

(7) 非比例荷重下の骨組構造の最適塑性設計に関する一考察

PARETO SOLUTIONS OF MULTI-OBJECTIVE OPTIMAL PLASTIC DESIGN OF SKELETAL STRUCTURES
SUBJECTED TO THE NON-PROPORTIONAL LOADINGS

三原徹治*, 千々岩浩巳**

by Tetsuji MIHARA and Hiromi CHIJIWA

This paper presents a multi-objective programming approach to the optimal plastic structural design subjected to the non-proportional loadings, i.e., several proportional loadings and a fixed loading. The original design problem is formulated as the multi-objective linear programming problem based on the rigid-plastic theory. One-objective linear programming problem, named as the maximizing one loading method, is proposed as the solver of the original design problem. The complex Pareto solutions are shown by from the design results of simple skeletal structures as numerical examples.

key words : plastic skeletal structure, optimal design, non-proportional loadings, multi-objective linear programming, Pareto solutions.

1. 緒 言

構造物全体の塑性崩壊に対する安全性を設計基準とする塑性設計の最適化手法に関する従来の研究は、所望の安全性を保証したうえで構造全重量の最小化を図る最小重量設計法¹⁾、ある構造全重量のもとで最も安全性の高い断面配分を求める最大荷重設計法²⁾、より安全でしかもより経済的な設計を求める2目的最適設計法³⁾に大別されるが、いずれもその作用荷重系が比例的に変化するという比例荷重の仮定に立脚している。一般に構造物は多種多様な作用荷重を受け、比例荷重の仮定が必ずしも妥当ではない場合もあり、このような場合に対して本研究では「非比例荷重下」の表現を用いる。この点において石川らの研究⁴⁾は作用荷重系に1個の比例荷重系と固定荷重系の組合せを用いており、非比例荷重下の最適塑性設計法に関するアプローチの先駆をなしている。

本研究は、石川らの研究⁴⁾のより一般的な形への拡張であると同時に、2目的最適設計法³⁾と一般的な塑性解析法⁵⁾との統合と位置づけられる「最適塑性設計法の一般化」を企図するものである。その方法は、作用荷重系を複数の比例荷重系と固定荷重系を組合せた非比例荷重系と仮定したうえで非比例荷重下の最適塑性設計基本式を多目的線形計画問題として定式化し、その解法として原多目的問題を単目的線形計画問題に変換した限定最大荷重設計法と名付けた手法を提案する。簡単な骨組構造物の数値計算例から原多目的問題の解集合(Pareto解)特性の複雑さを示す。

なお、本研究においては比例荷重の仮定を除き慣用の剛塑性理論にしたがう。

* 工博 九州共立大学助教授 工学部土木工学科 (〒807 北九州市八幡西区自由ヶ丘1-8)

** アルファコンサルタント㈱ 九州支社 (〒812 福岡市博多区綱場町5-15)

2. 非比例荷重下の最適塑性設計基本式

構造物に作用する非比例荷重系が変動を考慮しない固定荷重系 F^f と荷重量の変動を考慮する全 I 個の変動荷重系の線形結合であり、しかも各変動荷重系が基本となる荷重ベクトル F_i と変動大きさを規定する荷重係数 α_i の積で表される⁶⁾ と仮定すれば、安全性と経済性を同時に追求する最適塑性設計基本式は塑性解析の下界定理から式(1)のように定式化することができる。

未知数: $W, X, \alpha_i (i=1..I), Q$

$$\text{目的関数: } W = a^T X \rightarrow \min. \quad (1a)$$

$$\alpha_i \rightarrow \max. \quad (i=1..I) \quad (1b)$$

$$\text{制約条件: } C^T Q - i \sum \alpha_i F_i = F^f \quad (1c)$$

$$N^T Q - R^T X \leq 0 \quad (1d)$$

$$X^l \leq X \leq X^u \quad (1e, f)$$

ここに、式(1)は内力と作用荷重が常につりあうという平衡条件を示す式(1c)、内力がその塑性容量を越えないという降伏条件を示す式(1d)および設計変数 X に関する上下限值制約(式(1e, f))を満足する静的許容な設計の中から式(1a)に示す構造重量 W の最小化と式(1b)に示す全 I 個の荷重係数 α_i の最大化を同時に追求する設計を求める多目的線形計画問題を示している。ただし、 a は重量換算係数ベクトル、 C は適合マトリックス、 Q は内力ベクトル、 N は降伏面における単位法線マトリックス、 R は塑性容量の1次微係数マトリックス、 X^u 、 X^l は設計変数ベクトル X の上・下限値ベクトル、上付添字 T は転置を示す記号であり、 $i \sum$ は i に関する総和を示す。

3. 最大荷重設計法を適用したPareto解探索手法

式(1)に示す設計基本式の各目的は相互にトレードオフの関係にあるため、その解は一意的に定まらず Pareto 解集合として得られる。Pareto 解を求める方法には、例えば満足化トレードオフ法におけるスカラ化手法⁶⁾などの適用も考えられるが、次節で述べるように Pareto 解集合と構造重量に比例関係が認められることから、本研究ではある一定の構造重量における Pareto 解集合を探索するため最大荷重設計法²⁾を基礎とする方法を用いた。式(2)にその基本式を示す。

未知数: X, α_k, Q

$$\text{目的関数: } \alpha_k \rightarrow \max. \quad (2a)$$

$$\text{制約条件: } C^T Q - \alpha_k F_k = F^f + i, i \neq k \sum \alpha_i F_i \quad (2b)$$

$$N^T Q - R^T X \leq 0 \quad (2c)$$

$$X^l \leq X \leq X^u \quad (2d, e)$$

$$W = a^T X = W^f \quad (2f)$$

式(2)は、着目する1個の変動荷重系 $\alpha_k F_k$ を除く他の変動荷重系についてはその荷重係数値を固定し、同時に固定した構造重量値 W^f のもとで α_k の最大化を図る単一目的線形計画問題であり、固定する変動荷重系の荷重係数値を適切に選定すれば任意の W^f 値における Pareto 解を $L P$ により容易に求めることができるので、限定最大荷重設計法と呼ぶことにする。ただし、 α_i は固定する i 番目の変動荷重系の荷重計数値、 $i, i \neq k \sum$ は $i \neq k$ なる i に関する総和を示す。

4. 数値計算例によるPareto解特性の検討

3種の簡単な骨組構造物を対象とした数値計算例からPareto解特性について検討する。ただし、基本的な検討のため以下の数値計算では $F^f=0$, $X^L=0$, $X^U=\infty$ を設定し、固定荷重系および設計変数の上・下限値制約の影響を排した。

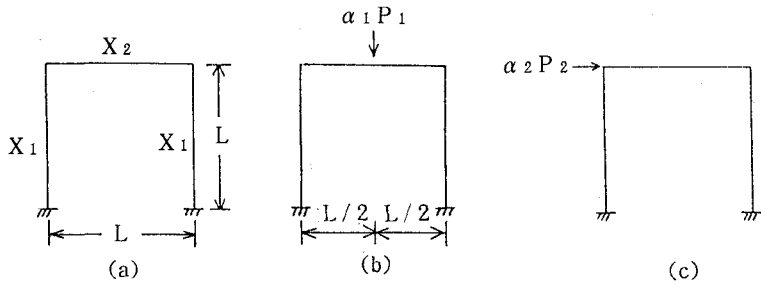


図-1 計算例1:門型ラーメン(2変動荷重系)
(a)構造形式 (b)第1変動荷重系 (c)第2変動荷重系

表-1 計算例1:設計結果の一例
($W^f=80.0\text{tf}\cdot\text{m}^2$)

α^f_2	α_1	X_1	X_2
0.0	0.667	6.667	6.667
0.5	0.667	6.667	6.667
0.667	0.667	6.667	6.667
0.7	0.65	6.5	7.0
0.8	0.6	6.0	8.0
1.0	0.5	5.0	10.0
1.2	0.4	4.0	12.0
1.4	0.3	3.0	14.0
1.6	0.2	2.0	16.0
1.8	0.1	1.0	18.0
2.0	0.0	0.0	20.0

単位: $X_i(\text{tf}\cdot\text{m})(i=1,2)$

(1)計算例1:門型ラーメン(2変動荷重系)

構造形式および変動荷重系の数において最も基礎的な計算例として図-1に示す2変動荷重系の門型ラーメンのPareto解集合を限定最大荷重設計法を用いて求めた。2変動荷重系であるため α_1 を最大化する荷重係数に選ぶと α_2 の固定値 α^f_2 をパラメトリックに与えて得られるPareto解を包絡してPareto解集合を求めることができる。 W^f 値は任意であるから、ここでは $W^f=80.0\text{tf}\cdot\text{m}^2$ としたときの設計結果の一部を表-1に示す。表-1から大きな α^f_2 に対する α_1 は小さく互いにトレードオフの関係にあることが認められる。また、 α^f_2 と α_1 の関係は $(\alpha_1, \alpha^f_2)=(0.667, 0.667)$ を交点とする2直線で包絡され、 $\alpha_1\sim\alpha_2\sim W$ 空間では図-2の $W^f=80.0\text{tf}\cdot\text{m}^2$ で示すように表される。図-2には、別途求めた $W^f=160.0\text{tf}\cdot\text{m}^2$ のときのPareto解集合も併せて示す。これらから全体的なPareto解集合は原点を始点とする半無限2平面で構成され、各平面の大きさは W^f 値に比例することがわかる。

(2)計算例2:2層1スパンラーメン(2変動荷重系)

構造規模の影響を調べるため図-3に示す2変動荷重系構造のPareto解集合を限定最大荷重設計法を用いて求め、計算例1と同様に $\alpha_1\sim\alpha_2\sim W$ 空間表示すると図-4が得られた。図-4において点A~Gを結ぶ6線分は $W^f=132.0\text{wL}^2$ のときの等重量Pareto解集合であり、点A~Gの α_1 , α_2 および X 値を表-2に示す。これらおよび計算例1の結果より2変動荷重系における全体

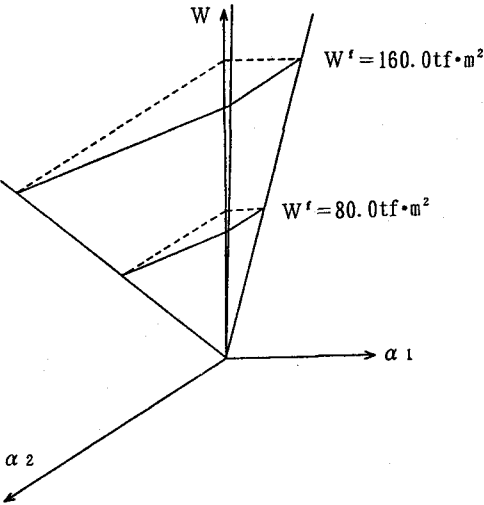


図-2 計算例1:Pareto解集合

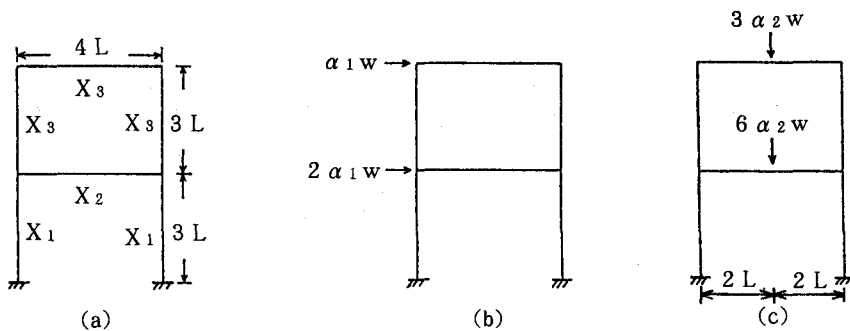


図-3 計算例2:2層1スパンラーメン(2変動荷重系)
(a)構造形式 (b)第1変動荷重系 (c)第2変動荷重系

表-2 計算例2:設計結果の一例
($W^f = 132.0 w L^2$)

	α_1	α_2	X_1	X_2	X_3
A	4.000	0.000	9.00	12.00	3.00
B	4.000	1.000	9.00	12.00	3.00
C	3.548	1.952	7.98	11.71	3.73
D	2.588	2.588	7.77	11.65	3.88
E	1.354	3.385	6.09	11.17	5.08
F	1.023	3.581	4.61	10.75	6.14
G	0.000	4.000	0.00	18.00	6.00

単位: $X_i (wL) (i=1..3)$

Pareto解集合は、原点を始点とする半無限平面群で構成され、各平面の大きさは W 値に比例して大きくなることからわかる。ただし、計算例1と比較して構造規模がわずかに大きくなるだけで半無限平面群の平面数はかなり多くなること、表-2に示すように得られる設計値にも変動が大きいことがわかり、多目的性に起因して最適設計値が複雑さを有することが認められる。

また、2変動荷重系の場合に2次元表示される等重量Pareto解集合に注目すれば、その W 軸方向の包絡が全体的なPareto解集合を形成しており、一般に n 変動荷重系の等重量Pareto解集合は n 次元空間における凸多面体で表されることが予想される。

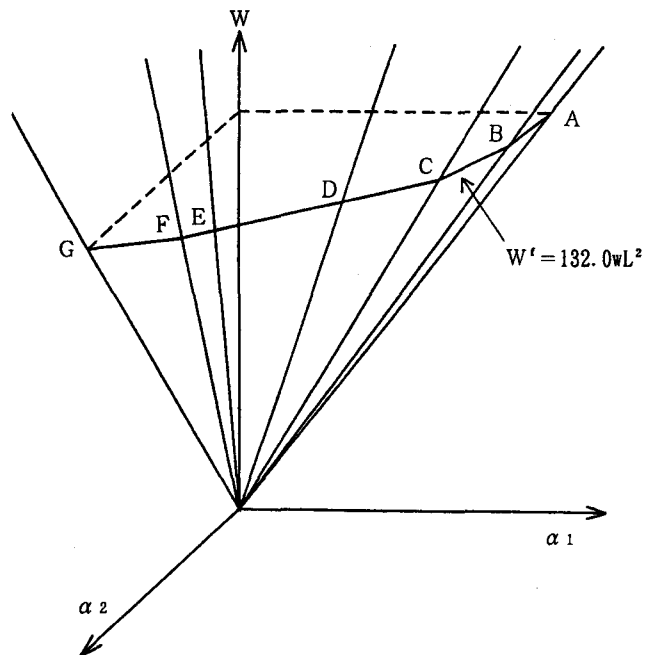


図-4 計算例2:Pareto解集合

(3) 計算例3:2層1スパンラーメン(3変動荷重系)

変動荷重系の数の影響を調べるため計算例2と同じ構造・変動荷重系の変動荷重系のみを図-5に示すような3変動荷重系に変え、そのPareto解集合を求めた。計算例2での予想通り、本例の等重量Pareto解集合は3次元空間の凸多面体として得られた。その一例として図-6に $W = 132.0 w L^2$ のときの等重量Pareto解集合を示すが、かなり複雑な凸多面体であることがわかる。図-5中の端点①~⑬の $\alpha_i (i=1..3)$ および X 値を表-3に示す。端点①~④, ⑦および⑩では $\alpha_i (i=1..3)$ 値が異なるにも関わらず同じ X 値であるな

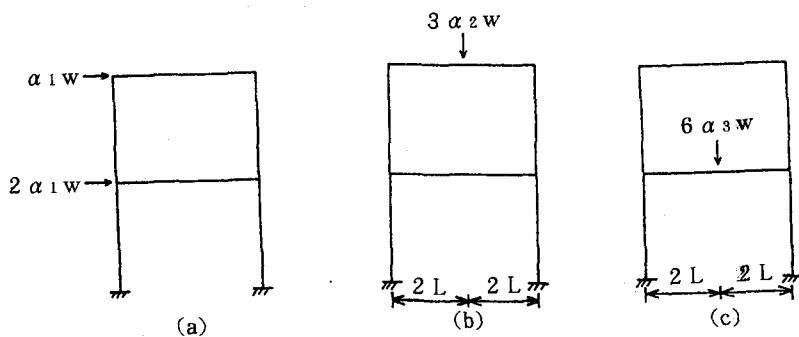


図-5 計算例3:2層1スパンラーメン(3変動荷重系)
(a)第1変動荷重系 (b)第2変動荷重系 (c)第3変動荷重系

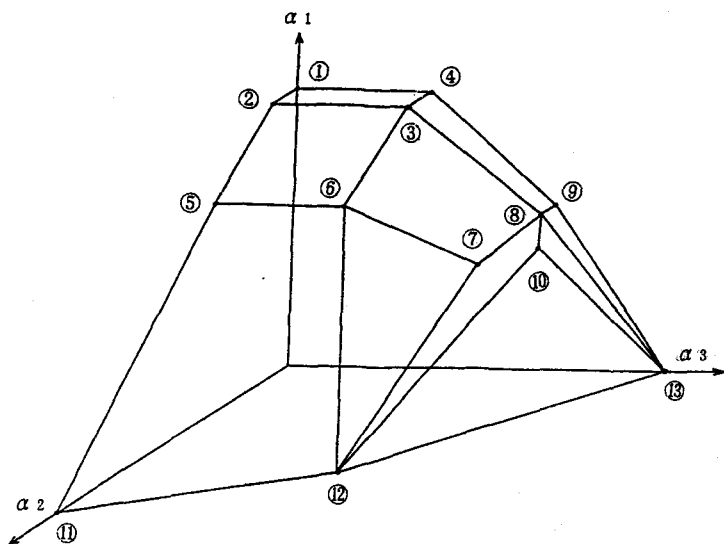


図-6 計算例3:Pareto解集合($W^f=132.0wL^2$)

表-3 計算例3:設計結果の一例
($W^f=132.0wL^2$)

	α_1	α_2	α_3	X_1	X_2	X_3
①	4.000	0.000	0.000	9.00	12.00	3.00
②	4.000	1.000	0.000	9.00	12.00	3.00
③	4.000	1.000	2.000	9.00	12.00	3.00
④	4.000	0.000	2.000	9.00	12.00	3.00
⑤	3.034	3.034	0.000	6.83	11.38	3.76
⑥	3.034	3.034	1.897	6.83	11.38	4.55
⑦	2.000	2.000	3.500	9.00	12.00	3.00
⑧	2.378	0.595	3.865	10.70	12.49	1.78
⑨	2.378	0.000	3.865	10.70	12.49	1.78
⑩	2.000	1.000	4.000	9.00	12.00	3.00
⑪	0.000	8.800	0.000	0.00	0.00	13.20
⑫	0.000	6.286	3.143	0.00	9.43	9.43
⑬	0.000	0.000	5.500	0.00	33.00	0.00

単位: $X_i(wL)$ ($i=1..3$)

ど各Pareto解間の関係は単純ではなく、塑性崩壊モードの違いなど、別の観点からの検討が必要と思われる。

5. 結 言

本研究は「最適塑性設計法の一般化」を企図し、非比例荷重下における最適塑性設計の基本式の定式化とその解について基礎的に検討したものであり、得られた成果を列挙すると以下のようにまとめられる。

- (1)作用荷重系を複数の比例荷重系と固定荷重系を組合せた非比例荷重系と仮定したときの最適塑性設計基本式を、塑性解析の下界定理に基づき多目的線形計画問題として定式化した。
- (2)上記設計基本式の解法として従来の最大荷重設計法の考え方を援用することにより、原多目的問題を単一目的線形計画問題に変換した限定最大荷重設計法と名付けた手法を提案した。
- (3)簡単な骨組構造物の数値計算例から原多目的問題の解集合（Pareto解）特性を数値的に検討した結果、次のような知見が得られた。
 - ①固定荷重系および設計変数の上・下限値制約の影響が無視できるとき、原多目的問題の全体的なPareto解集合は、一般に n 次元空間における凸多面体で表される n 変動荷重系の等重量Pareto解集合の構造重量軸方向の包絡として得られる。すなわち、全体的なPareto解集合は原点を始点とし、その大きさが構造重量に比例する半無限超平面群で形成される。
 - ②しかしながら、3変動荷重系構造では比較的単純な構造形式であっても、その等重量Pareto解集合はかなり複雑な凸多面体を形成し、しかも、得られる各Pareto解間の関係は単純ではないことがわかった。
 - ③各Pareto解間の関係については、塑性崩壊モードの違いなど、さらに別の観点からの検討が必要と思われる。

謝 辞

本研究の遂行にあたり、数値計算の一部および図表の整理等に、九州共立大学工学部土木工学科 学生 木村貴之、福本善之、榎見 謙 各君のご助力を得た。記して感謝の意を表す。

参 考 文 献

- 1)例えば、石川信隆, 大野友則:入門・塑性解析と設計法, pp. 141~162, 森北出版, 1988. 5.
- 2)三原徹治, 最上幸夫:骨組構造物の塑性最大荷重設計法に関する二、三の考察, 九州共立大学工学部研究報告, 第12号, pp. 129~134, 1988. 3.
- 3)三原徹治, 千々岩浩巳, 中山弘隆:骨組構造の塑性設計における多目的最適化に関する一考察, 構造工学論文集, Vol. 38A, pp. 477~486, 1992. 3.
- 4)石川信隆, 大野友則, 岡元北海:非比例荷重を受ける骨組構造物の崩壊荷重解析と最適塑性設計, 防衛大学校理工学研究報告, 第15巻, 第3号, pp. 353~370, 1977.
- 5)三原徹治, 千々岩浩巳, 石川信隆, 太田俊昭:多目的計画法を用いた骨組構造の塑性解析に関する一考察, 構造工学論文集, Vol. 38A, pp. 467~476, 1992. 3.
- 6)中山弘隆:多目的計画に対する満足化トレードオフ法の提案, 計測自動制御学会論文集, 第20巻, 第1号, pp. 29~35, 1984. 1.