第3回システム最適化に関するシンポジウム講演論文集　1993年12月

(11) ファジイ数を用いた最適設計に関する研究

A Study on Optimum Design Using Fuzzy Numbers as Design Variables

荒川　雅生*　　山川　宏**
Masao ARAKAWA Hiroshi YAMAKAWA

Usually in conventional optimum design process, the designers have to give design parameters and allowance to each constraint strictly and quantitatively. However, these values include some kind of deviations and they have somehow "fuzziness". Although there are many studies using fuzzy set theory to nonlinear optimizations, most of them are based on α-level cut method. However, α-level cut method is a surely powerful method in fuzzy optimization, it can be considered as series of crisp optimizations and it sometimes loses benefit of the fuzzy setting of the problem. We proposed a new method using fuzzy numbers as design variables and examined its effectiveness in the past studies. In those studies, we proposed the simple fuzzy operator and 4 kinds of formulation to the proposed method. In this study, we will compare the proposed method with stochastic nonlinear optimization, robust structural design and torelance analysis, and examine the effectiveness of the proposed method from some points of views.

Key Words: Optimum Design, Fuzzy Sets Theory, Fuzzy Numbers, Stochastic Optimization, Robust Structure, Torelance analysis

1. 緒　言

確定論的手法に基づいた最適設計では最適化に必要な諸パラメータを事前に設定する必要があった.しかしながら,制約条件の許容値や縦弾性係数などの設計パラメータは厳密には設定した値になるとは限らず,若干のズレが含まれることが考えられる.最適設計の解は一般的にはいくつかの制約条件の境界上にくることが多いため,本質的に問題に影響を与えないような設定値の差が解に大きな影響を与えることが考えられる.このようないわゆる不確定性に対処する方法として事象の生起に起因する不確定性を取り扱った確率論的アプローチと事象や数値その者のあいまい性を取り扱ったファジイ理論に基づくアプローチが考えられていた.

ファジイ理論に基づくアプローチでは,線形計画問題に対してはBellmannの最大化決定法[1]に見られるような確立された方法が存在するものの,非線形最適設計問題に関してはそのような方法が存在せず,何らかの非ファジイ化の技術を必要としてきた.最もよく用いられている手法としてα-レベルカット法[2]が存在した.しかしながら,この方法には以下のような欠点が考えられる.

1) α-レベルと目的関数や設計変数の関係がはっきりと取り扱えない.その上,設計パラメータや制約条件がファジイ量であるにもかかわらず,α-レベルの設定後は最適解はクリスプな量として与えられてしまう.
2) 図1に設計変数が2つであるα-レベルカット法の一般的な例を示す.この方法においてはα-レベルを設定して,その後に制約条件を求め,その都度最適化をかける必要があることがわかる.また,例えば図中の斜線部のどの

*工博　早稲田大学助手　理工学部機械工学科　**工博　早稲田大学教授　理工学部機械工学科

値でもよいはずである.このような場合にα-レベルカット法では対応しずらい.

これに対して,筆者らは設計変数としてもファジイ数を用いた最適設計に関する研究を行った.まず,全ての演算をL-Rファジイ数の基本演算で行い,α-レベルカット法との比較を示した[3].つぎに,ファジイ数演算の簡易演算方法を開発し,これを用いて関数系が複雑になる場合の問題に対応できるようにした[4].つぎに,設計変数のファジイ集合の決定法に着目して,3つの新しい定式化を示し,各々の定式化に関してその有効性や意義について検討を加えた[5].そして,更に新しい定式化を提示し,ホモロガス構造のような強い等式制約を必要とするような問題に対する対応を検討した[6].

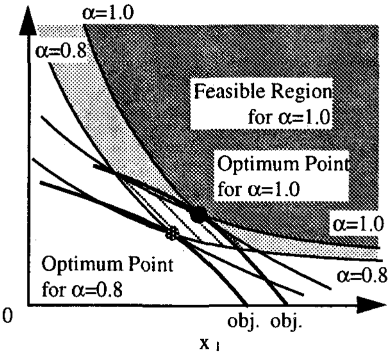

図1 レベルカット法の説明

本研究では,不確定性を取り扱った確率非線形最適設計法[7],許容値解析を考慮した取り扱いをする方法[8],変動に関して強い構造を求めようとするロバスト性を考慮した方法[9]との比較を通じて,提示した手法の利点,検討点を明らかにし,提示した手法の特性を明らかにすることを目的としている.

2. 設計変数としてファジイ数を用いた最適設計

2.1 ファジイ数の仮定　本研究では,L-Rファジイ数を各設計変数や,設計パラメータに対応させる.本研究ではファジイ数の表現として,図2に示されるように左右の型関数が同じものと仮定し,

$$FN=(FN^M,FN^L,FN^R) \tag{1}$$

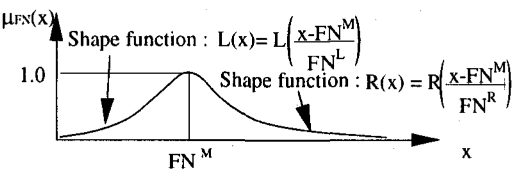

図2 L-Rファジイ数

と表すものとする.なお,型関数については任意に選べるが本研究では簡単のために,以後は,一次関数によって与えられるものとする.よって型関数は次式で表させるものとする.

$$L(x)=R(x)=\begin{cases}1-|x| & \text{for } |x|\leq 1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{2}$$

2.2 簡易ファジイ数演算　任意のファジイ数ベクトル$\tilde{x}=\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_N\}^T$からなるファジイ数関数$\tilde{f}(\tilde{x})=(f^M(x^M),f^L(\tilde{x}),f^R(\tilde{x}))$において,その関数の左右の幅の指標となる$f^L(\tilde{x}),f^R(\tilde{x})$を簡易に計算する方法である. $f^M(x^M)$が任意のC^1級の関数について, その有効性が基本的ファジイ数演算については成り立つことが示されている[2].簡易ファジイ数演算による左右の幅の決定法とは,

$$f^L(\tilde{x})=\sum_{i=1}^{N}FL\left(\frac{\partial f^M}{\partial x_i^M},x_i^L,x_i^R\right)\quad ここで,\quad FL\left(\frac{\partial f^M}{\partial x_i^M},x_i^L,x_i^R\right)=\begin{cases}\frac{\partial f^M}{\partial x_i^M}\times x_i^L & \left(\text{for } \frac{\partial f^M}{\partial x_i^M}\geq 0\right)\\ -\frac{\partial f^M}{\partial x_i^M}\times x_i^R & \left(\text{for } \frac{\partial f^M}{\partial x_i^M}<0\right)\end{cases} \tag{3a}$$

$$f^R(\tilde{x})=\sum_{i=1}^{N}FR\left(\frac{\partial f^M}{\partial x_i^M},x_i^L,x_i^R\right)\quad ここで,\quad FR\left(\frac{\partial f^M}{\partial x_i^M},x_i^L,x_i^R\right)=\begin{cases}\frac{\partial f^M}{\partial x_i^M}\times x_i^R & \left(\text{for } \frac{\partial f^M}{\partial x_i^M}\geq 0\right)\\ -\frac{\partial f^M}{\partial x_i^M}\times x_i^L & \left(\text{for } \frac{\partial f^M}{\partial x_i^M}<0\right)\end{cases} \tag{3b}$$

で各値が決定されるものである.

2.3 設計変数の幅を重視した定式化　設計変数の幅を表す指標が大きいと, 設計者が意志決定の段階で選べる範囲が増えることになり,設計の幅を広げられるほか,加工時の精度の問題を考慮しても重要なことである. そこで,設計変数の幅を重視して次式(4)のような定式化を考える.

$$\text{Minimize } f^M(x^M) \tag{4a}$$

$$\text{Maximize} \sum_{i=1}^{N} a_i^L x_i^L + a_i^R x_i^R \tag{4b}$$

subject to

for fuzzy active constraints

$$g_j^M(\mathbf{x}) \approx g_{ja}^M \tag{4c}$$

$$g_j^r(\tilde{\mathbf{x}}) \le g_{ja}^r \quad (r=L,R; j=1,2,\ldots,M)) \tag{4d}$$

$$f^r(\tilde{\mathbf{x}}) \le f_a^r \quad (r=L,R) \tag{4e}$$

otherwise

$$g_j^M(\mathbf{x}^M) \le g_{ja}^M \tag{4f}$$

where

$$\tilde{\mathbf{x}} = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_N\}^T \tag{4g}$$

$$x_i^r \ge 0 \ (r=L,R;\ i=1,2,\ldots,N) \tag{4h}$$

ここで,a_i^L,a_i^Rはそれぞれの設計変数の幅の指標に対する重みである.この定式化は一見すると多目的問題のようである. しかしながら, 実際には, 式(4a)ではx^Mを決定し, その値を用いて式(4b)でx^L, x^Rの決定を行う型になっている. すなわち, 階層的な最適化の定式化となっている. ここで,ファジイ活性な制約条件とは,あいまい性を考慮し,クリスプな制約条件を補正したものである.詳細は,紙面の都合上文献(5)を参照されたい.また,以下の定式化においても式(4c,d,f,g,h)は同様に必要なものである.そこで,以下の定式化においてこの部分の表記は特に必要ないかぎり省略するものとする.

2.4 目的関数の幅を重視した定式化　設計として目的関数の幅を表す指標は小さいほうがよりよいものと考えられる. そこで, 次式(5)のような定式化を考える.

$$\textit{Minimize}\ f^M(\mathbf{x}^M) \tag{5a}$$

$$\text{Minimize}\ a_L f^L(\tilde{\mathbf{x}}) + a_R f^R(\tilde{\mathbf{x}}) \tag{5b}$$

ここで,a_L,a_Rはそれぞれの目的関数の幅の指標に対する重みである.この定式化は多目的問題の定式化をとっている. なぜならば, 目的関数によって取り扱う設計変数を区別することができないからである. すなわち, もし, 式(5b)でx^L, x^Rのみを設計変数として取り扱うことを考えれば, これら全ての値が0になることは自明であり, 設計変数としてファジイ数を用いる意味が全くなくなってしまうからである. よって, 設計変数のx^L, x^Rを固定した後に式(5a), (5b)を目的関数とする設計変数x^Mのみからなる多目的最適化手法を用いる必要がある.

2.5 ロバスト性を考慮した定式化　設計変数としてファジイ数を用いる立場からこの概念に対するアプローチを考えてみたい. ロバスト性を考慮した設計変数をファジイ数とした最適設計問題の定式化を次式のように設定した.

$$\text{Minimize}\ f^M(\mathbf{x}^M) \tag{6a}$$

$$\text{Minimize}\ a_L f^L(\tilde{\mathbf{x}}) + a_R f^R(\tilde{\mathbf{x}}) \tag{6b}$$

$$\text{Maximize} \sum_{i=1}^{N} a_i^L x_i^L + a_i^R x_i^R \tag{6c}$$

この定式化の場合, 多目的で階層型になっている. しかしながら, 2種類の全く性質の異なった設計変数を取り扱うため,階層化方法が重要になる.

2.6 特定の制約条件の幅を重視した定式化　ホモロガス構造を最適設計を用て求める場合のように特にその変動を小さくしたい制約を考えなければならないような場合,次のような定式化を考える.

$$\text{Minimize}\ f^M(\mathbf{x}^M) \tag{7a}$$

$$\text{Minimize}\ a_L h^L(\tilde{\mathbf{x}}) + a_R h^R(\tilde{\mathbf{x}}) \tag{7b}$$

subject to

$$h(\overline{x})\leq 0 \tag{7c}$$

$$f^r(\widetilde{x})\leq f_a^r \quad (r=L,R) \tag{7d}$$

ここで,a_L,a_Rはそれぞれ重みである.ここでは,特に注目する制約条件$h(x)$と目的関数の増加側の指標が特に問題になるので制約条件として付加している.

3. 比較対象とする最適設計問題

α-レベルカット法との比較は既に文献(3)にて行われているので,本研究では,ファジイ理論に基づかない方法との比較を通じて提示する手法の特徴を明らかにしていきたい.以下,3つの手法の定式化を示し,あわせて前章で説明した手法との比較を簡単に示す.

3.1 確率非線形最適設計法　確率非線形最適設計の一般的な定式化は式(8)の通りである.

$$\underset{x\in X^M}{\text{Maximize}}\ f(Y) \tag{8a}$$

subject to

$$P[g_j(Y)\leq 0]\geq p_j \tag{8b}$$

ここで,Yはランダム変数である.また,Pは確率を表す.この問題を解くために何らかのスカラー化が行われるが,ここでは,Rao[7]の手法を取り上げる.目的関数と制約条件のスカラー化はそれぞれは以下のとおりである.

$$F(Y)=k_1\psi(\overline{Y})+k_2\sigma_\psi=k_1 f(\overline{Y})+k_2\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\bigg|_{\overline{Y}}\right)^2\sigma_{y_i}^2} \tag{9a}$$

$$\overline{g}_j-\phi_j(p_j)\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial g_j}{\partial y_i}\bigg|_{\overline{Y}}\right)^2\sigma_{y_i}^2}\geq 0 \tag{9b}$$

ここで,σは下添え字に関する標準偏差でありφは正規分布の分布関数である.この手法では,設計変数を確率変数として取り扱う場合,その標準偏差は既知のものと考えている.その意味では,目的関数の取り扱いに関しては,式(5)の定式化と同様の概念を見ることができる.しかしながら,制約条件に関しては,α-レベルカット法と同様な取り扱いと考えられ,不確定性を有効に利用しているとはいいがたい.また,本来どのような値を取るかわからない,設計変数の幅をあらかじめ決めなくてはならないことは,確率を有効に利用できていないように思われる.また,概念的にも得られる解の意味はそれが最も有効性の確率が高いという意味でしかない.

3.2 許容値解析を考慮した方法　不確定性を考えて,許容値解析を通じて,設計可能領域を狭めることを通じて解のロバスト性を得る方法を取り上げてみる[8].許容値解析としては,最大のものを考える場合と,確率論を用いて考える場合があり,次式(10)のようになる.

$$\Delta g_j=\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\Delta x_i\right|+\sum_{i=1}^{L}\left|\frac{\partial g_j}{\partial p_i}\Delta p_i\right| \tag{10a}$$

$$\sigma_{g_j}=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\sigma_{x_i}\right)^2+\sum_{i=1}^{L}\left(\frac{\partial g_j}{\partial p_i}\sigma_{p_i}\right)^2 \tag{10b}$$

このようにして得られた結果を用いて,設計許容量域を次式のようにして狭めた後に,従来までと同様な方法によって最適解を求めている.

$$g_j\leq -\Delta g_j \tag{11a}$$

$$g_j\leq -k\sigma_{g_j} \tag{11b}$$

この方法は,制約条件だけにファジイ集合を考えたα-レベルカット法とほぼ同様な考え方があるものの,この方法が制約条件を厳しめに評価するのに対して,ファジイ集合を用いた方法では弛めに評価することである.

3.3 ロバスト性を考慮した方法　構造物の設計変数や設計パラメータなどに関する変動に対して強い構造物としてロバスト構造という概念が筆者の一人[9]によって提示され,その設計方法として変動する設計変数あるいは設計パラメータに関する1次の感度と目的関数を統合して評価し,その最小化をはかることで構造形態を具現する試みがなされた.その設計方法の定式化は以下のようなものである.

制約条件　$g_j(x) \le 0$　　　$(j = 1, 2, \cdots, m)$ (12a)

を満足し，かつスカラー評価関数

$$\Phi = \Phi\left(\frac{\partial f_1}{\partial s_1}, \cdots, \frac{\partial f_1}{\partial s_L}, \frac{\partial f_2}{\partial s_1}, \cdots, \frac{\partial f_2}{\partial s_L}, \frac{\partial f_3}{\partial s_1}, \cdots, \frac{\partial f_k}{\partial s_L}, f_1, f_2, \cdots, f_k\right) \tag{12b}$$

もしくはベクトル評価関数

$$\Phi = \left\{\frac{\partial f_1}{\partial s_1}, \cdots, \frac{\partial f_1}{\partial s_L}, \frac{\partial f_2}{\partial s_1}, \cdots, \frac{\partial f_2}{\partial s_L}, \frac{\partial f_3}{\partial s_1}, \cdots, \frac{\partial f_k}{\partial s_L}, f_1, f_2, \cdots, f_k\right\}^T \tag{12c}$$

を最小とするような設計変数を決定する問題

ここに$f_i(x)$は基準関数と呼ばれる設計変数の関数で$\partial f_i / \partial s_j$はそのパラメータ$s_j$に関する感度である.変動パラメータ$s = \{s_1, s_2, \cdots, s_L\}^T$は設計変数$x = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}^T$と一致することもある.ロバスト性を考慮した定式化では,式(12,b,c)の設定方法によっては様々なことを考えることができる.ところが式(12)で何らかのノルムを用いる場合,実際にパラメータの変動が小さいものの感度を極端に強く評価してしまう恐れがある.したがって,具体的に変動量が予想されるような問題の場合は,本研究で提示する式(6),(7)のほうがより有効と考えられる.ところで,ロバスト性を考慮した研究では,指標の設定方法を含めて,単に感度を最小化するのに留まらない研究を行っている[10].

4. 数値計算例

図3に示すような立体ラーメンについて,表1のような最適設計問題を通じて各手法の比較検討を試みる.ここで,表2のような設計パラメータについて不確定性を考慮するものとする.なお,荷重としては,図3のような静的荷重のほかに自重を考慮するものとする.

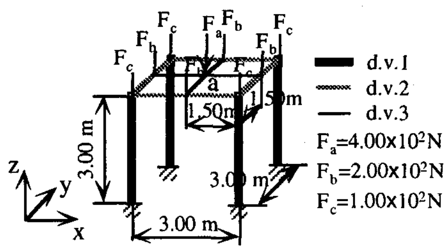

図3　最適化モデル

表2　不確定性を考慮する量

contents	amounts	deviation
density	7.86×10^3 kg/m³	3.93×10^2
modulas of elasticity	2.10×10^{11} N/m²	1.05×10^{10}
stress allowance	2.00×10^7 N/m²	1.00×10^6
deformation allowance	5.00×10^7 m	2.50×10^{-5}
strain energy allowance	1.00 Nm	5.00×10^{-2}
side constraints	――――	1%

表1　最適設計問題

contents	function
obj. func.	mass of the structure
constraints	
1	deformation to z direction of point a
2	maximum stress
3	maximum element strain energy
4	minimum side constraint of design variable 1
5	minimum side constraint of design variable 2
6	minimum side constraint of design variable 3

表3　最適化の結果の比較

methods	conventional	stochastic	torelance	robust	proposed
objective function	1.28×10^4	1.21×10^4	1.42×10^4	1.28×10^4	1.28×10^4
design varaible 1	6.59×10^{-2}	6.20×10^{-2}	7.44×10^{-2}	6.51×10^{-2}	6.36×10^{-2}
L					4.74×10^{-7}
R					8.49×10^{-7}
2	5.64×10^{-2}	5.38×10^{-2}	6.17×10^{-2}	5.68×10^{-2}	5.86×10^{-2}
L					6.09×10^{-7}
R					3.34×10^{-3}
3	2.70×10^{-2}	2.57×10^{-2}	3.00×10^{-2}	2.78×10^{-2}	2.77×10^{-2}
L					9.57×10^{-7}
R					6.92×10^{-3}
active constraints	1&2	1&2	1	1	1&2 inc. limit of bj. func. side const. ofLR design variable

表3に各種手法の最適化の結果を示す.なお,最適化には傾斜投影法を用いた.確率非線形計画法では0.80以上の確率で制約条件を満足するものとした.ロバスト性を考慮した最適設計問題では,ロバスト性の向上を目的とす

る基準関数としてa点における変位量をとり,目的関数との間に1.00:1.00x10^{6}の重みを設けた.また,提示した手法を用いる際には,式(7)に式(4b)を加味したものを採用した.その際,重みとして式(7a),(7b),(4b)の順に1.00:5.00x10^7:3.00x10^{4}とした.その他に設計変数の幅に関する制約も設けたが,定式化の詳細については紙面の都合上割愛させて頂く.各々の手法の特徴を見ると確率非線形最適設計では制約条件を弛める傾向が,許容値解析では制約条件を厳しめに見る傾向がある.ロバスト性を考慮した手法と提示した手法,従来までの手法では目的関数値はほとんど変わっていないが,活性な制約条件が異なること,感度を小さくするために設計変数の値がことなることなどの違いが見られた.提示した手法とその他の手法の最もことなる点は他の手法が各設計変数がクリスプに与えられてしまうため,設定に不確定性を考慮しているにもかかわらず,一回の最適化では設計変数がどちら側にどの程度の範囲で設計変数の変動を許すのかわからないのに対して,提示した手法ではその目安が得られることである.このことは,例えば,製作上の公差を考えるうえでも重要なものと考えられ,公差などの決定を定式化内に含めることができ,提示した手法のもつ柔軟性を意味するものと思われる.しかしながら,設計変数と制約条件の数が,他の手法と比較して約3倍になるため,計算時間の面での問題点,および,簡易ファジイ数演算の有効性がどの程度の非線形性までであるのかという問題点が挙げられる.

5. 結　言

(1)本研究では,設計変数としてファジイ数を用いた最適設計に関する一連の研究をまとめ,その特徴を明らかにするために,定式化の中に不確定性を考慮する4つの異なった手法との比較検討を行った.

(2)提示する手法では,他の手法には見られない特徴として一回の最適化で設計変数の取るべき変動の幅まで決定することができる.このことは,例えば,製作誤差をどの程度まで許すのかを考えるうえでも重要なことと考えられ,他の手法と比較して,設定時に含めた不確定性が最後まで有効に利用でき,また,設計変数の数が多くなってしまうものの,一度に多くの問題を考慮することが可能であることを意味するものと思われる.したがって,定式化自体に柔軟性があるものと考えられる.

参考文献

(1)H.J.Zimmermann:Description and Optimization of Fuzzy Systems,Int.J.of General Systems,2(1976),p.209-215

(2)K.Koyama,Y.Kamiya:An Application of Fuzzy Linear and Nonlinear Programming to Structural Optimization, Proc. of the 1st IFIPWG 7.5, Working Conference,(1987),p.233-242

(3) 荒川・山川:設計変数としてファジイ数を用いた最適設計に関する研究(第1報　最適設計手法の提示), 日本機械学会論文集 58巻550号C編, (1992), p. 1710-1715

(4) 荒川・山川:設計変数としてファジイ数を用いた最適設計に関する研究(第2報　簡易ファジイ数演算の開発と利用), 日本機械学会論文集, 58巻550号C編, (1992), p. 1716-1721

(5) 荒川・山川: 設計変数としてファジイ数を用いた最適設計に関する研究(第3報　ファジイ集合の決定法とその考察), 日本機械学会論文集,59巻566号C編,(1993),掲載決定

(6)荒川・山川:設計変数としてファジイ数を用いた最適設計に関する研究(第4報　ホモロガス構造の検討), 日本機械学会第70期通常総会講演論文集IV,(1993),p.535-537

(7)S.S.Rao:Optimization Theory and Applications,(1979),p.567-625,Wiley Eastern Limited

(8)A.Parkinson,et.al:Tolerances and Robustness in Engineering Design Optimization,ASME,DE,23,(1990),p.121-128

(9)山川・宮下:ロバスト構造に関する研究(ロバスト構造の概念とその設計法),日本機械学会論文集, 57巻544号C編, (1991), p. 173-178

(10)廣安・山川:ロバスト構造に関する研究(ロバスト指標の検討)日本機械学会第70期通常総会講演論文集I,(1993),p.244-246