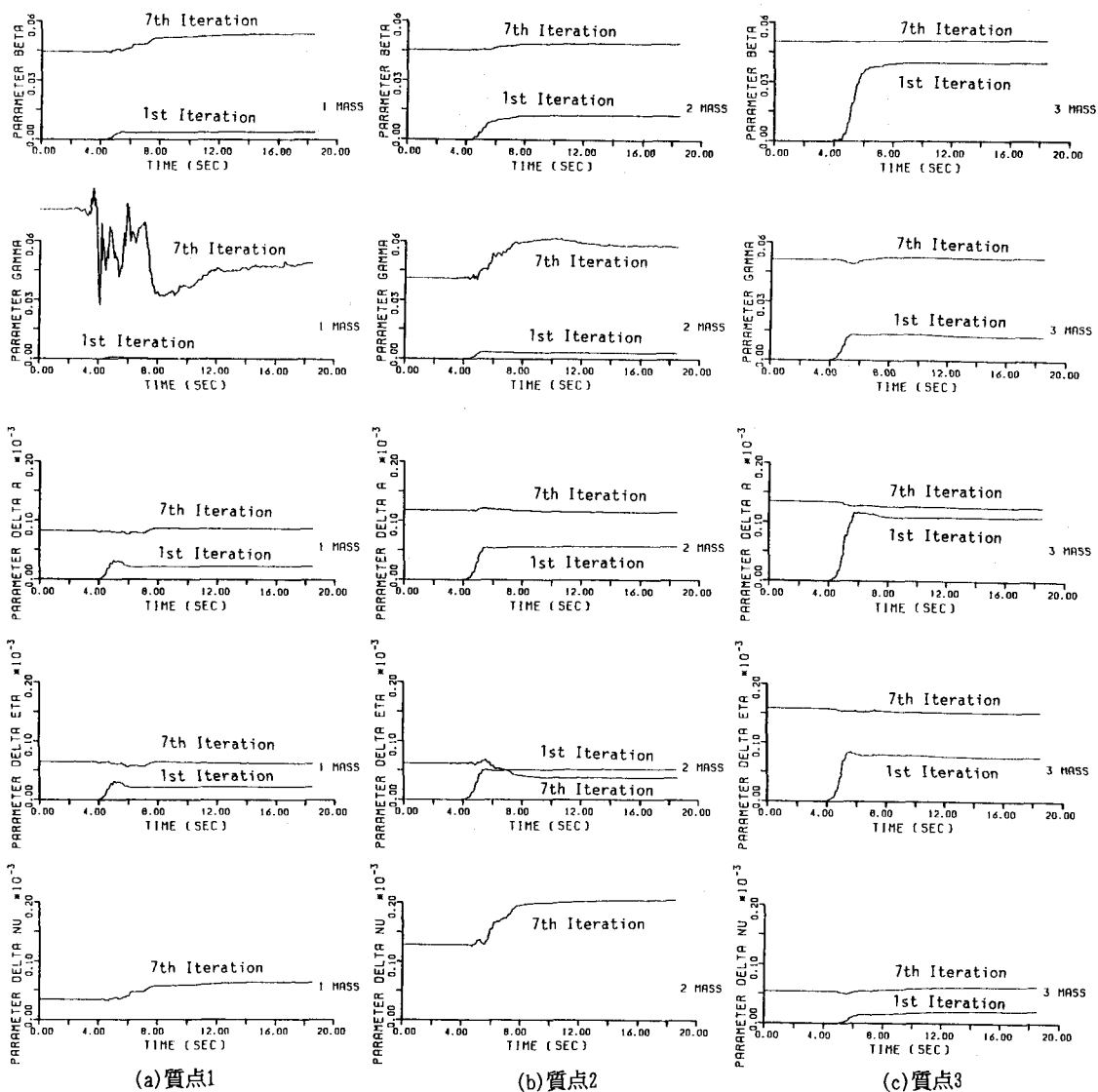


図9 1回目と最適収斂時における非線形系パラメータの経時変化

最後に、本研究の成果は、武蔵工業大学工学部・丸山収講師との有益なディスカッションに負うところが大きい。ここに、記して感謝の意を表します。

付録 状態遷移行列

拡張カルマンフィルターのアルゴリズムに対応する状態遷移行列は、式(13)右辺を各状態量について偏微分することにより得られ、次のようにまとめられる。

$$\begin{aligned}
 \Phi_{t_{k+1}/t_k} &= \Phi(\dot{X}_{t_k/t_k}; t_{k+1}, t_k) \\
 &= I + \Delta t \cdot F(\dot{X}_{t_k/t_k}, t_k)
 \end{aligned} \tag{A1}$$

ここに、 F は次のようである。

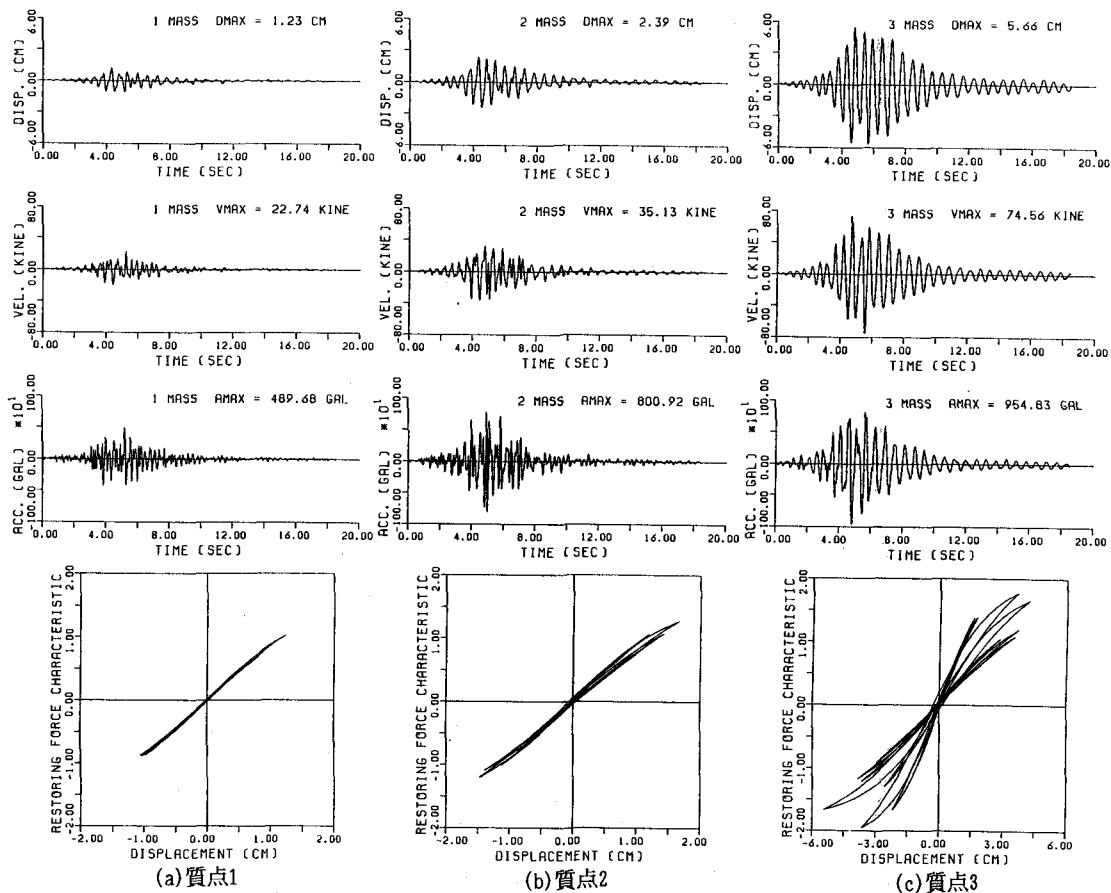


図10 最適同定パラメーターに対する応答 (変位、速度、加速度と復元力特性)

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 & & & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & F_{i,i-1} & F_{i,i} & F_{i,i+1} & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & F_{N-1,N-2} & F_{N-1,N-1} & F_{N-1,N} \\ 0 & & & & 0 & F_{N,N-1} & F_{N,N} \end{bmatrix} \quad (A2)$$

$X_{t_k} = \dot{X}_{t_k/t_k}$

式(A2)における小行列 $F_{i,i-1}$, $F_{i,i}$ と $F_{i,i+1}$ (12行12列) は、それぞれ、 i 質点の状態量の時間変化に及ぼす、 $i-1$, i と $i+1$ 質点の状態量の感度を示す。小行列の $F_{i,i-1}$, $F_{i,i}$ と $F_{i,i+1}$ の要素を、おののおの、 a_{kl} , b_{kl} , c_{kl} ($k, l = 1 \sim 12$) とする。 a_{kl} は a_{21} , a_{22} , a_{32} と a_{42} 、 b_{kl} は b_{12} , b_{21} , b_{22} , b_{23} , b_{25} , b_{26} , b_{27} , b_{32} , b_{33} , b_{34} , b_{38} , b_{39} , b_{310} , b_{311} , b_{312} , b_{42} , b_{43} , b_{46} と b_{47} 、 c_{kl} は c_{21} , c_{22} , c_{23} , c_{25} , c_{26} と c_{27} のみ値をもつ。その他の要素はすべて0である。

今、 $i-1$, i と $i+1$ 質点における時点 t_k での状態量を、それぞれ、 $y_{12(i-2)+j}$, $y_{12(i-1)+j}$ と y_{12i+j} ($j = 1 \sim 12$) とおく。小行列の各成分を示す前に、次の記号を定義しておく。

$$\begin{aligned} p_1 &= (1 - \delta_{iN}) \frac{m_{i+1}}{m_i} \\ p_2 &= |y_{12(i-1)+3}|^{n_i-1} \\ p_3 &= p_1 y_{12i+7}^2 y_{12i+6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_4 &= 2p_1y_{12i}+5y_{12i}+6 \\
p_5 &= 1 - y_{12(i-1)}+7 \\
p_6 &= 1 - y_{12i}+7 \\
p_7 &= y_{12(i-1)}+2 - y_{12(i-2)}+2 \\
p_8 &= y_{12i}+2 - y_{12(i-1)}+2 \\
p_9 &= y_{12(i-1)}+1 - y_{12(i-2)}+1 \\
p_{10} &= y_{12i}+1 - y_{12(i-1)}+1 \\
p_{11} &= A_{i0} - y_{12(i-1)}+10y_{12(i-1)}+4 \\
p_{12} &= \eta_{i0} + y_{12(i-1)}+11y_{12(i-1)}+4 \\
p_{13} &= \nu_{i0} + y_{12(i-1)}+12y_{12(i-1)}+4 \\
p_{14} &= y_{12(i-1)}+8\text{sgn}(p_7)p_2y_{12(i-1)}+3 + y_{12(i-1)}+9|y_{12(i-1)}+3|^{n_i} \\
p_{15} &= (n_i - 1)y_{12(i-1)}+8|p_7||y_{12(i-1)}+3|^{n_i-2}\text{sgn}(y_{12(i-1)}+3)y_{12(i-1)}+3 \\
p_{16} &= y_{12(i-1)}+8|p_7||y_{12(i-1)}+3|^{n_i-1} \\
p_{17} &= n_iy_{12(i-1)}+9p_7p_2\text{sgn}(y_{12(i-1)}+3) \\
p_{18} &= y_{12(i-1)}+8|p_7|p_2y_{12(i-1)}+3 \\
p_{19} &= y_{12(i-1)}+9p_7|y_{12(i-1)}+3|^{n_i} \\
p_{20} &= p_{11}p_7 - p_{13}(p_{18} + p_{19}) \\
p_{21} &= y_{12(i-1)}+12(p_{18} + p_{19}) \\
p_{22} &= |p_7|p_2y_{12(i-1)}+3
\end{aligned}$$

以上 (A3)

上式の記号を用いると、小行列 $F_{i,i-1}$, $F_{i,i}$ と $F_{i,i+1}$ の各要素は、式 (A4) ~ (A6) の要素を除き、0 となる。

1) $F_{i,i-1}$ について

$$\begin{aligned}
a_{21} &= y_{12(i-1)}+7y_{12(i-1)}^2+6 \\
a_{22} &= 2y_{12(i-1)}+5y_{12(i-1)}+6 \\
a_{32} &= (-p_{11} + p_{13}p_{14})/p_{12} \\
a_{42} &= -p_1p_5y_{12(i-1)}^2+6y_{12(i-1)}+3
\end{aligned}$$

以上 (A4)

2) $F_{i,i}$ について

$$\begin{aligned}
b_{12} &= 1 \\
b_{21} &= -p_3 - y_{12(i-1)}+7y_{12(i-1)}^2+6 \\
b_{22} &= -p_4 - 2y_{12(i-1)}+5y_{12(i-1)}+6 \\
b_{23} &= -p_5y_{12(i-1)}^2+6 \\
b_{25} &= -2y_{12(i-1)}+6p_7 \\
b_{26} &= -\{2y_{12(i-1)}+5p_7 + (y_{12(i-1)}+7p_9 + y_{12(i-1)}+3p_5)y_{12(i-1)}+6\} \\
b_{27} &= y_{12(i-1)}^2+6(y_{12(i-1)}+3 - p_9) \\
b_{32} &= (p_{11} - p_{13}p_{14})/p_{12} \\
b_{33} &= -p_{13}(p_{15} + p_{16} + p_{17})/p_{12} \\
b_{34} &= -\{(y_{12(i-1)}+10p_7 + p_{21})p_{12} + p_{20}y_{12(i-1)}+11\}/p_{12}^2 \\
b_{38} &= -p_{13}p_{22}/p_{12} \\
b_{39} &= -p_{13}p_7|y_{12(i-1)}+3|^{n_i}/p_{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{310} &= -y_{12(i-1)+4}p_7/p_{12} \\
b_{311} &= -p_{20}y_{12(i-1)+4}/p_{12}^2 \\
b_{312} &= -y_{12(i-1)+4}(p_{18} + p_{19})/p_{12} \\
b_{42} &= p_1p_5y_{12(i-1)+6}^2y_{12(i-1)+3} \\
b_{43} &= p_1p_5y_{12(i-1)+6}^2p_7 \\
b_{46} &= 2p_1p_5y_{12(i-1)+6}y_{12(i-1)+3}p_7 \\
b_{47} &= -p_1y_{12(i-1)+6}^2y_{12(i-1)+3}p_7
\end{aligned}$$

以上 (A5)

3) $F_{i,i+1}$ について

$$\begin{aligned}
c_{21} &= p_1y_{12i+7}^2y_{12i+6} \\
c_{22} &= 2p_1y_{12i+5}y_{12i+6} \\
c_{23} &= p_1p_6y_{12i+6}^2 \\
c_{25} &= 2p_1y_{12i+6}p_8 \\
c_{26} &= 2p_1\{y_{12i+5}p_8 + (y_{12i+7}p_{10} + y_{12i+3}p_6)y_{12(i+1)+6}\} \\
c_{27} &= p_1(y_{12i+6}^2p_{10} - y_{12i+6}^2y_{12i+3})
\end{aligned}$$

以上 (A6)

参考文献

- 1) 星谷勝・丸山収：非線形構造系の地震時挙動特性の同定、土木学会論文集、第 386 号/I-8、pp.397~405、1987 年 10 月。
- 2) Loh, C.-H. and Lee, C.-H. : Identification study on base isolation systems by full-scale buildings, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol.9, No.3, pp.169s~180s, October 1992.
- 3) Oreta, W. C. and Tanabe, T. : Localized identification of structures by Kalman filter, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol.9, No.4, pp.217s~225s, January 1993.
- 4) Tan, R. Y. and Chen, C. C. : Structural identification of a nonlinear MDOF system by extended Kalman filter, Proc. of the Ninth World Conference on Earthquake Engineering, Vol.V, pp.V-325~V-330, August 1988.
- 5) 久保田秀樹・野田茂：非線形多自由度履歴系の震動特性の同定、土木学会第 46 回年次学術講演会講演概要集、第 1 部、pp.1142~1143、平成 3 年 9 月。
- 6) Bouc, R. : Forced vibration of a mechanical system with hysteresis, Abstract, Proc. of the Fourth Conference on Nonlinear Oscillation, p.315, 1967.
- 7) Wen, Y.-K. : Method for random vibration of hysteretic systems, Journal of Engineering Mechanics Division, A. S. C. E., Vol.102, No.EM2, pp.249~263, April 1976.
- 8) Jazwinski, A. H. : Stochastic Process and Filtering Theory, Academic Press, 1970.
- 9) Toki, K., Sato, T. and Kiyono, J. : Identification of structural parameters and input ground motion from response time histories, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol.6, No.2, pp.413s~421s, October 1989.
- 10) 星谷勝・齊藤悦郎：拡張カルマン・フィルターを用いた同定問題の各種振動系への応用、土木学会論文報告集、第 339 号、pp.59~67、1983 年 11 月。
- 11) 星谷勝：確率論手法による振動解析、鹿島出版会、昭和 49 年 8 月。