

(38) 連続体形状の最適化

(成長ひずみ法による試み)

SHAPE OPTIMIZATION OF CONTINUUM (APPROACH BY THE GROWTH-STRAIN METHOD)

片峯英次*

畔上秀幸**

高見昭康***

沖津昭慶****

Eiji KATAMINE, Hideyuki AZEGAMI, Akiyasu TAKAMI, Akiyoshi OKITHU

The growth-strain method was developed as a numerical method to analyze optimum shape using the finite-element calculation of the deforming of shapes by generating bulk strain as a function of a distributed parameter aiming at being uniformized. In this paper, selection of the distributed parameter for each optimum criterion is presented. For maximization of strength, it is reasonable to generate the bulk strain with a strength parameter with which a strength criterion is described. Since equality of maximum condition of the stiffness and uniform condition of the potential energy density is verified, the potential energy density is selected for the distributed parameter to maximize the stiffness. For maximization of a specified natural frequency, it is presented that the selection of the Lagrange function density for the distributed parameter is reasonable. For minimization of the dissipation energy in steady-state viscous fluid field problems, the dissipation energy density is selected for the distributed parameter.

Key Words: optimum design, uniform strength, stiffness, natural frequency, dissipation energy, finite element method

1. はじめに

連続体の形状を最適化するための簡単な形状修正方法を紹介する。その方法はこれまで成長ひずみ法と称して開発されてきた方法である¹⁾⁻¹¹⁾。本小論文では最適の規準を、静的弾性問題の強度と剛性、振動問題の固有振動数、それから粘性流体定常流れ場の散逸エネルギーにわたる場合の定式化とこれまでに得られている解析結果を紹介する。

成長ひずみ法は、木や骨の構成材料が自律的に増殖と吸収を行いながら力学的に適応した形状を創り出していることをヒントにして考え出された。その増殖と吸収が成長ひずみ法では体積ひずみの発生によって実現される。この変形解析には初期応力法を用いた有限要素法が用いられる^{1),2)}。

また体積ひずみの発生則は、最適の規準に対して合理的に設定されなければならない。最適の規準が分布パラメータの均一条件で与えられている場合には、その分布パラメータが均一化するような体積ひずみを局所ごとに発生させることによって、目的の最適化が達成されることが考えられる。もし分布パラメータの大きさと発生する体積ひずみの関係が一意に与えられていれば、体積ひずみは自律的に発生することになる。最適の規準が直接分布パラメータの均一条件で与えられていない場合には、最適の規準と等価な均一条件を導出し、その条件に基づいて体積ひずみの発生則を考える必要がある。

* 工修 岐阜高専助手 機械工学科

*** 工修 豊橋技術科学大学大学院博士課程学生

** 工博 豊橋技術科学大学助教授 エネルギー工学系

**** 工博 岐阜高専校長

したがって、冒頭に挙げた最適の規準に対して体積ひずみの発生基準を何におくかが本論文の焦点となる。

なお本方法を従来の数理計画法を用いた方法と比較した場合、解析が極めて容易になる。その理由は、成長ひずみ法では感度に代わって自律的に発生する体積ひずみが用いられているためであると理解することができる。

2. 成長ひずみ法

成長ひずみ法は、体積ひずみの発生によって形状を修正する方法として提案されてきた。体積ひずみは分布パラメータの関数として与えられる。そこで最適の規準が分布パラメータの均一条件によって与えられている場合には、成長ひずみ法を直接適用することが可能になる。最適の規準に対する分布パラメータの設定方法は 3 章以降で取り上げることにして、ここではその分布パラメータが与えられた場合に、体積一定の制約を厳密に満たしながらそれが均一化するように形状を修正する方法を考える⁹⁾。なお制約条件を分布パラメータの最大値一定とした場合も同様に考えることができる⁹⁾。

形状を Ω で表し、形状変化を写像の表記法を用いて $x_i \in \Omega \mapsto x_i^G \equiv x_i + u_i^G \in \Omega^G$ と表すことにする。また形状変形前の分布パラメータは $p(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \equiv x_i$) と表すことができる。ここで 3 章以降で取り上げられる $p(\mathbf{x})$ は、体積の増加に対して減少する特性が認められる。したがって $p(\mathbf{x})$ を $p(\mathbf{x}) = 0$ に向かって均一化させるためには、次のような体積ひずみ $\varepsilon_{ij}^{PB}(\mathbf{x})$ を発生させることが有効となる。

$$\varepsilon_{ij}^{PB}(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x})}{\bar{p}} h^{PB} \delta_{ij} \quad (1)$$

ただし δ_{ij} は Kronecker デルタである。 $h^{PB}/\bar{p}$ は予め設定しておく定数である。 $\bar{p}$ は $p(\mathbf{x})$ を規準化するための定数、 h^{PB} は 1 回の変形の大きさを微小に抑えるための定数で成長比と呼ばれ、それぞれ個々に設定されてきた。式 (1) の変形は比例成長変形と呼ばれる。

この比例成長変形は連続体の領域全体で膨張の体積ひずみが発生するために体積は必ず増加する。そこで比例成長変形をした後の形状を基準にして、連続体の領域全体で一様な体積ひずみ $\varepsilon_{ij}^{UB}(\mathbf{x})$ が次のように発生したときの変形を一様成長変形と呼ぶことにする。

$$\varepsilon_{ij}^{UB}(\mathbf{x}) = -h^{UB} \delta_{ij} \quad (2)$$

h^{UB} は一様成長変形解析の場合の成長比である。

体積を一定に保つために次のような計算を行う。未定乗数 ε^V を考え、それを一様成長変形に掛けた結果と比例成長変形の結果とを重ね合わせたときの体積変化が零になる次の条件でその ε^V を決定する。

$$\Delta V^{PG} + \varepsilon^V \Delta V^{UG} + V - \bar{V} = 0 \quad \text{or} \quad \varepsilon^V = -\frac{V - \bar{V} + \Delta V^{PG}}{\Delta V^{UG}} \quad (3)$$

ただし ΔV^{PG} は比例成長変形のときの体積変化、 ΔV^{UG} は一様成長変形のときの体積変化、 $V - \bar{V}$ は前回の成長変形の結果において残された基準体積 $\bar{V}$ からの体積偏差である。このときの 2 つの変形を重ね合わせた変形 $u_i^G(\mathbf{x})$ は、次の計算で求められる。

$$u_i^G(\mathbf{x}) = u_i^{PG}(\mathbf{x}) + \varepsilon^V u_i^{UG}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

なお、この変形が有限の大きさをもつために、無視できない体積誤差が生じた場合には、修正 Newton-Raphson 法などを適用してその誤差を零にもっていく必要がある。体積一定制約の場合には通常不要である。

さらに問題によっては、式 (1) の $p(\mathbf{x})$ に閾値 p_{th} を導入して、変形する領域を $\{x_i | p(\mathbf{x}) > p_{th}\}$ に制限することが有効な場合がある。この場合式 (1) は次のように書き換えられる。

$$\varepsilon_{ij}^{PB}(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}) - p_{th}}{\bar{p}} u(p(\mathbf{x}) - p_{th}) h^{PB} \delta_{ij} \quad \text{where} \quad u(p(\mathbf{x}) - p_{th}) = \begin{cases} 1 & (p(\mathbf{x}) - p_{th} \geq 0) \\ 0 & (p(\mathbf{x}) - p_{th} < 0) \end{cases} \quad (5)$$

p_{th} は 0 から $p(\mathbf{x})$ の最大値 p_{max} までの範囲で変化し得る。そこで次式で定義された r を用いて

$$p_{th} = r p_{max} \quad \text{where} \quad (0 \leq r < 1) \quad (6)$$

体積を一定に保った成長変形を行った結果、 p_{max} の減少が認められなかった場合には r の値を漸増されることを仮定する。このときの成長変形は元に戻される。ただし r は初期値 0 から始められ、 r を漸増させた結果が $r = 1$ に達した時点で解析を終了する。

比例成長変形と一様成長変形は初期応力法によって解析される。この場合、これらの成長変形は、体積ひずみが発生したときのひずみエネルギーが最小になる条件で決定されると理解される。

3. 強度最大規準

強度の規準は通常分布パラメーターの最大値で与えられ、強度の最大条件は強度パラメータの最大値の最小条件、体積一定の下ではその強度パラメータの均一条件で与えられることになる。したがって、その強度パラメーターを $p(\mathbf{x})$ と考えることによって、成長ひずみ法を直接適用することが可能になる。Mises 規準の場合は $p(\mathbf{x})$ にせん断ひずみエネルギー密度が設定される。

なお最大主応力規準の場合に、主応力 3 成分を同時に均一化することを目指して、形状変化のためのひずみを主ひずみ 3 成分で与える方法も提案されているが⁸⁾、ここでは省略する。

4. 剛性最大規準⁴⁾

剛性の最大条件をポテンシャルエネルギーの最大条件と定義すると、ポテンシャルエネルギーの最大条件と等価な条件として、ポテンシャルエネルギー密度均一条件が次のように導出される。

体積を一定に保った下で、ポテンシャルエネルギーが最大となるための必要条件は、次の汎関数 $J(u^E, u^G, \eta)$ の停留条件によって与えられる。

$$J(u^E, u^G, \eta) = \int_{\Omega^G} \{W - F_i u_i^E\} dV - \int_{\Gamma^G} T_i u_i^E dS - \eta \left(\int_{\Omega^G} dV - \bar{V} \right) \quad (7)$$

ただし形状変化を $x_i \in \Omega \mapsto x_i^G \equiv x_i + u_i^G \in \Omega^G$ ($u^G \equiv u_i^G$)、弾性変形を $x_i^G \in \Omega^G \mapsto x_i^E \equiv x_i^G + u_i^E \in \Omega^E$ ($u^E \equiv u_i^E$) と表している。 Γ^G は Ω^G の表面、 η は体積一定条件に対する Lagrange 乗数、 $\bar{V}$ は基準体積である。なお本論文では Einstein 総和規約と偏微分表記法 $(\cdot)_{,i} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i}$ が用いられる。ひずみエネルギー密度 W は次式で与えられる。

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}^E} = \sigma_{ij} \quad \text{where} \quad \varepsilon_{ij}^E = \frac{1}{2}(u_{i,j}^E + u_{j,i}^E) \quad (8)$$

σ_{ij} は応力テンソルである。また F_i は体積力、 T_i は表面力である。ここで積分領域の変換は次の関係に従う。

$$\int_{\Omega^G} (\cdot) dV = \int_{\Omega} (\cdot) dV^G$$

where $dV^G \equiv dx_1^G dx_2^G dx_3^G = \det[x_{i,j}^G] dx_1 dx_2 dx_3 = \det[\delta_{ij} + u_{i,j}^G] dV$ (9)

$\det[x_{i,j}^G]$ は形状変化の Jacobian である。この形状変化が微小であればさらに次式が成立する。

$$dV^G = (1 + u_{i,i}^G) dV \quad (10)$$

そこで微小形状変化と $T_i dS$ が形状変化に対して不変であることを仮定すると、形状変化に対する汎関数 $J(u^E, u^G, \eta)$ の停留条件は第一変分 $\delta J(u^G, \eta)$ によって次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \delta J(u^G, \eta) = & \int_{\Omega^G} (\sigma_{ij,j} + F_i) \frac{\partial u_i^E}{\partial u_k^G} \delta u_k^G dV + \int_{\Gamma^G} (\sigma_{ij} \nu_j - T_i) \frac{\partial u_i^E}{\partial u_k^G} \delta u_k^G dS - \int_{\Omega} (W - F_j u_j^E)_{,i} \delta u_i^G dV \\ & + \int_{\Gamma} (W - F_j u_j^E - \eta) \delta u_i^G \nu_i dS - \left(\int_{\Omega^G} dV - \bar{V} \right) \frac{\partial \eta}{\partial u_k^G} \delta u_k^G = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

ただし δu_i^G は形状の拘束条件を満たした仮想変動、 ν_i は表面の単位法線ベクトルである。式 (11) は通常の力の釣合条件と体積一定条件のほか次の条件を与えている。

$$(W - F_j u_j^E)_{,i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{and} \quad W - F_j u_j^E = \eta \quad \text{on } \Gamma \quad (12)$$

ここで単位体積当りのポテンシャルエネルギーをポテンシャルエネルギー密度と呼ぶことにすると、式 (12) はポテンシャルエネルギー密度の均一条件になっている。同時に Lagrange 乗数 η はこのポテンシャルエネルギー密度を意味していることが分かる。

したがって、分布パラメーター $p(x)$ にポテンシャルエネルギー密度を設定した成長ひずみ法は、ポテンシャルエネルギー密度の均一化を通して、剛性の最大化に対して有効であると考えることができる。

5. 固有振動数最大規準¹¹⁾

連続体が固有振動数で自由振動している場合を考える。簡単のために減衰は無視することにして、力学的エネルギー保存則が成立していると仮定する。このときポテンシャルエネルギーは変位振幅時のひずみエネルギーと等しく、また速度振幅時の運動エネルギーとも等しいことになる。体積は一定に保たれ、振幅は正規モードで与えられると仮定すると、固有振動数の最大条件は速度振幅時の運動エネルギーの最大条件と等価であり、その条件はポテンシャルエネルギーの最大条件と表現することができる。

ポテンシャルエネルギーが最大となるための必要条件は次の汎関数 $J^\Phi(\Phi, u^G, \lambda, \gamma)$ の停留条件によって与えられる。

$$J^\Phi(\Phi, u^G, \lambda, \gamma) = \int_{\Omega^G} W^\Phi dV - \lambda \left(\int_{\Omega^G} T dV - \frac{1}{2} \right) - \gamma \left(\int_{\Omega^G} dV - \bar{V} \right) \quad (13)$$

ただし変位振幅時のひずみエネルギー密度 W^Φ と基準運動エネルギー密度 (reference kinetic energy density) T は、変位振幅で表した固有振動モード Φ_i ($\equiv \Phi$) と次の関係にある。

$$\frac{\partial W^\Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^\Phi} = \sigma_{ij}^\Phi \quad \text{where} \quad \varepsilon_{ij}^\Phi = \frac{1}{2} (\Phi_{i,j} + \Phi_{j,i}) \quad \text{and} \quad T = \frac{1}{2} \rho \Phi_i \Phi_i \quad (14)$$

ρ は密度である。また λ は正規モードの制約条件に対する Lagrange 乗数、 γ は体積一定条件に対する Lagrange 乗数である。ここで式 (9) と (10) の関係を用いると、汎関数 $J^\Phi(u^G, \lambda, \gamma)$ の形状変化に対する停留条件はその第一変分 $\delta J^\Phi(u^G, \lambda, \gamma)$ によって次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \delta J^\Phi(u^G, \lambda, \gamma) = & - \int_{\Omega^G} (\sigma_{ij,j}^\Phi - \lambda \rho \Phi_i) \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_k^G} \delta u_k^G dV + \int_{\Gamma^G} \sigma_{ij}^\Phi \nu_j \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_k^G} \delta u_k^G dS - \int_{\Omega} (W^\Phi - \lambda T)_{,i} \delta u_i^G dV \\ & + \int_{\Gamma} (W^\Phi - \lambda T - \gamma) \delta u_i^G \nu_i dS - \left(\int_{\Omega^G} T dV - \frac{1}{2} \right) \delta \lambda - \left(\int_{\Omega^G} dV - \bar{V} \right) \delta \gamma = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

式 (15) は通常の釣合条件と制約条件のほかに次の条件を与えている.

$$(W^{\Phi} - \lambda T)_{,i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{and} \quad W^{\Phi} - \lambda T = \gamma \quad \text{on } \Gamma \quad (16)$$

固有振動数を $\bar{\omega}$ と表すと, 式 (15) における釣合条件 $\sigma_{ij,j}^{\Phi} = \lambda \rho \Phi_i$ から Lagrange 乗数 λ は振動固有値問題の固有値に相当し, $\bar{\omega}^2$ の意味をもつことが理解される. したがって式 (16) は, 変位振幅時のひずみエネルギー密度 W^{Φ} と速度振幅時の運動エネルギー密度 λT の差が均一となる条件を与えていることになる. 同時に Lagrange 乗数 γ はこのエネルギー密度の差を意味していることが分かる. このエネルギー密度の差 $W^{\Phi} - \lambda T$ を簡単のために Lagrange 関数密度と呼ぶことにすると, 体積一定条件と正規モード条件の下でポテンシャルエネルギーが最大となる条件と等価な条件として, この Lagrange 関数密度の均一条件が得られたことになる. したがって, 成長ひずみ法の $p(x)$ には Lagrange 関数密度が設定されるべきである.

6. 散逸エネルギー密度均一規準¹⁰⁾

粘性流体の定常流れ場を連続体として捉えて, 流れ場の形状を最適化することを考える. Navier - Stokes の運動方程式には汎関数が存在しないとされているために, 4 章や 5 章のような定式化はできていない. そこで便宜的に, 粘性によって単位体積当り単位時間に失われる力学的エネルギーを散逸エネ

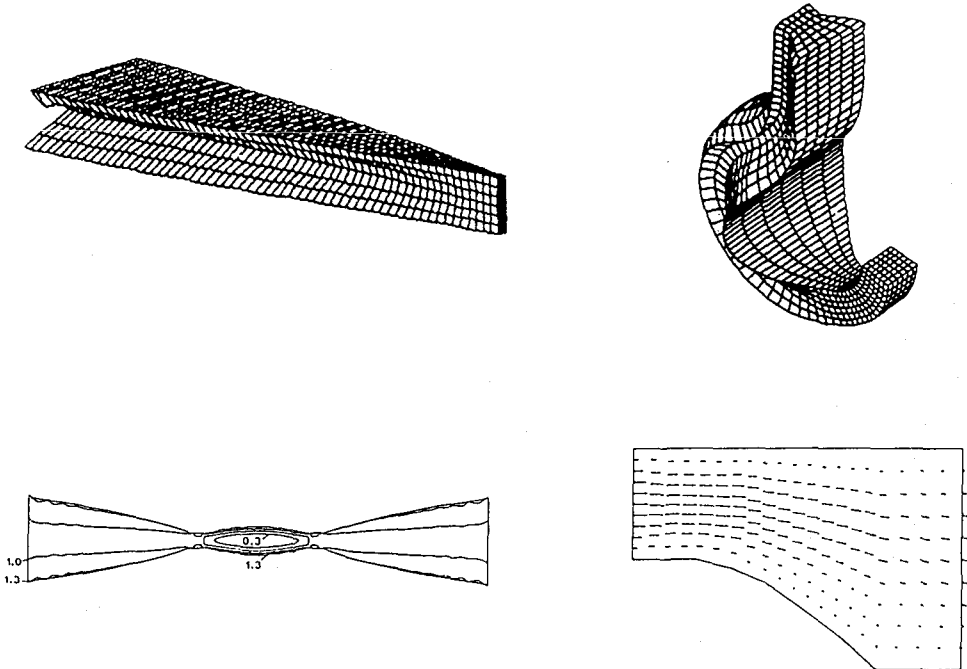


Fig. 1 Converged shapes of 3-D cantilever beam (upper left) and hook (upper right) with Mises strength criterion and/or stiffness criterion respectively, 2-D beam fixed at ends in vibration with the first mode (lower left) and steady-state flow field of viscous fluid in 2-D enlargement channel (lower right).

ルギー密度と呼んで、体積一定の下でこれを均一化させることを考える。その結果として、それを流れ場全体で積分した散逸エネルギーが最小化することが予想される。

したがって、この場合の成長ひずみ法では $p(\mathbf{x})$ に散逸エネルギー密度が設定される。ただし散逸エネルギー密度 D は非圧縮性の場合次のように与えられる。

$$D = 2\mu\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} \quad (17)$$

$\dot{\epsilon}_{ij}$ はひずみ速度テンソル、 μ は粘性係数である。

7. 解析例

代表的な問題に対する解析例を図 1 に紹介する。静的弾性問題の解析例として、汎用 FEM プログラムを利用して解析された 3 次元片持ちはりとフックの収束形状を示している⁷⁾。両者とも Mises 強度規準でも剛性規準でも同一の結果が得られている。ただし 3 次元片持ちはりは上下面と両端面で、フックは内面と両端面で形状が拘束されている。固有振動数規準の解析例として 2 次元両端固定ばりの 1 次モードについての収束形状を示している¹¹⁾。はり中央には本体の 10% の大きさをもった非構造質量が付けられ、両端面で形状拘束されている。散逸エネルギー規準の解析例として、拡大管の収束結果を示している¹⁰⁾。下面の拡大部で形状変化を許している。Reynolds 数は 35 である。

8. まとめ

連続体の形状を最適化するための成長ひずみ法について、これまでの研究結果をまとめて紹介した。

参考文献

- 1) 畔上: 成長の構成則を用いた形状最適化手法の提案 (静的弾性体の場合), 日本機械学会論文集, 54-508(A), pp. 2167-2175, 1988.
- 2) Azegami, H., Okitsu, A., Ogihara, T., Takami, A.: An Adaptive Growth Method for Shape Refinement, *Current Topics in Structural Mechanics 1989 (ASME 1989 Pressure Vessels and Piping Conference, Honolulu, Hawaii)*, pp. 199-205, 1989.
- 3) 畔上, 荻原, 高見: 成長ひずみ法による平等強さ形状の解析 (定常振動問題への適用), 日本機械学会論文集, 56-523(C), pp. 589-594, 1990.
- 4) 畔上, 高見: 逆変分原理に基礎をおく成長ひずみ法 (最大剛性形状解析へのアプローチ), 日本機械学会論文集, 56-530(A), pp. 2162-2168, 1990.
- 5) 畔上, 片峯, 今泉, 沖津: 成長ひずみ法による円筒コイルばねの素線断面形状最適化解析, 日本機械学会論文集, 56-531(A), pp. 2339-2346, 1990.
- 6) 木田, 畔上, 沖津: 成長ひずみ法による有限要素メッシュの最適化, 日本機械学会第 3 回計算力学講演会講演論文集, No.900-69, pp. 247-248, 1990.
- 7) 榎木, 畔上, 阿部, 島森, 沖津: 汎用 FEM プログラムを利用した成長ひずみ法による 3 次元形状最適化解析, 日本機械学会第 3 回計算力学講演会講演論文集, No.900-69, pp. 249-250, 1990.
- 8) 高見, 畔上, 沖津: 成長ひずみ法による 3 次元形状の最適化解析 (主応力方向に自由度を有した体積ひずみ発生則の提案), 日本機械学会材料力学講演会講演論文集, No.900-86, pp. 418-420, 1990.
- 9) 呉, 高見, 下田, 畔上: 成長ひずみ法における成長則の改善, 日本機械学会第 69 期全国大会講演論文集.
- 10) 片峯, 畔上, 高見, 沖津: 流路の形状最適化解析 (成長ひずみ法による試み), 日本機械学会第 69 期全国大会講演論文集.
- 11) 呉, 高見, 畔上: 振動問題における形状最適化解析 (成長ひずみ法による試み), 日本機械学会 No. 910-71 材料力学講演会講演論文集.