第２回システム最適化に関するシンポジウム講演論文集　1991年11月

(46) ファジィ目標を考慮したファジィ係数を含む多目的非線形計画問題に対する対話型ファジィ意思決定

INTEARACTIVE FUZZY DECISION MAKING FOR MULTIOBJECTIVE NONLINEAR PROGRAMMING PROBLEMS WITH FUZZY PARAMETERS INCORPORATING FUZZY GOALS

坂和正敏 *　　矢野　均 **
Masatoshi SAKAWA,　　Hitoshi YANO

In this paper, we focus on multiobjective nonlinear programming problems with fuzzy parameters and introduce new solution concepts by assuming that the decision maker may have fuzzy goals for each of the objective functions with fuzzy parameters. In order to deal with multiobjective nonlinear programming problems with fuzzy parameters, two types of feasibility and two types of Pareto optimality are introduced by making use of several indices for ranking two fuzzy numbers proposed by Dubois and Prade. Then new solution concepts are defined by considering both two types of feasibility and Pareto optimality, and it is shown that any solution proposed here can be obtained on the basis of nonlinear programming for appropriate index levels.

Keywords : multiobjective nonlinear programming problems, fuzzy parameters, fuzzy goals, possibility, necessity.

1 まえがき

一般に、現実の意思決定状況を、多目的計画問題としてモデル化する際には、各目的関数の値に対する意思決定者（Decision Maker: DM）の満足度のあいまい性と、現実の意思決定状況を数式モデルとして定式化する立場にある専門家達の、モデル化の過程で、モデルに含まれる各々の係数に対する判断のあいまい性の、２つのあいまい性を考慮する必要があるものと思われる。近年、坂和ら[8]は、Duboisら[2,4]が提案した可能性と必然性の概念に基づく、ファジィ数間の大小関係に関する指標を用いて、ファジィ係数を含む多目的非線形計画問題に対する実行可能性とパレート最適性の概念を導入し、通常のパレート最適解の自然な拡張として（α, γ）パレート最適解を定義し、（α, γ）パレート最適解の集合は非線形計画法[1,6]により求められることを示した。

その後、坂和らは、ファジィ係数を含む多目的線形計画問題の各目的関数に対する、DM のファジィ目標とファジィ目的関数値と一致度を DM の各ファジィ線形目的関数に対する満足度と解釈することにより指標空間における I-パレート最適性の概念を導入し、さらにα実行可能性とI-パレート最適性を同時に考慮した２種類のI-α-パレート最適解の中から、DM の満足するI-α-パレート最適解を求めるための線形計画法に基づく対話型意思決定手法を提案した[9]。

本論文では、さらに、ファジィ係数を含む多目的非線形計画問題に対して、２種類のI-α-パレート最適解の概念を定義し、実行可能性の度合いと指標レベルを適当に設定することにより、任意のI-α-パレート最適解集合の中から、DMの満足解を導出するための非線形計画法[1,6]に基づく対話型アルゴリズムを提案する。

---

* 工博　広島大学教授　工学部第２類計数管理工学講座　　** 工博　名古屋市立女子短期大学助教授

2 ファジィ目標とファジィ係数を含む多目的非線形計画問題

本論文では、次のようなファジィ係数を含む多目的非線形計画問題を考える。

$$\text{optimize} \quad (f_1(x,\tilde{a}_1),\ldots, f_k(x,\tilde{a}_k)) \tag{1}$$

$$\text{subject to} \quad x \in \tilde{X} = \{ x \in R^n \mid g_j(x,\tilde{b}_j) \leq 0,\ j=1,\ldots,m \}$$

ここで $\tilde{a}_i=(\tilde{a}_{i1},\ldots,\tilde{a}_{ip_i}), i=1,\ldots,k$, $\tilde{b}_j=(\tilde{b}_{j1},\ldots,\tilde{b}_{jq_j}), j=1,\ldots,m$ はファジィ数のベクトルで、その要素 $\tilde{a}_{i\ell}$, $\tilde{b}_{j\ell}$ はすべて、有界で強凸なL-Rファジィ数[3]で、それらのメンバシップ関数は連続的微分可能と仮定する。

このようなファジィ係数を含む多目的非線形計画問題(1)に対して、L-Rファジィ数$\tilde{a}_{i\ell}$, $\tilde{b}_{j\ell}$の平均値[3]を、それぞれ、$\bar{a}_{i\ell}$, $\bar{b}_{j\ell}$ で表せば、問題(1)に含まれる、L-Rファジィ数をすべてそれらの平均値に置き換えた次の多目的非線形計画問題は、係数にあいまい性が含まれる問題(1)の中で、最も可能性の高い問題として解釈することができる。

$$\text{optimize} \quad (f_1(x,\bar{a}_1),\ldots, f_k(x,\bar{a}_k)) \tag{2}$$

$$\text{subject to} \quad x \in \bar{X} = \{ x \in R^n \mid g_j(x,\bar{b}_j) \leq 0,\ j=1,\ldots,m \}$$

ここで、$\bar{a}_i$, $\bar{b}_j$ は、それぞれ、ファジィ数の平均値のベクトルを表す。以下では、$f_i(x,\bar{a}_i)$, $i=1,\ldots,k$, $g_j(x,\bar{b}_j)$, $j=1,\ldots,m$は、それぞれ、x, $\bar{a}_i$ および x, $\bar{b}_j$ に関する連続関数であると仮定する。

このような多目的非線形計画問題(2)に対して、DM は、「i 番目の目的関数をだいたい～以下にしたい」というファジィ目標 (fuzzy min)、「i 番目の目的関数をだいたい～以上にしたい」というファジィ目標 (fuzzy max)、あるいは、「i 番目の目的関数をだいたい～位にしたい」というファジィ目標 (fuzzy equal) を持つものと仮定する。この時、多目的非線形計画問題 (2) は、形式的に、次のようなファジィ多目的非線形計画問題として表される。

$$\begin{array}{lll} \text{fuzzy min} & f_i(x,\bar{a}_i) & i \in I_1 \\ \text{fuzzy max} & f_i(x,\bar{a}_i) & i \in I_2 \\ \text{fuzzy equal} & f_i(x,\bar{a}_i) & i \in I_3 \end{array} \tag{3}$$

$$\text{subject to} \quad x \in \bar{X} = \{ x \in R^n \mid g_j(x,\bar{b}_j) \leq 0,\ j=1,\ldots,m \}$$

本論文では、特に、問題(3)の各目的関数に対するDMのファジィ目標$\tilde{G}_i$は、L-Rファジィ数で表されるものと仮定し、対応するメンバシップ関数を$\mu_{\tilde{G}_i}(f_i)$で表す。

この時、ファジィ多目的非線形計画問題(3)に対するDMのファジィ目標$\tilde{G}_i$, $i=1,\ldots,k$と問題(1)に含まれるファジィ係数の両者のあいまい性を同時に考慮すれば、ファジィ係数を含む多目的非線形計画問題(1)は、形式的には、次のようなファジィ目標とファジィ係数を含む多目的非線形計画問題に帰着される。

$$\max \quad (\mu_{\tilde{G}_1}(f_1(x,\tilde{a}_1)),\ \ldots,\ \mu_{\tilde{G}_k}(f_k(x,\tilde{a}_k))) \tag{4}$$

$$\text{subject to} \quad x \in \tilde{X} = \{ x \in R^n \mid g_j(x,\tilde{b}_j) \leq 0,\ j=1,\ldots,m \}$$

このような問題を通常の多目的非線形計画問題として取り扱う場合、次の２つの疑問が生じる。

(1) ファジィ係数を含む制約集合をどのように解釈すべきか。

(2) ファジィ係数を含む目的関数値に対して、ファジィ目標が与えられた時、このファジィ目標を満たす度合いをいかに定めるか。

本論文では，これらの問題点を解決するために、Dubois ら[2,4]の導入したファジィ数間の等号関係およ

び不等号関係を表す指標を用いて、ファジィ目標とファジィ係数を含む多目的非線形計画問題(4)に対する新しいパレート最適解の概念を定義する。

3 ファジィ数間の等号および大小関係の指標

2つのファジィ数 $\tilde{m}$, $\tilde{n}$ の大小関係を統合的に取り扱うために，Duboisらは、区間の大小関係の自然な拡張として、次の4種類の指標を導入した。

【定義1】

$$\mathrm{Pos}(\tilde{m} \geqq \tilde{n}) = \sup_{u,v}\{\min(\mu_{\tilde{m}}(u), \mu_{\tilde{n}}(v)) \mid u \geqq v\} \tag{5}$$

$$\mathrm{Pos}(\tilde{m} > \tilde{n}) = \sup_{u}\{\inf_{v}\{\min(\mu_{\tilde{m}}(u), 1-\mu_{\tilde{n}}(v)) \mid u \leqq v\}\} \tag{6}$$

$$\mathrm{Nes}(\tilde{m} \geqq \tilde{n}) = \inf_{u}\{\sup_{v}\{\max(1-\mu_{\tilde{m}}(u), \mu_{\tilde{n}}(v)) \mid u \geqq v\}\} \tag{7}$$

$$\mathrm{Nes}(\tilde{m} > \tilde{n}) = \inf_{u,v}\{\max(1-\mu_{\tilde{m}}(u), 1-\mu_{\tilde{n}}(v)) \mid u \leqq v\} \tag{8}$$

彼らはさらに、ファジィ数間の等号関係を表す指標を次のように定義した[2,4]。

【定義2】

$$\mathrm{Pos}(\tilde{m} = \tilde{n}) = \sup_{u}\{\min(\mu_{\tilde{m}}(u), \mu_{\tilde{n}}(u))\} \tag{9}$$

$$\mathrm{Nes}(\tilde{m} \supset \tilde{n}) = \inf_{u}\{\max(\mu_{\tilde{m}}(u), 1-\mu_{\tilde{n}}(u))\} \tag{10}$$

ここで、Pos, Nes は Possibility（可能性）,Necessity（必然性）の省略形で$\mu_{\tilde{m}}(u)$, $\mu_{\tilde{n}}(v)$はファジィ数 $\tilde{m}$ と $\tilde{n}$ のメンバシップ関数を表す。

以下では、可能性と必然性の概念に基づくこれらの指標を用いて、各目的関数に対して DM がファジィ目標を持つという仮定のもとで、ファジィ係数を含む多目的非線形計画問題(4)に対する、実行可能性とパレート最適性を定義する。

4 α実行可能性

坂和ら[7] は、既にファジィ制約集合 $\tilde{X}$ に対して、ファジィ数の大小関係に関する4種類の指標に基づく、しきい値αに依存したα実行可能集合を、次のように定義した。

【定義3】

(Ⅰ) ファジィ制約集合 $\tilde{X}$ に対して、$x \in R^n$ がα-Very Weak Feasible(α-VWF)であるとは、

$$x \in X_{VWF}(\alpha) = \{x \in R^n \mid \mathrm{Pos}(g_j(x, \tilde{b}_j) \leqq 0) \geqq \alpha, j=1, \ldots, m\}. \tag{11}$$

(Ⅱ) ファジィ制約集合 $\tilde{X}$ に対して、$x \in R^n$ がα-Medium Weak Feasible(α-MWF)であるとは、

$$x \in X_{MWF}(\alpha) = \{x \in R^n \mid \mathrm{Pos}(g_j(x, \tilde{b}_j) < 0) \geqq \alpha, j=1, \ldots, m\}. \tag{12}$$

(Ⅲ) ファジィ制約集合 $\tilde{X}$ に対して、$x \in R^n$ がα-Medium Strong Feasible(α-MSF)であるとは、

$$x \in X_{MSF}(\alpha) = \{x \in R^n \mid \mathrm{Nes}(g_j(x, \tilde{b}_j) \leqq 0) \geqq \alpha, j=1, \ldots, m\}. \tag{13}$$

(Ⅳ) ファジィ制約集合 $\tilde{X}$ に対して、$x \in R^n$ がα-Very Strong Feasible(α-VSF)であるとは、

$$x \in X_{VSF}(\alpha) = \{x \in R^n \mid \mathrm{Nes}(g_j(x, \tilde{b}_j) < 0) \geqq \alpha, j=1, \ldots, m\}. \tag{14}$$

ファジィ制約集合に対する4種類のα実行可能集合は、レベル集合の性質[3,7]から等価的に次のように表

すことができる。

【定理1】

(Ⅰ) $X_{VWF}(\alpha) = X_{MSF}(\alpha) = \{x \in R^n \mid \min_{b_j \in [b^L_{j\alpha}, b^R_{j\alpha}]} g_j(x, b_j) \leq 0, j=1,\ldots,m\}$ (15)

(Ⅱ) $X_{MWF}(\alpha) = X_{VSF}(\alpha) = \{x \in R^n \mid \max_{b_j \in [b^L_{j,1-\alpha}, b^R_{j,1-\alpha}]} g_j(x, b_j) \leq 0, j=1,\ldots,m\}$ (16)

ここで、$b^L_{j\alpha}, b^R_{j\alpha}$は、ファジィ数$\tilde{b}_{j\ell}$ のαレベル集合$[b^L_{j\ell\alpha}, b^R_{j\ell\alpha}]$の左右の端点のベクトルを表す。

定理1から、4種類のα実行可能集合の中で、特に$X_{VWF}(\alpha)$, $X_{MSF}(\alpha)$は、通常の非線形不等式の集合として表されることに注意しよう。即ち、次の定理が成立する。

【定理2】

$$X_{VWF}(\alpha) = X_{MSF}(\alpha) = \{x \in R^n \mid g_j(x, b_j) \leq 0,\ b_j \in [b^L_{j\alpha}, b^R_{j\alpha}],\ j=1,\ldots,m\} \quad (17)$$

5 I-パレート最適性

ファジィ目標とファジィ係数を含む多目的非線形計画問題(4)に対する パレート最適性を定義するために、まず、制約集合が非ファジィな非線形不等式の集合Xで表される、次のような多目的非線形計画問題を考える。

$$\max\ (\ \mu_{\tilde{G}_1}(f_1(x, \tilde{a}_1)),\ \ldots,\ \mu_{\tilde{G}_k}(f_k(x, \tilde{a}_k))\ ) \quad (18)$$

$$\text{subject to}\quad x \in X = \{\ x \in R^n \mid g_j(x, b_j) \leq 0,\ j=1,\ \ldots, m\ \}$$

この問題を通常の多目的計画問題として取り扱うためには、ファジィ係数を含む目的関数に対するファジィ目標のメンバシップ値を定義しなければならない。ここで、ファジィ目標のメンバシップ値はDMの各目的関数に対する満足度を表すことに注意すれば、メンバシップ値は、ファジィ目的関数とファジィ目標の一致度として考えるのが妥当であろう。ここでは、一致度として、ファジィ数間の等号関係を表す指標(9),(10)を採用する。即ち、ファジィ目的関数に対するファジィ目標のメンバシップ値を次のように定義する。

【定義4】

$$\mu_{\tilde{G}_i}(f_i(x, \tilde{a}_i)) = \mathrm{Pos}(\tilde{G}_i = f_i(x, \tilde{a}_i)) \quad (19)$$

$$\mu_{\tilde{G}_i}(f_i(x, \tilde{a}_i)) = \mathrm{Nes}(\tilde{G}_i \supset f_i(x, \tilde{a}_i)) \quad (20)$$

ここで、ファジィ目的関数に対するファジィ目標のメンバシップ値は、それぞれ、『ファジィ目的関数値がファジィ目標と等しい可能性の度合い』および『ファジィ目的関数値がファジィ目標に含まれる度合い』として解釈することができる。

この時、問題(18)は各指標(9),(10)に対応して、それぞれ次のような多目的計画問題として表すことができる。

$$\max\ (\ \mathrm{Pos}(f_1(x, \tilde{a}_1) = \tilde{G}_1\ ),\ \cdots,\ \mathrm{Pos}(f_k(x, \tilde{a}_k) = \tilde{G}_k\ )\ ) \quad (21)$$
$$\text{subject to}\quad x \in X$$

$$\max\ (\ \mathrm{Nes}(\tilde{G}_1 \supset f_1(x, \tilde{a}_1)),\ \cdots,\ \mathrm{Nes}(\tilde{G}_k \supset f_k(x, \tilde{a}_k))\ ) \quad (22)$$
$$\text{subject to}\quad x \in X$$

多目的計画問題(21),(22)においては、k個の目的関数が、可能性・必然性の概念に基づく指標(9),(10)に置き変わっていることに注意しよう。このような 2種類の多目的計画問題に対して、指標空間で定義されるパレート最適解として、I-パレート最適解を次のように定義することができる。

【定義5】

(1) (I-Weak Pareto optimality : I-WP)

多目的計画問題(21)に対して、次式を満たす$x \in X$が存在しない時、$x^* \in X$をI-Weak Pareto optimal(I-WP)であるという。

$$\mathrm{Pos}(\tilde{G}_i = f_i(x, \tilde{a}_i)) \geq \mathrm{Pos}(\tilde{G}_i = f_i(x^*, \tilde{a}_i)), \quad i=1,\ldots,k \tag{23}$$

(2) (I -Strong Pareto optimality : I-SP)

多目的計画問題 (22)に対して、次式を満たす$x \in X$ が存在しない時、 $x^* \in X$ を I-Strong Pareto optimal (I-SP)であるという。

$$\mathrm{Nes}(\tilde{G}_i \supset f_i(x, \tilde{a}_i)) \geq \mathrm{Nes}(\tilde{G}_i \supset f_i(x^*, \tilde{a}_i)), \quad i=1,\ldots,k \tag{24}$$

残念ながら、定義５の 2種類のパレート最適解I-WP, I-SPは、不等式(23), (24)の中にPos(·), Nes(·) の指標が含まれており、決定変数に対して陽に表現されていないので、従来のパレート最適解を求めるために提案された種々の手法[1],[6]を直接適用して求めることはできない。しかし、レベル集合の性質とファジィ数のメンバシップ関数の連続性の仮定から、二分法に基づくI-WPを求めるためのアルゴリズムを、次のように構成することができる。ここで、$G^L_{i\beta_i}$, $G^R_{i\beta_i}$, $a^L_{i,\beta_i}, a^R_{i,\beta_i}$は、ファジィ目標 $\tilde{G}_i$とファジィパラメータベクトル $\tilde{a}_i$のβ_iレベル集合の左右の端点を表す。

《アルゴリズム１》

STEP 1 初期パラメータβ_i^0 ($0 \leq \beta_i^0 \leq 1$) , $i=1,\ldots,k$ をDMが主観的に設定する。

STEP 2 初期パラメータβ_i^0, $i=1,\ldots,k$に対して、対応する非線形不等式の集合

$$G^R_{i\beta_i} \geq f_i(x, a_i), \ i \in I_1 \cup I_3, \qquad G^L_{i\beta_i} \leq f_i(x, a_i'), \ i \in I_2 \cup I_3 \tag{25}$$

$$a_i, \ a_i' \in [a^L_{i,\beta_i}, a^R_{i,\beta_i}], \qquad x \in X \tag{26}$$

の実行可能領域の有無を調べて、パラメータを次のように更新する。

(1) 実行可能領域が存在しない場合　　$\beta_i^1 = 0$, $i=1,\ldots,k$

(2) 実行可能領域が存在する場合　$\beta_i^1 \leftarrow \beta_i^0/\beta_j^0$, $i=1,\ldots,k$ ただし、$\beta_j^0 = \max_{i=1,\ldots,k} \beta_i^0$

$n=1$とする。

STEP 3 パラメータβ_i^n, $i=1,\ldots,k$に対して、対応する非線形不等式の集合(45), (46)の実行可能領域の有無を調べて、パラメータを次のように更新する。

(1) 実行可能領域が存在しない場合　　$\beta_i^{n+1} \leftarrow \beta_i^n - |\beta_i^n - \beta_i^{n-1}|/2$, $i=1,\ldots,k$

(2) 実行可能領域が存在する場合　　$\beta_i^{n+1} \leftarrow \beta_i^n + |\beta_i^n - \beta_i^{n-1}|/2$, $i=1,\ldots,k$

STEP 4 収束条件　$\sum_{i=1}^{k} |\beta_i^{n+1} - \beta_i^n| < \varepsilon$を満たすならば STEP 5 へいく。そうでなければ、$n \leftarrow n+1$として、STEP 3 へもどる。ここで、εは、収束のための判定パラメータで、十分小さな正数を表す。

STEP 5 パラメータ$\beta_i = \beta_i^{n+1}$, $i=1,\ldots,k$に対して、以下の非線形計画問題を解くことにより、対応するI-WPを求める。ただし、一般性を失うことなく、$1 \in I_1$と仮定している。

$$\min \quad f_1(x, a_1) \tag{27}$$

$$\text{subject to} \quad G^R_{i\beta_i} \geq f_i(x, a_i), \ i \in I_1 \cup I_3, \ i \neq 1, \quad G^L_{i\beta_i} \leq f_i(x, a_i'), \ i \in I_2 \cup I_3$$

$$a_i, \ a_i' \in [a^L_{i,\beta_i}, a^R_{i,\beta_i}], \qquad x \in X$$

DMは、初期パラメータベクトルを適当に変更してアルゴリズム１を繰り返し適用することにより、任意のパレート最適解を求めることができることに注意しよう。

アルゴリズム１と全く同様にして、多目的計画問題(22)に対するI-SPを求めるためのアルゴリズムを構成することができる。

6 I-α-パレート最適解と対話型アルゴリズム

4節で導入した2種類のα実行可能性の概念と、5節で定義した2種類のI-パレート最適性の概念を組み合わせれば、ファジィ目標とファジィ係数を含む多目的非線形計画問題(4)に対するパレート最適解として、2×2種類の定義を行うことが可能である。ここでは、次のような I-α-Very Weak パレート最適解を定義を示しておこう。

【定義６】

ファジィ目標とファジィ係数を含む多目的非線形計画問題(4)に対して、$X_{vwr}(\alpha)$上で、

$$\mathrm{Pos}(\tilde{G}_i = f_i(x, \tilde{a}_i)) \geq \mathrm{Pos}(\tilde{G}_i = f_i(x^*, \tilde{a}_i)), \quad i=1,\ldots,k$$

となる $x \in X_{vwr}(\alpha)$が存在しない時、$x^* \in X_{vwr}(\alpha)$を I-α-Very Weak パレート最適解(I-α-VWP)という。

以上より、I-α-VWPの集合の中からDMの満足解を導出するための対話型アルゴリズムを次のように構成することができる。

《アルゴリズム２》

STEP 1 DMは、実行可能性の度合いαと指標レベルβ_i, $i=1,\ldots,k$ を主観的に設定する。

STEP 2 設定された実行可能性の度合いαと指標レベルβ_i, $i=1,\ldots,k$ に対して、非線形計画法に基づくアルゴリズム１を用いて、対応するI-α-VWP解を求める。

STEP 3 DMは、得られた解の値を考慮して、満足ならば終了する。そうでなければ、実行可能性の度合いαあるいは指標レベルβ_i, $i=1,\ldots,k$ を更新して、STEP 2へもどる。

文　献

(1) V. Chankong and Y.Y.Haimes : "Multiobjective Decision Making : Theory and Methodology" North-Holland (1983).

(2) D.Dubois : "Linear Programming with Fuzzy Data" Analysis of Fuzzy Information, Vol.Ⅲ, (Ed.by J.C.Bezdek) CRC Press, pp.241-263 (1987).

(3) D.Dubois and H.Prade : "Fuzzy Sets and Systems : Theory and Applications ", Academic Press (1980).

(4) D.Dubois and H.Prade : "Ranking Fuzzy Numbers in the Setting of Possibility Theory", Information Science, 30, pp.183-224 (1983) .

(5) D.Dubois and H. Prade : "Fuzzy Numbers : An Overview" Analysis of Fuzzy Information, Vol. I, (Ed.by J.C.Bezdek) CRC Press, pp.3-39 (1987).

(6) 坂和正敏：" 非線形システムの最適化：１目的から多目的へ"、森北出版、(1986)

(7) 坂和正敏：" ファジィ理論の基礎と応用"、森北出版、(1989)

(8) 坂和,矢野："ファジーパラメータを含む多目的非線形計画問題に対する実行可能性とパレート最適性"、信学論(A)、J72-A, 7, pp.1062-1068 (1989).

(9) 坂和,矢野："ファジィ係数を含む多目的線形計画問題に対するファジィ目標を考慮した解の概念に基づく対話型意思決定"、日本ファジィ学会誌、2, 4, (1990).