

(35) 有限要素法を用いる接触面形状の最適化設計

OPTIMUM SHAPE DESIGN OF CONTACT SURFACE WITH FINITE ELEMENT METHOD

多田 幸生^{*}, 西原 承龍^{**}
Yukio TADA, Syoutatsu NISHIHARA

This paper considers a shape optimization in an elastic contact problem. The object of the problem is to redesign the contact surface so that the distribution of the nodal force between contact surfaces of elastic bodies may be uniform. Then, the objective function is the variance of the nodal force and the constraint is the volume constancy. This paper uses a simple algorithm to minimize the objective function from the consideration of mechanical character of the contact surface. Moreover, in the analysis of the contact problem, the static condensation is carried out for saving the computational time and storage. In numerical examples, the contact surfaces of the object bodies widen and the contact pressure becomes uniform.

Key Words: Shape Optimizaton, Contact Problem, Static Condensation, Finite Element Method, Uniform Contact Pressure

1. まえがき

機械や構造物は、一般に、単一の部材によって構成されることはまれで、いくつかの部材の結合によってその機能が与えられている場合がほとんどである。このとき、各部材間の力の伝達のメカニズムとして、接触方式がとられることがある。たとえば、歯車、ねじ、フランジなどが接触機構を利用したものである。また、電気・電子機器の中には接触によって情報の伝達を行うものが多い。このように接触はいろいろな場面で関与してくるので、接触問題の解析は古くからの重要な課題である。また、過度に大きな接触力は機器の性能・寿命に大きな影響を及ぼすので、接触力の正しい評価と共に、適度の接触力となるように設計することも必要である。接触問題の解析法としては、Herzの弾性接触理論に代表される解析的な取扱いから、実際的な問題を扱うための数値的な方法^{1)~4)ナド}まで、多くの研究が発表されている。また、具体的な対象に対しても多くの成果があがっている^{5)・6)ナド}。このようにして、接触問題の解析手法の開発が進み、接触に伴う様々な現象が明らかになってくると、次には、接触に関連する問題においても最適設計しようという試みがなされるようになってきた^{7)・8)ナド}。Haslingerらは弾性体が剛体によって変位拘束を受けるような場合について、弾性体の接触面形状の最適化を、全系のポテンシャルエネルギーの最小化問題として定式化し⁷⁾、全系のポテンシャルエネルギーの最小化に伴い、接触領域が全体に広がり、接触面上の節点力分布が一様にな

* 工博 神戸大学助教授 工学部システム工学科

** 工修 日本IBM(株) 野洲工場

ることを示した。本研究では、この結果を参考に、弾性体間の接触面上の節点力分布を一様とすることを形状最適化の基準として選び、有限要素法を用いて弾性接触問題に関する形状最適化手法を提案する。すなわち、節点力分布の分散を目的関数とし、接触面における力学的な性質を利用した簡単な形状修正法を用いることにより目的関数を最小化するようなアルゴリズムを考える。また、解析においては、剛性方程式の縮約を行う⁸⁾ことにより、全系の自由度の増加をおさえ、繰返し計算の効率化を図る。計算例として、接触状態にある二つの弾性体に関して、一方の弾性体の接触面を設計対象とした形状最適化の例を示す。

2. 弾性接触問題の解析方法

2.1 二次元弾性体接触モデル 図1に示すような接触状態にある2次元弾性体 B_1 、 B_2 を考える。両弾性体のそれぞれの接触面を Γ_1 、 Γ_2 とし、両方の弾性体の接触面全体に対応節点を設ける。接触面上の節点変位、節点力に関しては接触する弾性体のどちらか一方を基準とする局所座標系 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ を用いる。ここでは、弾性体 B_2 を基準にとり、 $\tilde{x}$ を接線方向、 $\tilde{y}$ を法線方向とする。接触面以外の節点変位、節点力は全て全体座標系 (x, y) で表わす。

2.2 接触状態の分類 二次元接触問題を考えるとき、接触状態は次の3種類に分類される。

- (1) 離隔：対応する表面で接触していない状態。自由境界として扱う。
- (2) 固着：接触していて、対応する表面間で相対変位がない状態。摩擦力は最大摩擦力に達していない。
- (3) すべり：接触しながら相対変位がある状態。摩擦力は最大摩擦力に達している。

局所座標系の定義に従って、接触面上の対応する節点の変位を $\tilde{u}_j^i$ 、接触力による等価節点力を $\tilde{p}_j^i$ で表わす。ここで、上添字 i は弾性体 B_i ($i=1,2$)の属性であることを、下添字 j は x, y のいずれかで、それぞれ、 $\tilde{x}, \tilde{y}$ 軸方向を示すものとする。そして、両弾性体の接触面間の $\tilde{y}$ 軸方向の初期分離量を $\tilde{d}$ 、摩擦係数を μ とする。これらの表記を用いると、上記の3種類の接触状態に対する力学的および幾何学的境界条件は、

- (1) 離隔： $\tilde{p}_j^i = 0 \quad (j=x, y), (i=1,2) \quad (1)$
- (2) 固着： $\tilde{u}_x^1 - \tilde{u}_x^2 + \tilde{d} = 0 \quad (2), \quad \tilde{u}_x^1 - \tilde{u}_x^2 = 0 \quad (3),$
 $\tilde{p}_y^1 = -\tilde{p}_y^2 \quad (4), \quad \tilde{p}_x^1 = -\tilde{p}_x^2 < \mu \tilde{p}_y^1 \quad (5)$
- (3) すべり： $\tilde{u}_y^1 - \tilde{u}_y^2 + \tilde{d} = 0 \quad (6), \quad \tilde{p}_x^1 = -\tilde{p}_x^2 = \pm \mu \tilde{p}_y^1 \quad (8)$
 $\tilde{p}_y^1 = -\tilde{p}_y^2 \quad (7),$

と与えられる。式(5)と(8)はクーロンの摩擦条件を表わしている。また、式(8)の複号はすべり方向による。

2.3 剛性方程式の縮約 有限要素法によって弾性接触問題を解く場合に問題となるのは、前述の接触状態を解析前には決めることができないため、繰返し計算が必要になる点である。しかし、一般に、接触問題において、接触領域は解析対象のほんの一部であり、接触状態に関する力学的・幾何学的境界条件は接触面上の要素の節点変位と節点力に対して制約を与えることによって満足させることができるので、接触面上の情報だけを扱えばよいと考えられる。そこで、本研究では、弾性体 B_1 、 B_2 に対する剛性方程式を、それぞれ接触面上の要素の節点の変位のみに関係する形に縮約して、計算行列のサイズを小さくすることによって計算の効率をあげる。また、これにより、境界条件の導入も容易になる。縮約は次のように行う。

弾性体 B_1 に関する剛性方程式が次式のようなものであるとする。

$$\begin{bmatrix} K_{cc}^i & K_{cn}^i \\ K_{nc}^i & K_{nn}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_c^i \\ U_n^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_c^i \\ F_n^i \end{bmatrix}, \quad U_c^i: \text{接触面上の要素の節点変位} \quad (9)$$

この式から U_n^i を消去すると、式(9)は次のように変形できる。

$$K_c^i U_c^i = Q_c^i \quad (10),$$

$$K_c^i = K_{cc}^i - K_{cn}^i (K_{nn}^i)^{-1} K_{nc}^i \quad (11), \quad Q_c^i = F_c^i - K_{cn}^i (K_{nn}^i)^{-1} F_n^i \quad (12)$$

このようにして得られた二つの縮約剛性方程式 ($i=1,2$)を用いて、二つの弾性体に関する接触関係を無視した次の全系方程式が作成される。

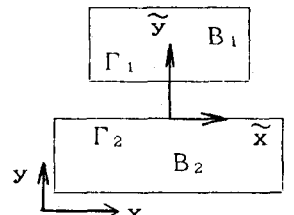


図1 2次元接触モデル

表1 接触判定条件 (a)

判定	離 隔	固着・すべり
假定		
離隔	$\tilde{u}_y^1 - \tilde{u}_y^2 + \tilde{d} > 0$	$\tilde{u}_y^1 - \tilde{u}_y^2 + \tilde{d} \leq 0$
固着・すべり	$\tilde{p}_y^1 < 0$	$\tilde{p}_y^1 \geq 0$

表2 接触判定条件 (b)

判定	固 着	すべり
假定		
固着	$ \tilde{p}_x^1 \leq \mu \tilde{p}_y^1 $	$ \tilde{p}_x^1 > \mu \tilde{p}_y^1 $
すべり	$\tilde{p}_x^1 (\tilde{u}_x^1 - \tilde{u}_x^2) > 0$	$\tilde{p}_x^1 (\tilde{u}_x^1 - \tilde{u}_x^2) \leq 0$

$$\begin{bmatrix} K_c^1 & 0 \\ 0 & K_c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_c^1 \\ U_c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_c^1 \\ Q_c^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

この方程式に接触面各点の接触の状態に応じて先の条件を組み込むことによって解析を進めることができる。

2. 4 接触の判定条件式と解析のアルゴリズム 有限要素解析では、あらかじめ接触状態を假定しながら計算を行うので、接触面が離隔・固着・すべりのいずれの状態にあるかを判定するための条件式を定める必要がある。表1と2に判定条件式を示す。表1は接触しているかどうか、表2は、接触していて、すべりが生じているか、いないか、の判定に用いられる。以下に、接触状態を考慮に入れて、接触面上の要素の全節点に関して境界条件式を満足するように、新剛性方程式(13)を解くための手順を示す。

(step 1) 初期状態として、接触面上の全ての節点が固着状態にあると假定する。

(step 2) 接触面上の節点変位、節点力を計算し、表1、表2の判定条件と比較する。矛盾があれば、假定の接触状態を変更し、次の計算を行う。

(step 3) 接触面上の全ての節点に関して計算結果が判定条件に矛盾しなくなったとき計算を終了する。

3. 問題の定式化と最適化手法

3. 1 モデル化と設計変数 本研究では、弾性体 B_1 を設計対象とし、図2のようなモデルを考える。接触面 Γ_1 の形状を $\alpha(x)$ とし、まず、 x 軸方向では対象物体を N 等分し、それぞれの区間で接触面形状を線形近似し、それを $\alpha_h(x)$ と呼ぶ。そして各分割点での接触面の縦座標(あるいは、基準面からの高さ) H_i ($i=0, \dots, N$)を設計変数とする。次に、物体 B_1 を図2のように、二つの領域に分け、上部(Ω_{fix})では有限要素節点の位置を不変、下部(Ω_{fes})においては上下分割面($y=D$)と接触面 α_h の間で等分割となるように形状修正ごとに有限要素節点を再配置することにする。弾性体 B_2 については、弾性体 B_1 の接触面 Γ_1 上の節点に対応するように、接触面 Γ_2 に節点を配置する。

3. 2 最適化問題 本研究では、弾性体 B_1 の体積 V が一定の条件の下で、二つの弾性体の接触面間に働く節点力の分布が一様となるような形状を求めることを目的とする。接触面間に生じる $\tilde{y}$ 軸方向の節点力 p_{yi} ($i=0, \dots, N$)の平均を $\bar{p}$ 、分散を S とすると、この最適化問題は次のように定式化される。

$$\text{Minimize } S = \sum_{i=0}^N (p_{yi} - \bar{p})^2 \quad \text{w.r.t. } H_0, H_1, \dots, H_N \quad (14)$$

$$\text{subject to } V(H_0, H_1, \dots, H_N) = C_v \quad (15), \quad H_i > C_{i2} \quad (i=0, 1, \dots, N) \quad (16)$$

ここで、 C_v は体積規定値、 C_{i2} は弾性体 B_2 の上面 Γ_2 の縦座標から決まる定数で、式(16)は弾性体 B_1 の下面が弾性体 B_2 の上面と交わらないための条件である。

3. 3 形状修正法 一般に、接触問題においては、接触面上の節点力 p_{yi} が平均値 $\bar{p}$ より大きければ、弾性体 B_1 の接触面 Γ_1 の高さ H_i を高くする方向に形状修正すると、接触しにくくなり、節点力が減少すると考えられる。そこで、次のようなアルゴリズムを適用する。

$$H_i^{t+1} = H_i^t + r(p_{yi} - \bar{p}) \quad (17), \quad r = r_0 S \quad (18)$$

なお、制約(16)によって体積一定条件が満足できないときは、弾性体 B_1 の上面の高さを変えることによって補正する。この計算を繰返し、小さな ϵ に対して、次式が成立するとき、計算を終了する。

$$S^t < \epsilon \quad (19)$$

4. 最適設計の例

4.1 剛体との接触 左右対称形の弾性体が、その上面で下向きの一様分布荷重を受け、下部で剛体と摩擦無しに接触しているときの接触面形状の最適化を考える。図3に弾性体の左半面 ($-2 \leq x \leq 0$) の

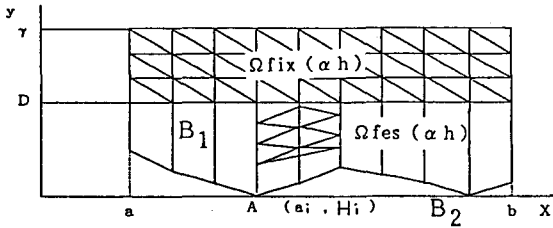


図2 設計対象のモデルと有限要素分割

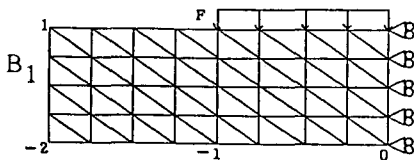


図3 設計例1の有限要素モデル

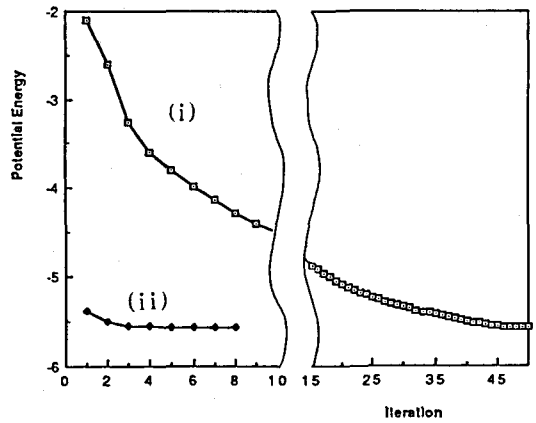
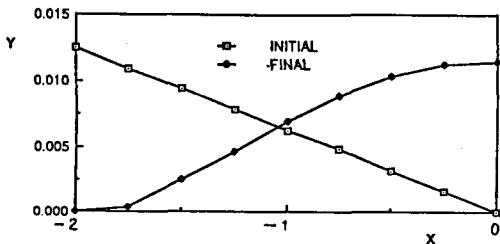
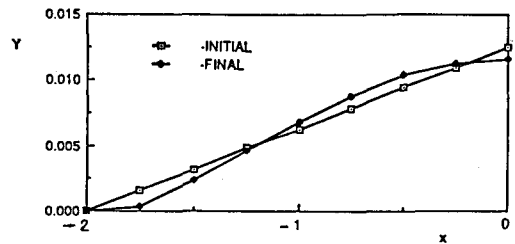


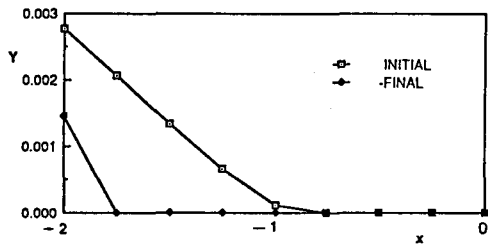
図6 全系ポテンシャルエネルギーの変化



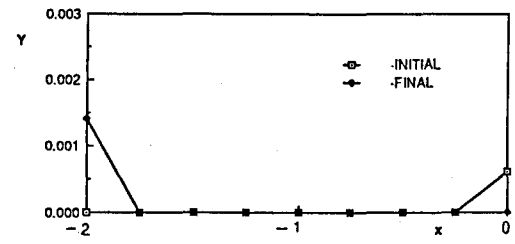
(a) 接触面の初期形状□と最終形状● (変形前)



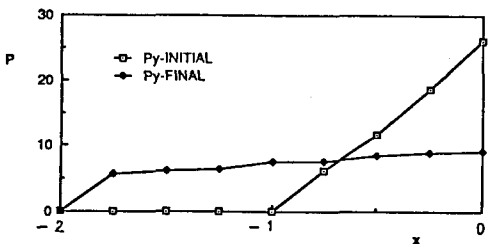
(a) 接触面の初期形状□と最終形状● (変形前)



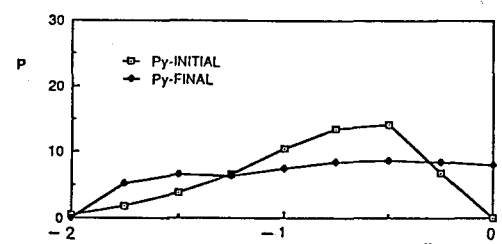
(b) 接触面の初期形状□と最終形状● (変形後)



(b) 接触面の初期形状□と最終形状● (変形後)



(c) 初期□と最終形状●における接触面上の節点力



(c) 初期□と最終形状●における接触面上の節点力

図4 設計例1-(i)

図5 設計例1-(ii)

有限要素分割と境界条件を示す。以下では、弾性体の左半面について述べる。接触面の初期形状を(i) $\alpha = -0.00625x$, (ii) $\alpha = 0.00625x + 0.0125$ とする2通りについての結果を図4～図6に示す。収束までの繰返し数は(i)50回, (ii)8回で、ほとんど同じ収束形状が得られた。接触面が広がり、接触面の節点力もほぼ一様となっている。また、図6に示すように、この最適化によって全系ポテンシャルエネルギーが最小値へと停留していき、Haslinger らと同様の結果が得られている。

4.2 弾性体どうしの接触 先と同じ荷重を受ける弾性体 B_1 が同じ弾性係数を持つ弾性体 B_2 と接触するときを考える。摩擦係数は $\mu = 0.5$ とする。図7に両弾性体の有限要素分割図と境界条件を示す。ここでは、二つの例を示す。図8の例2では弾性体 B_2 の接触面 Γ_2 の形状は $x^2 + (y + R)^2 = R^2$, $R = 625$ とし、図9の例3では、 $y = -0.00625x - 0.0125$ である。例2, 例3とも、最終形状 B_1^{fin} においては節点力分布が一様になり、初期形状 B_1^{ini} において一部分のみが接触するため生じていた高節点力部が無くなっている。法線方向の応力分布についても同様のことが言える(図は省略)。

4.3 一致形状との比較 4.2節でとりあげた弾性体 B_2 の接触面形状と同じ接触面形状を持つ(変形前に B_2 と完全に接触する)弾性体 B_1^{same} をここでは一致形状と呼び、先に得られた最適形状 B_1^{fin} と同じ荷重を受けた場合の接触状態を比較した結果を図10および図11に示す。一致形状では、例2, 例3のどちらにおいても、最適形状

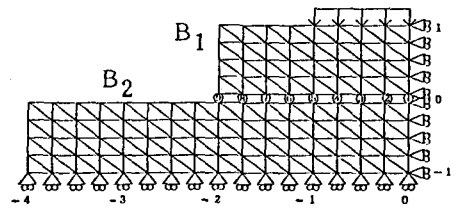
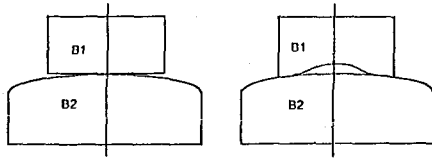
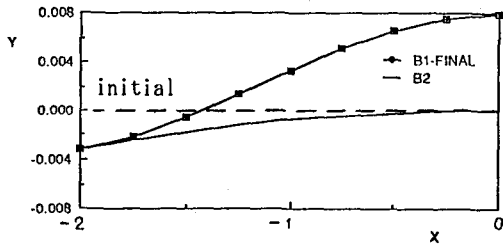


図7 解析対象の有限要素分割と境界条件

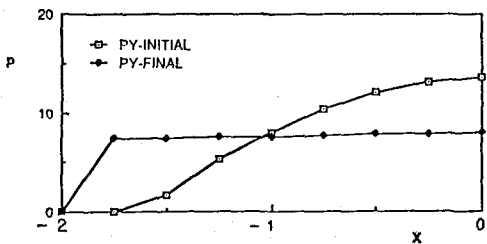


初期形状(initial) 最終形状(final)

(a) 初期形状と最終形状の概略図

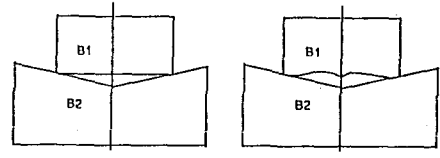


(b) 弾性体 B_1 の接触面 Γ_1 の最終形状



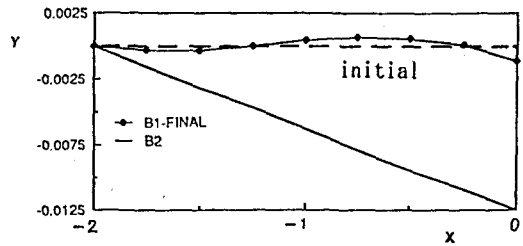
(c) 初期形状と最終形状における接触面上の節点力

図8 設計例2

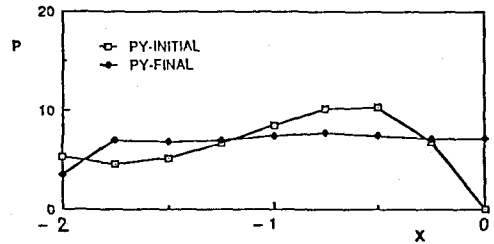


初期形状(initial) 最終形状(final)

(a) 初期形状と最終形状の概略図

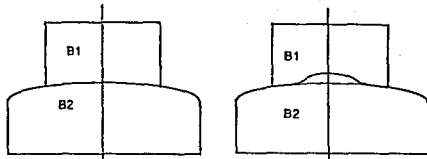


(b) 弾性体 B_1 の接触面 Γ_1 の最終形状



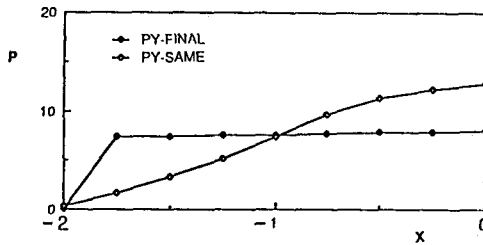
(c) 初期形状と最終形状における接触面上の節点力

図9 設計例3



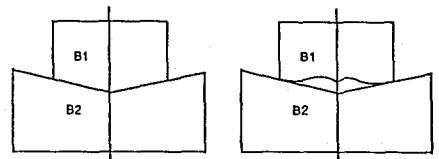
一致形状 (same) 最終形状 (final)

(a) 一致形状と最終形状の概略図



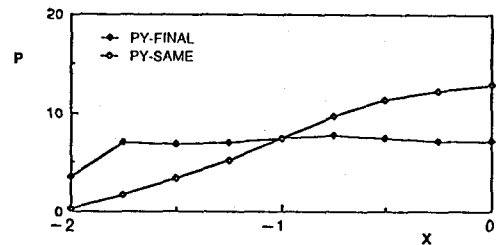
(b) 一致形状と最終形状における接触面上の節点力

図10 設計例2における一致形状と最終形状の比較



一致形状 (same) 最終形状 (final)

(a) 一致形状と最終形状の概略図



(b) 一致形状と最終形状における接触面上の節点力

図11 設計例3における一致形状と最終形状の比較

の節点力（法線方向応力）の約1.6～2 倍の大きさの最大節点力が生じており、接触問題では、負荷を受けた状態、変位拘束の影響を予測して設計することの重要性がわかる。

5. あとがき

本研究では接触面上の節点力の分散を最小化することによって、接触面において節点力が一様となる形状を求めた。最適化計算の効率を上げるため、まず、剛性方程式の縮約を行った。計算例では行列のサイズを元の問題の26.7%に縮小することができた。そして、余分な感度計算を用いず、かつ体積一定の制約条件を自動的に満足する最適化アルゴリズムの使用によって、安定に解を得ることができた。法線方向の節点力については所望の結果が得られたが、接線方向力については考慮しなかったもので、さらなる考察が必要である。

参考文献

- 1) Pascoe, S. and Mottershead, J., Two New Finite Element Contact Algorithms, Computers & Structures, 32-1, pp.137, 1989.
- 2) Zhong, Z. and Nilsson, L., A Contact Searching Algorithm for General Contact Problems, Computers & Structures, 33-1, pp.197, 1989.
- 3) 尾田・品田, 接触応力分布を求めるための逆問題解析手法, 日本機械学会論文集, A編, 53-492, pp.1614, 1987.
- 4) 上田, 圧縮荷重を受ける半無限弾性体の逆問題解析, 日本機械学会論文集, A編, 54-499, pp.529, 1988.
- 5) 福岡・山崎・北川・浜田, ボルト締め付時に発生する応力の評価, 日本機械学会論文集, A編, 51-462, pp.504, 1985
- 6) 太田・岡田・苗村・二川, テープと接触するヘッドの摩耗形状に関する研究, 日本機械学会論文集, C編, 55-512, pp.1061, 1989.
- 7) Haslinger, J. et al., Optimal Shape Design and Unilateral Boundary Value Problems: Part 1, Opt. Cont. Applications & Method, 9, pp.127, 1988.
- 8) Cheng, W., Zhu, F. and Luo, J., Computational Finite Element Analysis and Optimal Design for Multibody Contact System, Computers & Structures, 71, pp.31, 1988.