

(14) 複合材構造の強度・剛性最適化

STRENGTH AND STIFFNESS OPTIMIZATION
OF COMPOSITE STRUCTURES

福永久雄* 関根英樹**
Hisao FUKUNAGA Hideki SEKINE

The paper presents an optimal design approach on laminated composite structures for strength and stiffness. In the stiffness optimization problems, the buckling optimization of symmetrically laminated plates is treated by using lamination parameters as design variables. The optimal laminate configurations to maximize the buckling stresses can be obtained efficiently based on the mathematical programming method. For a laminated composite panel, a high-quality approximation approach on the stress resultants is presented using the lamination parameters as intermediate design variables. The approximation approach leads to an efficient optimization of laminated composite panels under strength and stiffness constraints.

Key Words: structural optimization, composite structure, lamination parameters, buckling, approximation

1. まえがき

航空宇宙機や宇宙構造物の主要構造材料として炭素繊維を中心とした先進複合材料が使用されるようになり、このような複合材構造の軽量化を進めるためには、複合材料の異方性を活用して構造・材料の最適化を行うことが重要となっている。積層複合材構造の最適化に関しては、これまで種々の手法が提案されているが、繊維角の最適化については制約条件と設計変数との強い非線形性により、まだ十分に機能する効率的解法が確立されていない。

本研究では、炭素繊維からなる対称積層材について、強度・剛性に関する効率的最適化手法を検討する。まず、剛性最適化問題として、種々の面内荷重を受ける対称積層材について、圧縮、せん断、および、組合わせ荷重下での座屈特性を検討するとともに、座屈応力を最大とする積層構成を求める。本最適化問題では、積層パラメータを設計変数に用いることにより、座屈応力と設計変数間の非線形性の程度を下げることで、局所的最適解に陥ることなしに全体的最適解が求められる。一方、面内荷重を受ける積層パネルについて、強度条件下での効率的最適化手法を発展させる基礎として、合力の設計変数に関する近似法について検討する。本研究では、積層パラメータを中間的設計変数に用いて、層厚および繊維配向角に関する合力近似を行う。本手法は、特に、繊維角に関する合力近似の精度が良く、大規模な複合材構造の繊維角・層厚最適化に有効に適用可能であることが示される。

*助教授 **教授 東北大学工学部機械航空工学科 (〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉)

2. 対称積層板の座屈特性とその最適化

2・1 基礎式

古典積層理論を用いるとき、図1に示す対称積層板の組合せ荷重下の座屈の基礎方程式は次式で与えられる。

$$D_{11}w_{,xxxx} + 4D_{16}w_{,xxyy} + 2(D_{12} + 2D_{66})w_{,xyxy} + 4D_{26}w_{,xyyy} + D_{22}w_{,yyyy} = -N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} \quad (1)$$

ここで、 w は変位、 D_{ij} は面外剛性、 $N_x (=k_x P)$ は軸圧縮合力、 $N_{xy} (=k_{xy} P)$ はせん断合力を示す。面外剛性は、剛性に関する不変量 $U_i (i=1, 2, \dots, 5)$ と積層パラメータ $\xi_i (i=9, 10, 11, 12)$ を用いることにより次式で表される。

$$(D_{11}, D_{22}, D_{12}, D_{66}, D_{16}, D_{26}) = h^3 / 12 [(U_1, U_1, U_4, U_5, 0, 0) + (\xi_9, -\xi_9, 0, 0, \xi_{11} / 2, \xi_{11} / 2) U_2 + (\xi_{10}, \xi_{10}, -\xi_{10}, -\xi_{10}, \xi_{12}, -\xi_{12}) U_3] \quad (2)$$

ここで h は板厚を示し、積層パラメータは中央面に関する対称性を用いて次式で定義される。

$$(\xi_9, \xi_{10}, \xi_{11}, \xi_{12}) = 3 \int_0^1 (\cos 2\theta, \cos 4\theta, \sin 2\theta, \sin 4\theta) u^2 du \quad (3)$$

(3)式における $u=z/(h/2)$ は板厚方向の無次元化した量である。積層パラメータは繊維角を板厚方向に積分した関数であり、あらゆる積層構成を表示しうるパラメータである。この積層パラメータ間の関係、積層パラメータに対応する積層構成決定法は文献1)で求められており、本研究ではこれらの関係を基礎に、積層板の組合せ荷重下における座屈特性を調べる。

境界条件としては周辺固定支持と周辺単純支持の2通りを考える。周辺固定支持のときは板の周辺で変位とたわみ傾斜が共にゼロであり、このときの変位関数を次式で仮定する。

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \left[\cos \frac{(m-1)\pi x}{a} - \cos \frac{(m+1)\pi x}{a} \right] \times \left[\cos \frac{(n-1)\pi y}{b} - \cos \frac{(n+1)\pi y}{b} \right] \quad (4)$$

この変位関数は境界条件を満足するのでGalerkin法により計算を行う。

一方、周辺単純支持のときは板の周辺で変位と曲げモーメントが共にゼロであり、このときの変位関数を次式で仮定する。

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5)$$

この変位関数は板の周辺で曲げモーメントがゼロであるという力学的境界条件を満足しないのでRayleigh-Ritz法により計算を行う。

いずれの境界条件の場合も、次式で示す固有値問題に帰着する。

$$Kw = \lambda Mw \quad (6)$$

ここで、 λ は固有値であり $\lambda=P$ は座屈合力を示している。なお、変位関数の項数に関しては文献²⁾³⁾で検討したとおり $M=N=7$ を用いる。このとき周辺固定支持の場合には約1パーセント、周辺単純支持の場合では数パーセントの誤差が含まれている。

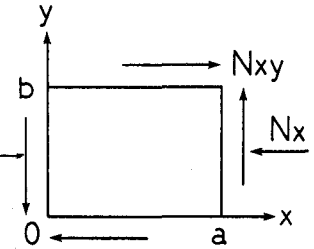


図1 対称積層板

2・2 座屈特性

CFRP 積層板を対象とし、その一方向材の材料定数を表 1 に示す。表 2 に示すような種々の境界条件、荷重比について計算を行った。但し、座屈荷重 P は次式のように無次元化している。

$$N^* = \frac{12b^2}{\pi^2 Q_{22} h^3} P \quad (7)$$

数値計算結果を積層パラメータ座標上に等高線として表示する。ここでは曲げ・捩りカップリングのない場合 ($\xi_{11} = \xi_{12} = 0$) は ξ_9 - ξ_{10} 座標上に表示し、曲げ・捩りカップリングのある場合には $\xi_9 = \xi_{10} = 0$ のときの座屈荷重 N^* を ξ_{11} - ξ_{12} 座標上に表示した。それぞれの場合の計算結果の一例を図 2, 3 に示す。図 2 より、圧縮とせん断では座屈モードが異なるため座屈荷重の等高線が非常に異なることがわかる。また、座屈荷重を最大とする (ξ_9, ξ_{10}) は積層パラメータの許容領域の境界上 ($\xi_{10} = 2\xi_9^2 - 1$; アングルプライ積層, $\xi_{10} = 1$; クロスプライ積層) に現れる。図 3 に示すように、軸圧縮では曲げ・捩りカップリングの存在は座屈荷重を低下させるが、せん断荷重の割合が増加すると曲げ・捩りカップリングの存在により座屈荷重が増加する場合があることがわかる。

2・3 座屈特性の最適化

前節では、対称積層板の座屈特性と積層構成との関係を調べたが、本節では数理計画法に基づいて、座屈特性を最適にする積層構成を求める。対称積層板の座屈荷重を最大とする積層構成を数理計画法に基づいて求める最適化問題は次のように定式化できる。

$$\begin{aligned} \text{[目的関数]} \quad & \text{Max} \quad P(\xi_9, \xi_{10}, \xi_{11}, \xi_{12}) \\ \text{[制約条件]} \quad & \xi_9^2 + \xi_{11}^2 \leq 1 \\ & (\xi_{10} - \xi_9^2 + \xi_{11}^2)^2 + (\xi_{12} - 2\xi_9\xi_{11})^2 \leq (1 - \xi_9^2 - \xi_{11}^2)^2 \\ \text{[設計変数]} \quad & \xi_9, \xi_{10}, \xi_{11}, \xi_{12} \\ \text{[最適化手法]} \quad & \text{ADS プログラム}^{4)} \text{における許容方向法} \\ & \text{(一次元探索は黄金分割法)} \end{aligned} \quad (8)$$

ここでの制約条件は積層パラメータの許容範囲¹⁾に対応する。

数値計算例として表 2 に示すケースについて行う。ここで、積層パラメータの初期値として次の 3 通りの値を用いて計算を行い初期値の影響を調べた。

- (a) $(\xi_9, \xi_{10}, \xi_{11}, \xi_{12}) = (0.0, 0.1, 0.0, 0.1)$ ξ_i が制約条件を満たす場合
- (b) $(\xi_9, \xi_{10}, \xi_{11}, \xi_{12}) = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$ ξ_i が制約条件の境界値上の場合
- (c) $(\xi_9, \xi_{10}, \xi_{11}, \xi_{12}) = (0.1, 0.9, 0.1, 0.9)$ ξ_i が制約条件を満たさない場合

計算結果の一例として、アスペクト比 1・荷重比 $k_x = 1, k_y = 0.4$ のときの結果を表 3 に示す。最適化後の結果は初期値依存性が少なく、安定した解が得られた。

文献¹⁾に従って、最適化計算後の積層パラメータの値より最適積層構成を求めた。計算結果の一例を表 3 に合せ示す。この最適計算例では、最適積層パラメータは積層パラメータの許容領域上に現れる。最適な積層構成は、周辺単純支持では $+45^\circ/-45^\circ$ 材、周辺固定支持では -13° 一方向材となる。

表 1 CFRP一方向材の弾性定数

$E_L = 142.0 \text{ GPa}$, $E_T = 10.8 \text{ GPa}$, $G_{LT} = 5.49 \text{ GPa}$, $\nu_L = 0.3$
--

表 2. 計算を行ったケース

境界条件	周辺固定支持 , 周辺単純支持
座屈荷重比 $N_x : N_y : N_{xy}$	1:0:0 , 1:0:0.4 , 0:0:1
積層パラメータ $(\xi_9, \xi_{10}, \xi_{11}, \xi_{12})$	$(\xi_9, \xi_{10}, 0, 0)$, $(0, 0, \xi_{11}, \xi_{12})$

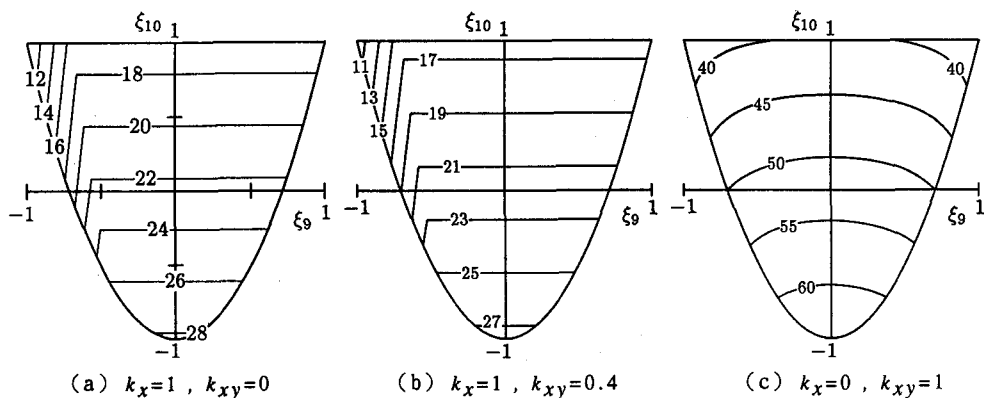


図 2 $(\xi_{11}, \xi_{12}) = (0, 0)$ のときの座屈特性 (周辺単純支持, $a/b=1$)

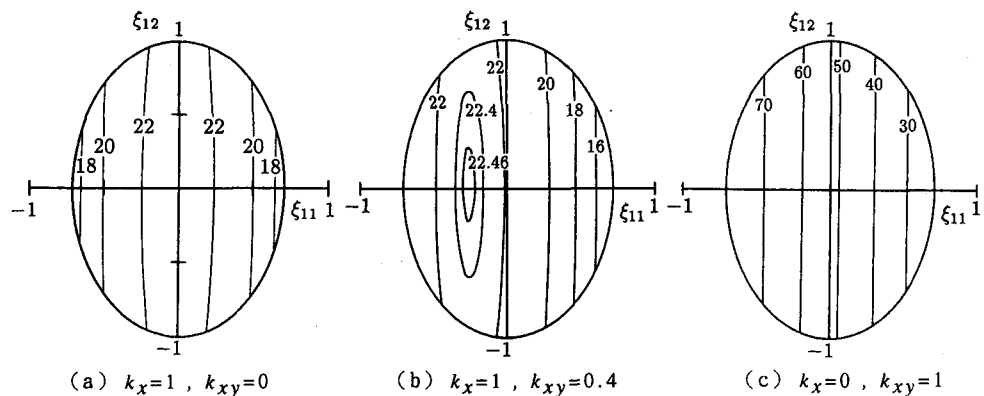


図 3 $(\xi_9, \xi_{10}) = (0, 0)$ のときの座屈特性 (周辺単純支持, $a/b=1$)

表 3 周辺単純支持・ $a/b=1$ ・($k_x=1, k_{xy}=0.4$)のときの最適化前後の計算結果

		Lamination Parameters				N_x^* ($N_{xy}^*=0.4N_x^*$)	Optimal laminate configurations
		ξ_9	ξ_{10}	ξ_{11}	ξ_{12}		
Simply-supported	(a) Initial	0.0	0.1	0.0	0.1	21.350	[44.5° _{0.12} / 45.6° _{0.02} /- 45.6° _{0.86}] _s
	Optimal	-0.009	-1.000	-0.309	0.037	28.208	
	(b) Initial	0.5	0.5	0.5	0.5	14.372	
	Optimal	-0.015	-0.998	-0.307	0.074	28.196	
	(c) Initial	0.1	0.9	0.1	0.9	16.211	
	Optimal	0.028	-0.999	-0.135	0.010	27.979	
Clamped	(a) Initial	0.0	0.1	0.0	0.1	52.449	[-13.4°] _s
	Optimal	0.871	0.614	-0.445	-0.771	59.108	
	(b) Initial	0.5	0.5	0.5	0.5	38.465	
	Optimal	0.892	0.624	-0.450	-0.797	59.140	
	(c) Initial	0.1	0.9	0.1	0.9	49.280	
	Optimal	0.823	0.625	-0.434	-0.700	59.065	

3. 複合材構造の近似解析

3・1 基礎式

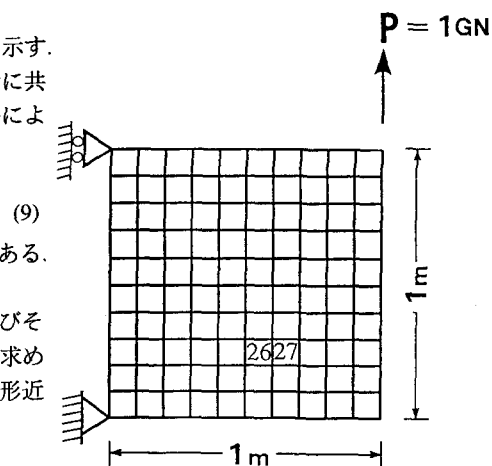
図4に、面内荷重を受ける積層パネルの有限要素モデルを示す。積層パネルの各要素は4層からなり、繊維角はすべての要素に共通であるが、層厚は各要素で独立である。このとき、変位法による有限要素法解析の基礎式は次式で与えられる。

$$K(x)u(x) = P \quad (9)$$

ここで、 K は剛性マトリックスであり、設計変数 x の関数である。設計変数としては、繊維配向角・層厚を用いる。

まず、(9)式の FEM 解析により各要素の変位ベクトルおよびその導関数を計算し、各要素における合力およびその導関数を求める。次に設計変数が変化したときの各要素の合力を次式で線形近似する。

$$N(x + \Delta x) = N(x) + \Sigma \frac{\partial N}{\partial x} \Delta x$$



(10) 図4 面内荷重を受ける積層パネル

ここで、 $N(x) = D(x)Bu(x)$ で、 D 、 B はそれぞれ応力-ひずみマトリックス、ひずみ-変位マトリックスである。また、合力の導関数は次式より計算する。

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial D}{\partial x} Bu + DB \frac{\partial u}{\partial x} \quad (11)$$

設計変数ベクトルが初期値 x から $x + \Delta x$ に変化したとき、(10)式の近似合力を用いて各層の応力を計算する。層厚を変数とする場合、(10)式の近似合力の精度はかなり良い。一方、繊維角を設計変数とすると(10)式の合力近似の精度は良くない⁵⁾ため、本研究では積層パラメータを中間的な設計変数に用いることにより近似精度の向上を図る。

3・2 数値計算例と考察

近似解析の適用モデルとして、図4に示す積層パネルを考える。積層パネルは CFRP 材からなるものとし、表1の材料定数を使用し、各層の板厚が5mm からなる[10/30/60/80]_s積層材を考える。

図5に、層厚が変動したときの合力 N_{xy} の挙動を示す。ここで、26番目の要素の各層厚が一様に2倍まで変動したときの合力 N_{xy} の値を示す。層厚に関して合力は線形近似されており、層厚が40%程度までの変動に対しては近似の精度が良い。図6に、2番目の層の繊維角が変動したときの26番目と27番目の要素の合力 N_{xy} を正解と比較して示す。積層パラメータを中間変数に用いることにより、せん断合力はかなり精度良く近似されている。一方、直接に繊維角で線形近似すると、 $\theta = 30^\circ$ での接線に基づく近似となり、繊維角が $\theta = 30^\circ$ より少し離れると近似の精度が悪くなることが分かる。

なお、文献5)で示した近似最適化手法を適用することにより、本近似解析を用いて積層パネルの強度・剛性制約条件下の最小重量設計を効率的に行うことができる。また、最適性規準法に基づく手法⁶⁾により、積層パネルの形状と積層構成を概略決定することができ、詳細な最適化の前処理として有効となる。

4. 結論

本研究では、積層複合材構造の積層構成最適化手法を検討した。まず、剛性最適化問題として、曲げ・捩じりカップリングを含む対称積層板の座屈特性を対象に、積層パラメータを導入して最適積層構成を求めた。積層パラメータを設計変数として用いる方法は、初期値依存性の少ない安定した最適解を得ることができ、積層複合材の積層構成最適化手法として有用であることを示した。次に、面内荷重を受ける積層パネルを対象に、強度最適化の基礎となる近似解析法を検討した。合力を積層パラメータについて線形近似することに

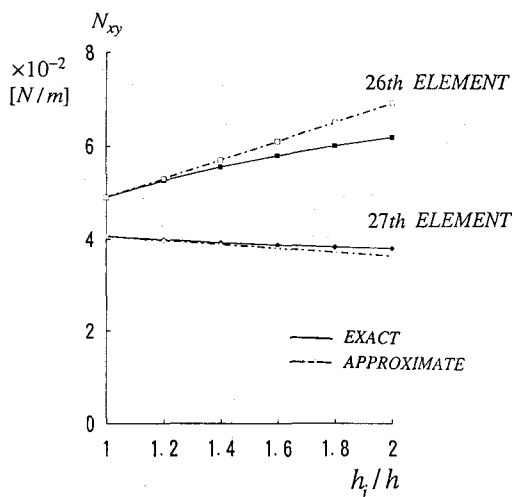


図5 層厚変動のときの近似せん断合力

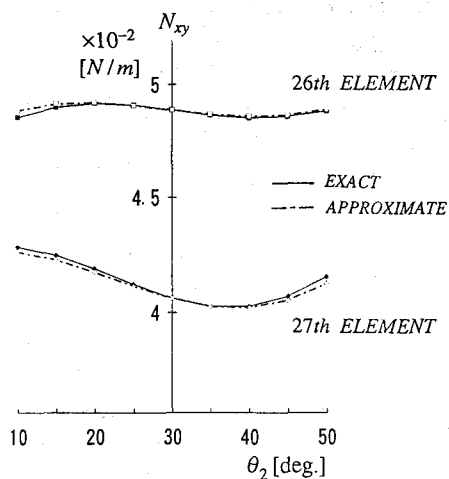


図6 繊維角変動のときの近似せん断合力

より精度良い近似解析が可能となり、繊維角最適化における近似法として有効であることを示した。

謝辞 本研究は、都立航空高専 飯野明氏、東北大学大学院 佐藤正喜氏、古澤正史氏との共同研究であり、本稿をまとめるにあたり助力を得たことに謝意を表する。

参考文献

- 1) Fukunaga, H. and Sekine, H. : Stiffness Design Method of Symmetric Laminates Using Lamination Parameters, AIAA J., Vol. 30, No. 11, pp. 2791-2793, 1992.
- 2) 福永久雄・関根英樹・佐藤正喜・飯野明：対称積層板の圧縮座屈特性に及ぼす曲げ・捩じりカップリング効果，日本機械学会論文集A，59巻566号，pp. 2343-2949, 1993.
- 3) Fukunaga, H., Sekine, H. and Sato, M. : Optimal Design of Symmetrically Laminated Plates for Fundamental Frequency, J. Sound and Vibration, to appear, 1994.
- 4) Vanderplaats, G. N. and Sugimoto, H. : A General Purpose Optimization Program for Engineering Design, Computers & Structures, Vol. 24, pp. 13-21, 1986.
- 5) Fukunaga, H. and Vanderplaats, G. N. : Minimum Weight Design of Laminated Composite Panels under Strength and Displacement Composites, JSME Int. J., Vol. 34, No. 2, pp. 171-177, 1991.
- 6) Fukunaga, H. and Sekine, H. : Optimum Design of Composite Structures for Shape, Layer Angle and Layer Thickness Distributions, J. Composite Materials, Vol. 27, in press, 1993.