第3回システム最適化に関するシンポジウム講演論文集　1993年12月

(28) 分枝限定法を利用した耐震壁の最適配置設計

OPTIMAL ALLOCATION OF SHARE-WALL BY BRANCH-AND-BOUND METHOD

小浜芳朗*1　高田豊文*2　宮村篤典*3　太田彰*4

By Yoshiro KOHAMA, Toyohumi TAKADA, Atsunori MIYAMURA and Akira OHTA

The allocation problem of shear-walls can be described as a combinatorial optimality of both torsional rigidity and wall weight under constraints from architectural, structural and constructional aspects. This study deal with application of the branch-and-bound method with binary-branching operation to optimal allocation of shear-walls in 3D frames against twisting about a vertical axis. Concerned with effectivity of search for optimal solutions, the present optimality criteria is compared to our previous work[1] which is applied the branch-and-bound method with multi-branching operation.

Key Word : Branch-and-Bound Method, Combinatorial Optimality, Structural Design, Shear-Wall Allocation Problem

1 はじめに

今日，実際の構造最適化問題は，単なる反復計算や専門家の思考だけに頼っている場合がほとんどである。最近では数理計画法の構造工学分野への導入が試みられているが，これらの手法のほとんどは，決定変数が連続である問題を対象としているか，あるいは決定変数を連続と仮定して数理計画法を適用している。

耐震壁の最適配置問題は，決定変数が壁厚さや壁配置位置など本質的に離散的で連続化できないので組合せ最適化問題となる。組合せ最適化問題の最も基本的な解法は，全ての組合せの中から最適なものを見つけだす総列挙法であるが，この方法では組合せ数が増加すると実時間内での計算が困難となってしまう。本研究では分枝限定法を用いた耐震壁の最適配置設計手法を開発し，いくつかの設計例に適用して考察を行った。この手法により，これまで設計者の負担となっていた最適壁配置の探索が効果的に行うことができると考える。

2 分枝限定法の原理

分枝限定法の基本的な考え方は，直接解くことが困難な問題をいくつかの小規模な，より易しい問題に分解し，その全てを解くことにより元の問題を解こうとするものである。

2.1 分枝操作

一般に，最小化を目的とする最適化問題 P_i は，次のように定義できる。

$$P_i \left| \begin{array}{l} f(\{x\}_j) \longrightarrow \min \\ \text{subject to} \quad x_j \in S_i, \quad S_i \subset X_i \end{array} \right. \tag{1}$$

*1 工博	三重大学教授	工学部建築学科	(三重県 津市 上浜町 1515)
*2 工修	三重大学助手	工学部建築学科	(三重県 津市 上浜町 1515)
*3 工博	名古屋市立女子短期大学教授		(名古屋市 千種区 北千種)
*4	三重大学大学院	工学部建築学科	(三重県 津市 上浜町 1515)

ここに，X_i は離散変数空間，S_i はその部分集合で許容領域を表す。このとき X_i を次の条件式

$$X_{ij} \subset X_i, \quad S_i = S_i \cap (\cup_{j=1}^{k} X_{ij}), \quad j = 1, 2, \cdots, k \tag{2}$$

を満たす k 個の部分変数空間 $X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{ik}$ に分解する。ここで，部分問題を一部の設計変数値が固定された問題と定義すると，式(1)，(2)により次の k 個の部分問題 $P_{i1}, P_{i2}, \cdots, P_{ik}$ が生成される。

$$P_{ij} \left| \begin{array}{ll} f(\{x\}_j) \longrightarrow & \min \\ \text{subject to} & x_j \in S_{ij}, \quad S_{ij} \equiv S_i \cap X_{ij} \end{array} \right. \tag{3}$$

以上のように，原問題をいくつかの部分問題に分解することを分枝操作という。また，得られた部分問題に逐次 k-分枝の分枝操作を加えていくと，図1に示す樹状の k–分枝図が得られる。図1では，全変数が確定された部分問題を2重丸で示している。

一般に，離散変数の最適化問題の最適解は唯一ではなく，複数の最適解を要素とする解集合を構成するので，問題 P_i の最適値を $f(P_i)$，その最適解集合を $O(P_i)$ で表すと下式が成立する。

$$f(P_i) = \min_{1 \le j \le k} f(P_{ij}) \tag{4}$$

$$O(P_i) = \cup \{O(P_{ij}) \mid f(P_{ij}) = f(P_i),\ j = 1, 2, \cdots, k\} \tag{5}$$

これは，部分問題 $P_{ij} (j = 1, \cdots, k)$ を全て解けば，等価的に問題 P_i が解けることを意味している。

2.2 限定操作

上述の分枝操作だけでは単なる総列挙法になるので，探索効率を高めるために，全部分問題の一部のみを実際に処理するよう工夫する必要がある。分枝限定法では，途中の部分問題の解が原問題の最適解になり得ないことが明白であれば，それ以上の分枝操作を中止できる。これには次の性質が利用できる。

1. ある部分問題 P_i の最適解が得られれば，P_i を更に分解する必要はない。

2. ある部分問題 P_i が原問題 P_0 の最適解を与えないことが結論できれば，P_i を更に分解する必要はない。

以上の分枝操作の中止を限定操作と呼び，1 あるいは 2 に該当すれば「P_i は終端された」と言う。

限定操作を具体的に実行する方法は後で述べるが，対象となる問題の構造を利用した様々な工夫を行って探索効率を高める必要がある。

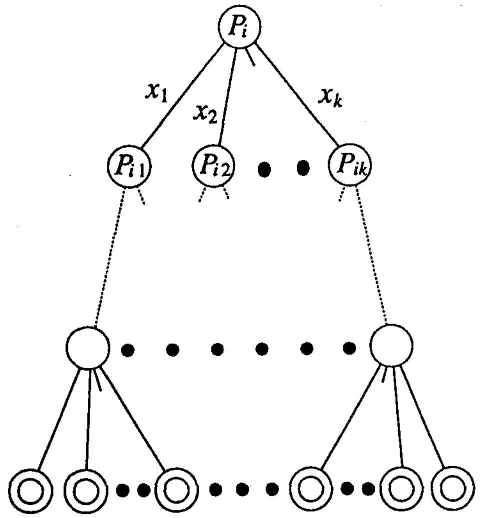

図 1: k–分枝図

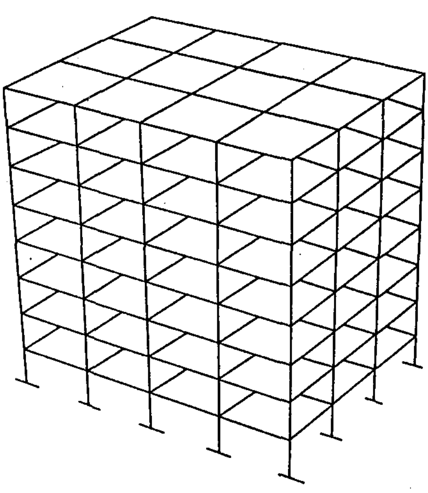

図 2: モデル架構

3　最適耐震壁配置問題

任意の平面形状を持ち，偏心を有するRC多層建物に耐震壁を配置することを考える。壁配置可能位置は各層とも同一で，それぞれNヶ所とする。耐震壁の配置においては，構造的制約に加えて建築計画的，施工的な制約も受けるが，本稿では満足すべき制約条件を以下のように設定する。

1. 強度制約条件： $250\sum_j a_{W_j} + 70\sum_j a_{C_j} \geq Q_{ud}$　(6)
2. 水平剛性制約条件： $\left.\begin{array}{lll} K_{q1} & \geq K_{qd} ; & \text{第1層のとき} \\ \dfrac{K_{qs}}{K_{q1}} & \simeq k_{ts} ; & \text{第2層以上のとき} \end{array}\right\}$　(7)
3. 偏心率制約条件： $\dfrac{e_r}{r_e} \leq R_a$　(8)
4. 耐震壁基礎浮き上がり制約条件： $\sum_{m=1}^{s} {}_m k_{W_j} \leq (1+\alpha_F)\dfrac{l_j}{h}\dfrac{A_{fC_j}}{A_{f_T}}\dfrac{K_{q1}}{C_B}$　(9)
5. 壁配置位置制約条件： 建築計画的条件
6. 施工上制約条件： 離散的壁厚さ

ここに，a_{W_j}，a_{C_j}はそれぞれW_j壁，C_j柱の断面積，Q_{ud}は必要保有水平耐力，K_{qs}は第s層の水平剛性，K_{qd}は第1層の必要水平剛性，k_{ts}は第s層の目標剛性分布係数，r_eは剛性半径，R_aは許容偏心率，${}_m k_{W_j}$は第m層j壁の剛性，α_Fは基礎重量比，l_jはj壁のスパン長さ，hは階高，A_{fC_j}，A_{f_T}はそれぞれC_j柱負担床面積，全床面積，C_Bはベースシェア係数を表す。

以上の制約条件の下で，各層のねじれ剛性を最大化し，かつ建設コストに関係する壁量を最小化する三次元的壁配置設計解を探索する。この問題は厳密には多目的最適化問題として定式化されるが，ねじれ剛性最大となる設計解を生成し，これらの組合わせ集合から壁量の総和が最小となる最適設計解を探索する手法を用いる。

3.1　第s層最適化問題の定式化

ある層においてNヶ所の壁配置可能位置にN_W枚の耐震壁を適当に配置して，ねじれ剛性K_{z,N_W}を最大にする問題は，次のように定式化される。

$$P_0 \left| \begin{array}{l} K_{z,N_W} = \displaystyle\sum_{j\in \boldsymbol{J}_{N_W}} k_z(L_j) \longrightarrow \max \\ \text{subject to} \\ \quad \displaystyle\sum_{j\in \boldsymbol{J}_{N_W}} a_{W_j} \geq \frac{1}{250}(Q_{ud} - 70\sum_{j\in \boldsymbol{J}_{N_W}} a_{C_j}) \equiv A_d \\ \quad K_{q1}(\boldsymbol{L}_{N_W}) \geq K_{qd};\ \ \text{第1層のとき} \\ \quad K_{qs}(\boldsymbol{L}_{N_W}) \simeq k_{ts}K_{q1};\ \ \text{第2層以上のとき} \\ \quad \dfrac{e_r(\boldsymbol{L}_{N_W})}{r_e(\boldsymbol{L}_{N_W})} \leq R_a \\ \quad k_{W_j} \leq (1+\alpha_F)\dfrac{l_j}{h}\dfrac{A_{fC_j}}{A_{f_T}}\dfrac{K_{q1}}{C_B} - \displaystyle\sum_{m=1}^{s-1} {}_m k_{W_j} \equiv K_{Wd} \\ \quad \boldsymbol{L}_{N_W} = \{L_j | j \in \boldsymbol{J}_{N_W}\} \end{array} \right. \qquad (10)$$

ここに，$k_z(L_j)$はj壁によるねじれ剛性の寄与分，$\boldsymbol{J}_{N_W}$は要素数がN_Wの添字集合($\boldsymbol{J}_{N_W} \subset \{1,2,\cdots,N\}$)，$L_j$は壁$j$の位置を表す。

以上の目的関数，制約条件の下で以下に示す分枝操作，限定操作によって最適解の探索を行う。

<u>分枝操作</u>

式(10)の最適化問題において変数は壁配置位置L_jであるから，P_0は第1番目の壁配置位置をL_iに固定すると，次のような部分問題$P_i (i=1,2,\cdots,N)$に分解される。

$$P_i \left| \begin{array}{l} K_{zj,N_W} = k_z(L_i) + \displaystyle\sum_{j\in \boldsymbol{J}_{N_W-1}} k_z(L_j) \longrightarrow \max \\ \text{subject to} \quad g(\boldsymbol{L}_{N_W}) \in C_s \end{array} \right. \qquad (11)$$

ここに，$g(\boldsymbol{L}_{N_W})$ は力学関数，C_sは第 s 層の許容域を表し，前述の制約条件群をまとめたものである。同様にP_iはそれぞれ $N-i$ 個の部分問題 $P_{ij}(j>i)$ に分解され，以後部分問題 $P_{ijk\cdots}$が生成される。

さて，分枝操作においては，どの変数から固定するかによって，最適解を得るまでに分割しなければならない部分問題の個数が大きく異なる。一般に分枝変数の選択の基準は，目的関数値や他の変数の値に与える影響の大きな変数を優先するのがよいと考えられる。本最適化問題では，目的関数の係数の大きさ，つまり $k_z(L_j)$ の大きさの順に選択，固定して分枝操作を行う。従って，ねじれ剛性への寄与分 $k_z(L_j)$ を次式のように順序づけておく。

$$k_z(L_1) \geq k_z(L_2) \geq \cdots \geq k_z(L_N) \tag{12}$$

<u>限定操作</u>

式(12)より設計変数 $k_z(L_j)$ が大きさの順に並んでいるので以下の限定操作を行うことができる。

1. 以後の分枝操作を実行しても明らかに N_W 枚の壁配置が不可能な場合は直ちに終端できる。

2. ある部分問題 $P_{ik}(k>i)$ の最適解 $\boldsymbol{L}'_{N_W} = \{L_j | j \in \boldsymbol{J}'_{N_W}\}$ が得られているとする。$q \equiv \min_{j \in \boldsymbol{J}'_{N_W}} j$ とおくと，$l \geq q$ なる l に対する部分問題 P_l は全て終端できる。なぜならば，問題 P のねじれ剛性の最大値を $K_z(P)$ で表すと，

$$\begin{aligned} K_z(P_{ik}) &= \sum_{j<i} k_z(L_j) + k_z(L_i) + k_z(L_k) + \cdots + k_z(L_q) \\ K_z(P_q) &= \sum_{j<i} k_z(L_j) + k_z(L_q) + \cdots \end{aligned}$$

であるから，明らかに $K_z(P_{ik}) \geq K_z(P_q) \geq K_z(P_l)$ である。

3. ある問題 P_i の部分問題 P_{ik} が全変数の固定された部分問題であり，かつその解が許容解であるとき，$l>k$ に対する部分問題 P_{il} は終端できる。

以上の分枝操作及び限定操作に従って計算を実行すると，複数の第 s 層 N_W枚最適壁配置が求められる。これらの設計解集合は次の全層最適化問題の候補解として用いられる。

3.2 全層最適化問題の定式化

平面配置の最適化によって，第 s 層の壁枚数が $N_W = 1, 2, \cdots, N$ のときの最適配置 $\boldsymbol{L}^*_{N_W}$ が得られ，これらは第 s 層の最適解集合 $\boldsymbol{W}_s$ を構成する。

$$\boldsymbol{W}_s = \{\boldsymbol{L}^*_1, \boldsymbol{L}^*_2, \cdots, \boldsymbol{L}^*_N\} \tag{13}$$

M 層建物の高さ方向の最適壁配置問題は，各層の最適解集合を積層し壁量最小化を目標として，次のように定式化される。

$$Q_0 \left| \begin{array}{ll} A_W = \sum_{s=1}^{M} A_s(W_s|W_{s-1}) \longrightarrow \min & \\ \text{subject to} \qquad g(W_s) \in C_s, & s = 1, 2, \cdots, M \end{array} \right. \tag{14}$$

ここに，A_W は全壁量，W_s は第 s 層の壁配置で $W_s = {}_s\boldsymbol{L}^*_{N_W} \subset \{{}_s\boldsymbol{L}^*_1, \cdots, {}_s\boldsymbol{L}^*_N\}$，$A_s(W_s|W_{s-1})$ は第 $s-1$ 層の壁配置が W_{s-1} の条件の下で第 s 層の壁配置が W_s のときの第 s 層壁量を表す。設計変数は $W_1, \cdots, W_M$ であり，式(14)の条件に従って各層の最適壁配置が決定される。

<u>分枝操作</u>

第1層の壁配置を $W_1^{(k)} \in \boldsymbol{W}_1$ に固定すると，原問題 Q_0 は次の N個の部分問題 $Q_k(k=1,\cdots,N)$ に分解することができる。

$$
Q_s \left| \begin{array}{ll} A_{W_s} = A_1(W_1^{(s)}) + \sum_{s=2}^{M} A_s(W_s|W_{s-1}) \longrightarrow \min & \\ \text{subject to} \qquad g(W_s) \in C_s, \quad s = 2, \cdots, M & \end{array} \right. \tag{15}
$$

同様に第 2 層の壁配置を $W_2^{(k)} \in \boldsymbol{W}_2$ に固定すると，Q_k は更に部分問題 Q_{kl} に分解され，以後部分問題 $Q_{klm\cdots}$ が生成される。

上記の分枝操作の分枝変数は各層の最適壁配置 $W_s^{(k)}$ であるが，この分枝変数の数は制約条件によって上層になるに従い減少する。

<u>限定操作</u>

平面配置の最適化の場合と同様に，最適解に近い許容解を早期に得るために，分枝変数 W_s を壁量の大きさ $A_s(W_s^{(k)})$ に従って順序づけしておく。

$$
A_s(W_s^{(1)}) < A_s(W_s^{(2)}) < \cdots < A_s(W_s^{(N)}) \tag{16}
$$

上式のように順序づけられた $W_s^{(k)}$ の下で，次の限定条件を用いる。

1. ある部分問題 Q_k に許容解が存在しない場合，Q_k は直ちに終端できる。
2. ある許容解が得られていて，その壁量を A'_W とする。部分問題 Q_k において $l \le M$ に対し，

$$
\sum_{s=1}^{l} A_s(W_s|W_{s-1}) > A'_W \tag{17}
$$

が成立するならば，Q_k は終端できる。

3. ある部分問題 Q_{kl} が，全層の壁配置が決定された問題であり，かつその解が許容解であるとき，$m > l$ に対する部分集合 Q_{km} は全て終端できる。

4　設計例

図3，4の平面形状，配置制約条件をもつ8層建物に適切に耐震壁を配置する問題を考える。設計例1の初期状態では，偏心はないが強度が不足しているために耐震壁を配置する必要がある。また設計例2の初期状態では，強制配置壁があるために偏心が大きく，耐震壁の配置によって偏心量を小さくしなければならない。これらの設計例に対して本手法を適用する。

設計例1，2とも最適解は複数存在し，そのうちの1つづつを図5，6に示す。これらの図において A_W/A_0 は第1層の柱断面積に対する耐震壁断面積の比を表す。設計例1の最適配置では，初期状態で強度が不足しているために剛性，強度の大きい内側の壁が多数配置されている。また設計例2の最適配置では，重心に関して強制配置壁と対称な位置に耐震壁が多数配置されている。これらの最適配置は人間の直観とも一致した配置となっている。

5　まとめ

本研究では，分枝限定法を用いて高層建物における耐震壁配置の最適化を行った。これまで手法では，許容解を発見するのにさえ莫大な労力を費やすこともあったが，本手法の限定操作によりこの問題点が大幅に改善された。今後は，更に探索効率を高めるために，高さ方向(全層最適化問題)に対する有効な限定操作の開発が必要である。

また，本稿の最適壁配置問題には非線形の制約条件が含まれ，線形計画問題による解法が直接適用できない。しかし，非線形の部分を線形化することができればこの問題は解決すると考えられる。解決の具体的方法としては，新しい変数を導入して非線形部分を線形化し，混合整数計画問題として定式化する方法があり，この点については現在検討中である。

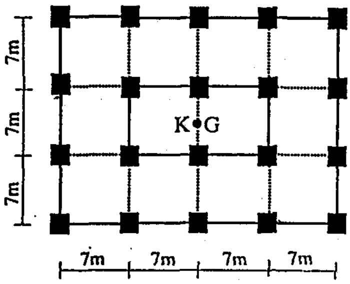

図 3: 設計例 1 平面図

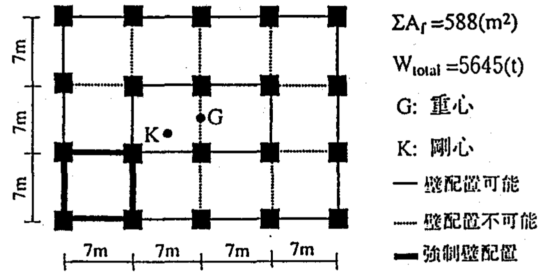

図 4: 設計例 2 平面図

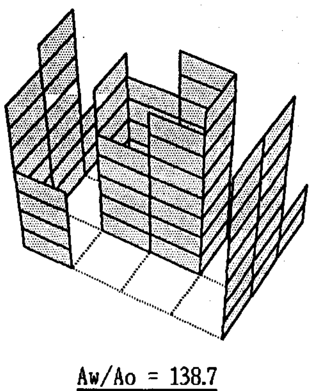

図 5: 設計例 1 最適耐震壁配置

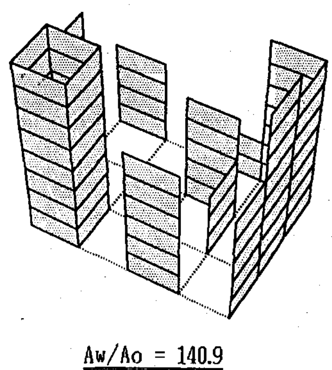

図 6: 設計例 2 最適耐震壁配置

なお，本研究は，文部省科学研究費補助金一般研究 (B)「離散型設計変数をもつ構造設計問題の最適化手法に関する研究」(課題番号：05452250，研究代表者：小浜芳朗) および平成 5 年度財団法人東海産業技術振興財団助成研究「建築設計における構造計画の最適化法に関する研究」(研究代表者：小浜芳朗) によったことを付記する。

参考文献

[1] 高田豊文，小浜芳朗，宮村篤典 ： 分枝限定法による 3 次元架構の最適壁配置設計，構造工学論文集 Vol.39B,pp.43 ~ 50，1993

[2] 宮村篤典，小浜芳朗，高田豊文 ： 発見的探索法の離散型構造設計問題への応用，構造工学論文集 Vol.38B,pp.1 ~ 7，1992

[3] 刀根薫 ： 数理計画，朝倉書店，1983

[4] 茨木俊秀 ： 組合せ最適化－分枝限定法を中心として，産業図書，1983

[5] 今野浩，鈴木久敏 ： 整数計画法と組合せ最適化，日科技連，1991