第2回システム最適化に関するシンポジウム講演論文集　1991年11月

(37) 弾性構造物の形状最適化について
ON THE SHAPE OPTIMIZATION OF ELASTIC STRUCTURE

田村　武 *　　上塚　晴彦 **

Takeshi TAMURA　　Haruhiko UETSUKA

Abstract

The shape optimization is one of the most fundamental and important subjects in the field of structural engineering. In particular, the problem of determination of an optimal shape of continuum has been paid a considerable attention to thus far since it seems an interesting challenge also from a mathematical point of view .

In the present paper, a derivation of necessary condition for an optimal shape of continuum which has the minimum value of compliance under a given volume is reviewed by means of a variational principle. It is essential to take into consideration an additional variation of the coordinates or the domain itself as well as dependent variables as in the usual variational principle.

Key Words : shape optimization, continuum, variational principle

1．はじめに

目的にかなった構造物の形状を求めることは最適化の基本問題の一つであるが，実際にこれを解くことはそれほど単純ではない．とくに，構造物がいわゆる連続体の場合，たとえ数値計算に頼るとしてもその最適形状を求めることは現在でも大きな課題とされている．その理由として，1）目的にかなう形状の最適化条件（必要条件）の誘導が容易ではない，　2）連続体の場合，その最適化条件は高次の非線形問題であって，解の求め方が確立されていない，などが考えられる．ここでは，その基礎となる場合として，線形弾性体からなる連続体をとり上げ，コンプライアンス（荷重を一定としたときの外力仕事に一致）を最小とするような形状を考察する．とくに，形状の変分をも加味した変分原理による最適化条件の誘導法について概説する．

2．領域形状の変動を含めた変分法

従属変数，つまり未知関数（ここでは変位 u_i）の変分とは別に，通常の変分法では考慮していない独立変数（座標 x_i）の変分を以下のように定義する．

* 工博　京都大学助教授　工学部交通土木工学科　**　建設技術研究所

独立変数の変分

$$x_i^* = x_i + \varepsilon\phi_i(x_j) \tag{1}$$

あるいは

$$\delta x_i = \varepsilon\phi_i(x_j) \tag{2}$$

式（1）の意味することは，変分により領域 V 自体が変動を受けることである.（図－1参照）なお，記号 δ は諸量の変分を意味する.

従属変数の変分

$$u_i^* = u_i(x_k) + \varepsilon\psi_i(x_k) \tag{3}$$

と定義する．ここで，u_i はもとの点 x_i での変位であることに対し，u_i^* は式（1）で関係付けられるような点 x_i^* での変位であることに注意すべきである．図－2を参考すれば，変位の（全）変分 δu_i は，もとの点 x_i での変分 $\varepsilon\bar{\psi}_i$ と，座標変動に起因する変分に分けられることがわかる．すなわち，

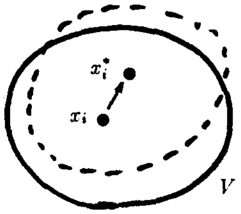
$$\delta u_i = \varepsilon\psi_i = \varepsilon(\bar{\psi}_i + u_{i,k}\phi_k) \tag{4}$$

あるいは

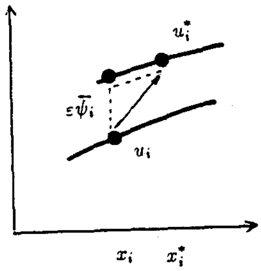
$$\psi_i = (\bar{\psi}_i + u_{i,k}\phi_k) \tag{5}$$

なる関係を仮定してよいことになる.　「$_{,k}$」は，x_k による微分を表わすものとする．また，添字については総和規約を適用する.

なお以下において $\phi_i(x_j) = 0$ とすれば従来の変分原理に帰着される.



図－1



図－2

Δx_i^* と Δx_j の逆関係

式（1）の増分は，

$$\Delta x_i^* = (\delta_{ij} + \varepsilon\phi_{i,j})\Delta x_j \tag{6}$$

となる．ここに，δ_{ij} は Knonecker の記号である．この両辺に $(\delta_{ki} - \varepsilon\phi_{k,i})$ を乗じ，ε の高次項を無視して整理すれば

$$\Delta x_k = (\delta_{kj} - \varepsilon\phi_{k,j})\Delta x_j^* \tag{7}$$

を得る.

微分商の変分

領域あるいは座標の変動を加味した変分法において，もっとも注意しなければならないのは，微分商の変分の評価である．つまり，従属変数のみならず，独立変数も変動を受けるので，両者の効果を考慮しなければならない．式（3）の増分は

$$\Delta u_i^* = (u_{i,k} + \varepsilon\psi_{i,k})\Delta x_k \tag{8}$$

であるが，これに式（6）を代入し，整理すれば

$$\Delta u_i^* = (u_{i,j} + \varepsilon\psi_{i,j} - \varepsilon u_{i,k}\phi_{k,j})\Delta x_j^* \tag{9}$$

を得る．これは，Δu_i^*とΔx_j^*の関係を示していることから，

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \varepsilon(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial \psi_k}{\partial x_j}) \tag{10}$$

あるいは，これと同じであるが

$$(u_{i,j})^* = u_{i,j} + \varepsilon(\psi_{i,j} - u_{i,k}\phi_{k,j}) \tag{11}$$

を意味している．したがって，微分商の変分は

$$\begin{aligned} \delta(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}) &= \delta u_{i,j} = (u_{i,j})^* - u_{i,j} \\ &= \varepsilon(\psi_{i,j} - u_{i,k}\phi_{k,j}) \end{aligned} \tag{12}$$

となる．これに式（5）を代入すれば，

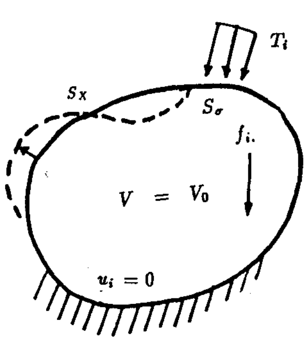
$$\delta u_{i,j} = \varepsilon(\bar{\psi}_{i,j} + u_{i,jk}\phi_k) \tag{13}$$

を得る．この式は，式（4）とともに，領域形状の変動を考慮した変分法の理論において重要な役割を果たす．

3．領域の変動を考慮した全ポテンシャルエネルギー I の第一変分

σ_{ij}，ε_{ij}およびf_iをそれぞれ，応力，ひずみおよび物体力とする．また，領域Vの境界の一部（応力境界）S_σに作用する応力をT_iとする．(図－3参照)　このとき全ポテンシャルエネルギーIは

$$I = \int_V \left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - f_i u_i\right) dV - \int_{S_\sigma} T_i u_i dS \tag{14}$$



図－3

と定義される．この汎関数Iについて，領域の変動を加味した変分をとる．

$$\delta I=\int_V\left(\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}-f_i\delta u_i-\delta f_iu_i\right)dV+\int_V\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-f_iu_i\right)\delta(dV)-\int_{S_\sigma}T_i\delta u_i dS \tag{15}$$

ここで簡単のため，$T_i\neq 0$なるS_σ上では境界形状を固定する．すなわち，そのような境界において$\phi_i=0$とする．また，$\delta(dV)$は領域の変動に伴う積分領域自体の変分を表わすが，式（１）から

$$\frac{\partial(x_1^*,x_2^*,x_3^*)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}=1+\varepsilon\phi_{k,k} \tag{16}$$

を考慮すると，

$$\delta(dV)=\varepsilon\phi_{k,k}dV \tag{17}$$

であることがわかる．これと式（４），（１３）に注意しながら，式（１５）を整理すると

$$\begin{aligned}\delta I=\varepsilon\int_V&\left\{\sigma_{ij}\left(\bar{\psi}_{i,j}+u_{i,jk}\phi_k\right)-f_i\left(\bar{\psi}_i+u_{i,k}\phi_k\right)-f_{i,k}\phi_ku_i\right\}dV\\&+\varepsilon\int_V\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-f_iu_i\right)\phi_{k,k}dV-\varepsilon\int_{S_\sigma}T_i\bar{\psi}_idS\end{aligned} \tag{18}$$

そして

$$\begin{aligned}\delta I=\varepsilon\int_V&\left\{\sigma_{ij}u_{i,jk}\phi_k-f_iu_{i,k}\phi_k-f_{i,k}\phi_ku_i+\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-f_iu_i\right)\phi_{k,k}\right\}dV\\&+\varepsilon\int_V\left(\sigma_{ij}\bar{\psi}_{i,j}-f_i\bar{\psi}_i\right)dV-\varepsilon\int_{S_\sigma}T_i\bar{\psi}_idS\end{aligned} \tag{19}$$

を得る．ここで最初の被積分項を積の関数の微分ととらえ，第２の積分の一部に部分積分を施すと，

$$\begin{aligned}\delta I=\varepsilon\int_V&\left\{\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-f_iu_i\right)\phi_k\right\}_{,k}dV\\&-\varepsilon\int_V\left(\sigma_{ij,j}+f_i\right)\bar{\psi}_idV-\varepsilon\int_{S_\sigma}\left(T_i-\sigma_{ij}n_j\bar{\psi}_i\right)dS\end{aligned} \tag{20}$$

となる．n_jは境界での外向き単位法線ベクトルである．ここでさらに簡単のため，変位境界S_u上も境界形状を固定（$\phi_i=0$）しておく．そして最初の積分項にガウスの定理を適用してやれば

$$\begin{aligned}\delta I=\varepsilon\int_{S_X}&\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-f_iu_i\right)\phi_kn_kdS\\&-\varepsilon\int_V\left(\sigma_{ij,j}+f_i\right)\bar{\psi}_idV-\varepsilon\int_{S_\sigma}\left(T_i-\sigma_{ij}n_j\right)\bar{\psi}_idS\end{aligned} \tag{21}$$

なる形として全ポテンシャルエネルギーの第一変分が導かれる．ここでS_Xは全境界Sから$T_i\neq 0$なるS_σとS_uを除いた境界の一部分である．また，そこでのϕ_kn_kは，境界から垂直に飛び出す形状の変動を意味している．ここで$\phi_i=0$とすれば，弾性論でよく知られた結果に帰着される．

4．等体積のもとでのコンプライアンス最小化の条件

いま，全領域の体積は一定とする．すなわち，境界に形状変動を許すが，

$$\epsilon \int_{S_X} \phi_k n_k dS = 0 \tag{22}$$

あるいは

$$V = V_0 \quad (一定) \tag{23}$$

を制約条件として課す．つまり，境界 S_X からの領域の飛び出しを許すが，その総和はゼロとする．そこで，やや天下り的ではあるが，そのような制約条件のもとで全ポテンシャルエネルギー I の停留化（最小化ではない）問題を考える．すると変分法から得られる結果は，

「式（２２）を満足のもとで，式（２１）の δI をゼロにすること」

である．$\bar{\psi}_i$ については何も制約条件がないから，弾性体に関する通常の変分原理と同様に，オイラーの方程式として

つりあい条件:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \qquad \text{in} \;\; V \tag{24}$$

の他に

応力境界条件：

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \qquad \text{on} \;\; S_\sigma \tag{25}$$

を得る．それでは制約のある ϕ_i からは，どのようなオイラーの方程式が導かれるのであろうか．じつは，これから得られる結果が

形状に関する条件：

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - f_i u_i = \lambda \quad (一定) \qquad \text{on} \quad S_X \tag{26}$$

である．なぜなら，変動を受ける領域境界 S_X の任意の２点，たとえば点Ａと点Ｂにおいて $\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - f_i u_i$ が等しくなければ，点Ａの近くをへこませて，かわりに点Ｂの近くを同じ大きさだけ膨らませれば，式（２２）を満たしたまま，式（２１）の第１項は変動する．つまり，停留しないことになるから，第一変分がゼロとならない．したがって，停留化のためには式（２６）が満足されなければならない．

　ところで，式（２４），（２５）が満たされたとき，全ポテンシャルエネルギーはどのような値になるのであろうか．式（１４）の形から，直ちにわかるように，つりあい条件が満足されているとき，外力仕事と内部のひずみエネルギーは一致することから，

$$I = -\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV = -\text{Compliance} \tag{27}$$

となることがわかる．そこで，

$$\operatorname*{Max}_{S_X} \min_{u_i} \left\{ \int_V \left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - f_i u_i \right) dV - \int_{S_\sigma} T_i u_i dS \right\} \;\; \text{sub. to} \;\; V = V_0 \tag{28}$$

なる問題を考えてみよう．この Max min 問題において，先に min 問題を行なったあと，体積一定条件で Max 問題を解けば，明らかに

$$\min_{S_X} \int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV \;\; \text{sub. to} \;\; V = V_0 \tag{29}$$

となる．なぜなら，領域を固定して変分をとれば，そのオイラーの方程式は式（２４），（２５）であって，それを式（２８）の全ポテンシャルエネルギーに代入すれば，式（２９）の問題が現われるからである．しかし，この問題のオイラーの方程式を誘導するにはつりあい条件を付帯条件としながら変分をとらなければならないので，やや複雑となる．ところで一方，式（２８）の問題において，Max min を同時に行なえば，３．で説明したように式（２４），（２５）および（２６）の条件を同時に得る．つまりこの場合にはつりあい条件は付帯条件にする必要はなく，オイラーの方程式として，つりあい条件とともに式（２６）の条件が直接導かれてしまうことになる．したがって，Max min 問題が一意解をもてば，つりあい条件のもとで式（２６）を満足させることが，ここでの形状最適化の必要条件であることがわかる．

５．まとめ

１．物体力を考慮する場合，周辺で $\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-f_i u_i$ を一様にするような形状が，もっとも剛性が高いといえる．

２．ひとつのＭａｘ－ｍｉｎ問題として定式化される．

３．変位境界や外力が作用している応力境界の形状を変動させる場合については，今後検討する予定である．

４．ここで得られた結果を数値的に解く方法については一部発表しているが，さらに効率的な手法を開発しなければならない．

参考文献

１．ゲリファント，フォーミン：変分法（関根智明　訳），総合図書，１９７２．

２．田村　武，小林　昭一：連続体の形状最適化に関する基礎的研究，システム最適化に関するシンポジウム講演論文集，ｐｐ．１５５－１６０，１９８９．