

(34) 境界要素法による連続体の最小重量設計法

Minimum Weight Shape Optimization by Boundary Element Method

山崎 光悦* 坂本 二郎**
Koetsu YAMAZAKI, Jiro SAKAMOTO

An efficient approximation method to determine an optimum shape of minimum weight subjected to stress constraints is suggested. Design variable reduction techniques of isoparametric interpolation and trigonometric series interpolation for the boundary shape are adopted for reducing the degree of freedom of the design problems. The objective function of weight is approximated to an expansion of a second-order Taylor series and the stress constraints to expansions of first-order Taylor series, based on the boundary element sensitivity analysis at current design point. Then the approximated subproblem is solved by a linear complementary pivot method. In the design variable reduction of isoparametric interpolation, an adaptive mesh refinement technique is also adopted to keep the accuracy of the structural analysis. The efficiency of the approximation method suggested here is confirmed by applying to the minimum weight design problems to determine hole shapes in a plate under biaxial loadings.

Key Words : Structural Optimum Design, Boundary Element Method, Shape Optimization, Approximation Method, Design Variable Reduction

1. 緒 言

数理計画法や最適性基準法によって形状を徐々に修正してゆく連続体の形状最適化法が、実用的な観点から近年注目を集め、有限要素法や境界要素法による構造解析を基礎とする種々の解法が提案されている^{1)~9)}。一般的な形状最適化問題への数理計画法と最適性基準法の適用性を考えると、種々の制約条件や目的関数を設定することが容易で汎用性の高い数理計画法による解法の方が有利である。しかし、任意形状の取扱いを可能とするには数多くの設計変数を取る必要があるため大次元の数理計画問題となり、さらには数理計画法を直接適用すると解の探索過程において設計点の移動のたびに変位や応力値などの評価のための構造解析を実施する必要がある。したがって、大規模な構造解析を必要とする実用設計問題では数百回もの構造解析を実施する従来の方法は効率面で実用的ではなく、ときには与えられた制約条件を満たす解を最終的に決定できないことすらある。

そこで本報告では、有限要素法に比べて境界値を精度良く計算できること、要素分割や再分割が容易であるなどの利点を有する境界要素法による応力解析に基礎をおく形状最適化法の効率化について、応力制約下の2次元最小重量設計問題を中心に検討した結果について報告する。まず、構造最適設計に占める構造解析、設計感度解析の計算時間が極めて大きいことから、構造解析、感度解析回数を低

* 工博 金沢大学助教授 工学部機械システム工学科

** 工修 金沢大学助手 工学部機械システム工学科

減させるための近似数値計画問題の構成法を示す。また、設計感度解析法の効率化についても言及する。さらに数値計画問題の規模を縮小し、的確に最適形状を決定する上で重要な少ない設計変数による任意境界形状の縮約表現法、大きな形状変化に伴う解析精度の低下を防ぐ上で重要な適応分割法についても示す。

2. 境界要素法による最小重量設計法の効率化

2.1 最小重量設計近似問題の構成 形状最適化問題のうち実用的にも重要な問題は境界応力、変位制約下の最小重量設計問題である。図1に示すような空間領域 Ω (境界を Γ)を占める二次元物体を考え、形状パラメータに關与する設計変数を $\mathbf{b}^T = (b_1, b_2, \dots, b_{ND})$ (ND は設計変数の数) とするとき、密度を ρ として目的関数の重量は次式で表される。

$$f = \frac{\rho}{2} \int_{\Gamma} r_0 \frac{\partial r_0}{\partial n} d\Gamma \rightarrow \min \quad (1)$$

ここに、境界上の点を (x_1, x_2) 、適当に選んだ基準点を (x_1^0, x_2^0) として、 $r_0^2 = (x_\alpha - x_\alpha^0)(x_\alpha - x_\alpha^0)$ 、また n を境界法線方向単位ベクトル、 n_α を方向余弦とすると $\partial r_0 / \partial n = (x_\alpha - x_\alpha^0) n_\alpha / r_0$ 。ただし、以後ギリシャ小文字の添字は $\alpha=1, 2$ などとし、繰返し指標は総和規約に従うものとする。

一方、境界上に数点の観測点を考え、それら観測点の応力や変位制約を考える。任意観測点 j の変位を u_j 、応力を σ_j 、その許容値をそれぞれ u_{aj} 、 σ_{aj} と表すと、制約条件は次のように書ける。

$$g_j = \sigma_j - \sigma_{aj} \leq 0 \quad (j=1, 2, \dots, NJ) \quad (2)$$

$$g_{k+NJ} = u_k - u_{ak} \leq 0 \quad (k=1, 2, \dots, NK) \quad (3)$$

また設計変数の上下界制約を次のように表す。

$$b_i^L \leq b_i \leq b_i^U \quad (i=1, 2, \dots, ND) \quad (4)$$

ここに、 b_i^U, b_i^L は設計変数の上下界値とする。以上より最小重量設計問題は、式(2)~(4)の制約条件の下で式(1)の重量を最小とする設計変数 $\mathbf{b}$ を見いだす問題となる。

上記の非線形設計問題は通常、数値計画法を用いて逐次解かれるが、境界応力や変位は境界要素法などの構造解析によって求める必要があるため、数値計画法によって設計点を改めるたびに繰返し構造解析が実施され、最適解を得るまでの計算コストは膨大なものとなる。そこで最終的な解を得るまでの構造解析回数を減少し、最適化の効率を高めるため、1回の構造解析および設計感度解析結果を基に、目的関数を設計変数の二次に、応力・変位制約を設計変数の一次にテーラー展開し、移動制約を課してその近似問題を逐次二次計画法などによって解く解法を考える。目的関数式(1)を設計点 $\mathbf{b}_0$ でテーラー展開し、二次までの項を取ると

$$f(\mathbf{b}) \approx \frac{1}{2} (\mathbf{b} - \mathbf{b}_0)^T \mathbf{C} (\mathbf{b} - \mathbf{b}_0) + (\nabla f)^T (\mathbf{b} - \mathbf{b}_0) + f(\mathbf{b}_0) \quad (5)$$

ここに、 ∇f は目的関数の設計変数に対する一次感度、 $\mathbf{C}$ は二次感度行列であり

$$\nabla f(\mathbf{b}) = \left(\frac{\partial f}{\partial b_1}, \frac{\partial f}{\partial b_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial b_{ND}} \right)^T \quad (6)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial b_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial b_1 \partial b_{ND}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial b_{ND} \partial b_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial b_{ND}^2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

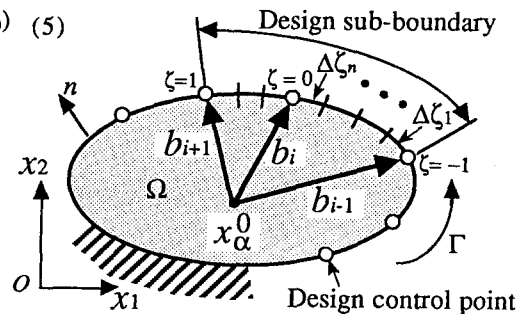


図1 形状最適化モデルと適応分割

また制約制約条件はテーラー展開の一次までの項を取ると

$$g_j(b) \equiv (\nabla g_j)^T(b - b_0) + g_j(b_0) \leq 0 \quad (8)$$

ここに、 ∇g_j は制約条件の設計変数に対する一次感度を表し、応力・変位の境界要素解析によって求まる。一方、式(5),(8)の近似精度を保証するため、設計変数の移動範囲を次式によって制限する。

$$(1-\delta)b_0 \leq b \leq (1+\delta)b_0, \quad 0 < \delta < 1 \quad (9)$$

実際の最適化過程では式(4)と上式のうち、厳しい方の上下限値が制約値としてとられる。

2.2 設計感度解析 上述の近似設計問題を構成するには、現設計点 b_0 での目的関数の一次および二次感度 $\partial f/\partial b_i, \partial^2 f/\partial b_i \partial b_j$ 、制約条件の一次感度 $\partial g_j/\partial b_i$ が必要となる。以下にその効率的な計算法を示す。

(1) 目的関数の設計感度 境界要素法によって構造解析を行なう場合、境界を要素に離散化し、要素内で $-1 \leq \xi \leq 1$ なる正規座標をとり、節点座標を $x_{\alpha J}$ (以下では英大文字添字は要素内節点数 N に対する指標 $J=1, 2, \dots, N$ などとする)、内挿関数を N_J とすると、任意点の座標 x_{α} は

$$x_{\alpha} = N_J x_{\alpha J} \quad (10)$$

と表され、このとき式(1)は次のように離散化される。

$$f = \frac{\rho}{2} \sum_e \int_{-1}^1 r_0 \frac{\partial r_0}{\partial n} |J| d\xi = \frac{\rho}{2} \sum_e \int_{-1}^1 (x_{\alpha} - x_{\alpha}^0) n_{\alpha} |J| d\xi \quad (11)$$

ここに $\sum_e$ は境界要素に関する和を意味する。 $|J|$ はヤコビアンを表し、 $\partial(\cdot)/\partial \xi = (\cdot)_{,\xi}$ と表すと

$$|J|^2 = x_{\alpha,\xi} x_{\alpha,\xi} = N_{J,\xi} N_{J,\xi} x_{\alpha J} x_{\alpha J} \quad (12)$$

$$n_1 = x_{2,\xi}/|J| = N_{J,\xi} x_{2J}/|J|, \quad n_2 = -x_{1,\xi}/|J| = -N_{J,\xi} x_{1J}/|J| \quad (13)$$

と与えられる。そこで式(11)を設計変数で微分すると、その一次感度は次式のように表される。

$$\frac{\partial f}{\partial b_i} = \frac{\rho}{2} \sum_e \int_{-1}^1 \left[\left\{ \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial b_i} n_{\alpha} + (x_{\alpha} - x_{\alpha}^0) \frac{\partial n_{\alpha}}{\partial b_i} \right\} |J| + (x_{\alpha} - x_{\alpha}^0) n_{\alpha} \frac{\partial |J|}{\partial b_i} \right] d\xi \quad (14)$$

ここに

$$\frac{\partial |J|}{\partial b_i} = \frac{1}{|J|} N_{J,\xi} N_{J,\xi} x_{\alpha J} \frac{\partial x_{\alpha J}}{\partial b_i} \quad (15)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial b_i} = \frac{n_2}{|J|} \left(n_1 \frac{\partial x_{1,\xi}}{\partial b_i} + n_2 \frac{\partial x_{2,\xi}}{\partial b_i} \right), \quad \frac{\partial n_2}{\partial b_i} = -\frac{n_1}{|J|} \left(n_1 \frac{\partial x_{1,\xi}}{\partial b_i} + n_2 \frac{\partial x_{2,\xi}}{\partial b_i} \right) \quad (16)$$

さらに式(14)を微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial b_i \partial b_j} = & \frac{\rho}{2} \sum_e \int_{-1}^1 \left[\left\{ \frac{\partial^2 x_{\alpha}}{\partial b_i \partial b_j} n_{\alpha} + \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial b_i} \frac{\partial n_{\alpha}}{\partial b_j} + \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial b_j} \frac{\partial n_{\alpha}}{\partial b_i} + (x_{\alpha} - x_{\alpha}^0) \frac{\partial^2 n_{\alpha}}{\partial b_i \partial b_j} \right\} |J| \right. \\ & \left. + \left\{ \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial b_i} n_{\alpha} + (x_{\alpha} - x_{\alpha}^0) \frac{\partial n_{\alpha}}{\partial b_i} \right\} \frac{\partial |J|}{\partial b_j} + \left\{ \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial b_j} n_{\alpha} + (x_{\alpha} - x_{\alpha}^0) \frac{\partial n_{\alpha}}{\partial b_j} \right\} \frac{\partial |J|}{\partial b_i} + (x_{\alpha} - x_{\alpha}^0) n_{\alpha} \frac{\partial^2 |J|}{\partial b_i \partial b_j} \right] d\xi \end{aligned} \quad (17)$$

(2) 変位感度 境界 Γ 上の要素 e の節点変位、表面力を $u_{\alpha I}^*, p_{\alpha I}^*$ 、要素上の点を x_{α} 、ソース点を y_{α} とすると、離散化した境界積分方程式は滑らかな境界上のソース点について次のように表される。

$$\frac{1}{2} u_{\kappa}(y) + \sum_e \int_{-1}^1 p_{\kappa \alpha}^* N_I u_{\alpha I}^* |J| d\xi = \sum_e \int_{-1}^1 u_{\kappa \alpha}^* N_I p_{\alpha I}^* |J| d\xi \quad (\kappa=1,2) \quad (18)$$

ここに $u_{\kappa \alpha}^*, p_{\kappa \alpha}^*$ はKelvinの基本解であり、せん断弾性係数、ポアソン比を μ, ν とすると平面ひずみ状態に対して

$$u_{\kappa\alpha}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)\mu} \{ (3-4\nu)\delta_{\kappa\alpha}\ln\frac{1}{r} + r_{,\kappa}r_{,\alpha} \} \quad (19)$$

$$p_{\kappa\alpha}^* = \sigma_{\alpha\beta}^{\kappa} n_{\beta} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{ (1-2\nu)\delta_{\kappa\alpha} + 2r_{,\kappa}r_{,\alpha} \} r_{,\alpha} + (1-2\nu)(r_{,\alpha}n_{\kappa} - r_{,\kappa}n_{\alpha}) \quad (20)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{\kappa} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{ (1-2\nu)(\delta_{\kappa\alpha}r_{,\beta} + \delta_{\kappa\beta}r_{,\alpha} - \delta_{\alpha\beta}r_{,\kappa}) + 2r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\kappa} \} \quad (21)$$

ただし、 $\delta_{\alpha\beta}$ をクロネッカーのデルタとし、また

$$r^2 = (x_{\alpha} - y_{\alpha})(x_{\alpha} - y_{\alpha}) = N_I N_J (x_{\alpha I} - y_{\alpha I})(x_{\alpha J} - y_{\alpha J}), \quad r_{,\alpha} = (x_{\alpha} - y_{\alpha})/r, \quad r_{,\alpha} = r_{,\alpha} n_{\alpha}$$

式(18)を設計変数 b_i で微分すると、直接微分法による変位感度 $\dot{u}_{\alpha I}^* = \partial u_{\alpha I}^* / \partial b_i$ 、 $\dot{p}_{\alpha I}^* = \partial p_{\alpha I}^* / \partial b_i$ を求めるための次の連立方程式を得る^{(10),(11)}。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\dot{u}_{\kappa}(y) + \sum_e \int_{-1}^1 p_{\kappa\alpha}^* N_I \dot{u}_{\alpha I}^* |J| d\xi + \sum_e \int_{-1}^1 (\dot{p}_{\kappa\alpha}^* |J| + p_{\kappa\alpha}^* \dot{J}) N_I u_{\alpha I}^* d\xi \\ = \sum_e \int_{-1}^1 u_{\kappa\alpha}^* N_I \dot{p}_{\alpha I}^* |J| d\xi + \sum_e \int_{-1}^1 (\dot{u}_{\kappa\alpha}^* |J| + u_{\kappa\alpha}^* \dot{J}) N_I p_{\alpha I}^* d\xi \quad (\kappa=1,2) \end{aligned} \quad (22)$$

ここに

$$\dot{u}_{\kappa\alpha}^* = u_{\kappa\alpha,\beta}^* \left(\frac{\partial x_{\beta}}{\partial b_i} - \frac{\partial y_{\beta}}{\partial b_i} \right) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)\mu} \{ -(3-4\nu)\delta_{\kappa\alpha} \frac{r_{,\beta}}{r} + r_{,\kappa\beta} r_{,\alpha} + r_{,\kappa} r_{,\alpha\beta} \} \left(\frac{\partial x_{\beta}}{\partial b_i} - \frac{\partial y_{\beta}}{\partial b_i} \right) \quad (23)$$

$$\dot{p}_{\kappa\alpha}^* = \sigma_{\alpha\beta,\gamma}^{\kappa} \left(\frac{\partial x_{\beta}}{\partial b_i} - \frac{\partial y_{\beta}}{\partial b_i} \right) n_{\beta} + \sigma_{\alpha\beta}^{\kappa} \dot{n}_{\beta} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta,\gamma}^{\kappa} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \{ (1-2\nu) \{ \delta_{\kappa\alpha}(\delta_{\beta\gamma} 2r_{,\beta} r_{,\gamma} + \delta_{\kappa\beta}(\delta_{\alpha\gamma} 2r_{,\alpha} r_{,\gamma} - \delta_{\alpha\gamma}(\delta_{\kappa\gamma} 2r_{,\kappa} r_{,\gamma})) \\ + 2(\delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta} r_{,\kappa} + \delta_{\beta\gamma} r_{,\alpha} r_{,\kappa} + \delta_{\kappa\gamma} r_{,\alpha} r_{,\beta} - 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\kappa} r_{,\gamma}) \} \} \end{aligned} \quad (25)$$

式(22)のソース点 y を境界上の節点にとり、それらをまとめて行列表示すると

$$[H][\dot{U}] + [\dot{H}][U] = [G][\dot{P}] + [\dot{G}][P] \quad (26)$$

境界上の全節点数を NP とすると

$$[U]^T = (u_{11}, u_{21}, u_{12}, u_{22}, \dots, u_{1NP}, u_{2NP}),$$

$$[P]^T = (p_{11}, p_{21}, p_{12}, p_{22}, \dots, p_{1NP}, p_{2NP})$$

とし、 $[\dot{U}]$ 、 $[\dot{P}]$ はそれぞれの感度ベクトルとする。また各行列 $[H]$ 、 $[\dot{H}]$ 、 $[G]$ 、 $[\dot{G}]$ の成分は式(22)の左辺第1,2項(まとめて表した)、第3項、右辺第1項、第2項の積分項にそれぞれ対応する。したがって式(18)をLU分解法などによって一旦三角分解しておけば、式(26)の両辺の第2項の定数項を計算し、代入過程のみを実施することによって変位、表面力感度を求めることができる。なお、式(22)左辺第3項はソース点 y と積分点 x が一致するとき $1/r$ の特異性を有するが、式(18)の特異項の評価と同様剛体変位条件 $[\dot{H}][U_0] = 0$ (U_0 を剛体変位とする)より間接的に求めることができる。以上が直接微分法による変位感度の計算方法であるが、具体的な計算手順を図2に

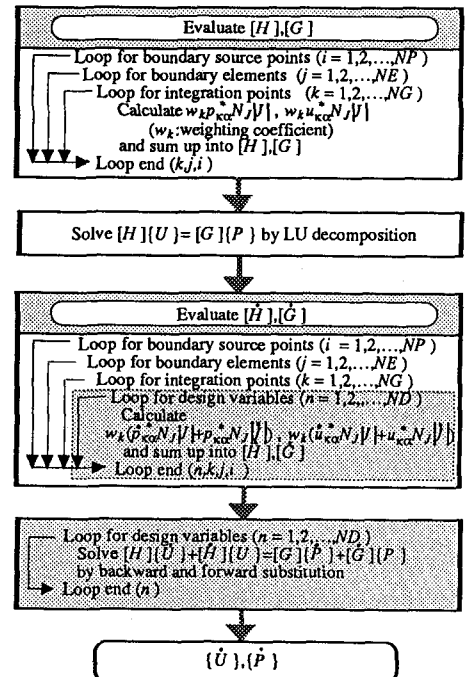


図2 変位感度解析アルゴリズム

示す。特に $[H]$, $[G]$ 評価のための設計変数による繰返し部分を数値積分ループ内に入れることにより、かなりの同一計算を避けることができ、効率的なアルゴリズムの作成が可能となる。

一方、半解析解法では式(26)の $[H]$, $[G]$ を厳密に計算することをやめ、次式の差分によって求める。

$$[\dot{H}] = \frac{[H(b_i + \Delta b_i)] - [H(b_i)]}{\Delta b_i}, \quad [\dot{G}] = \frac{[G(b_i + \Delta b_i)] - [G(b_i)]}{\Delta b_i} \quad (27)$$

ここに Δb_i は設計変数の摂動を表し、通常 $\Delta b_i / b_i < 0.01 \sim 0.001$ 程度にとる。半解析解法は通常の弾性解析プログラムに若干の修正を加えるだけで感度解析を実施できる点で有利と言える。

(3) 応力感度 次に境界上の点における応力感度解析法について示す。節点変位が求まるとまず次式を解いて変位勾配を求める。

$$\begin{bmatrix} (\mu + \lambda)n_2^2 \mu n_1^2 - a n_2^2 \\ \mu n_2^2 - a n_1^2 (\mu + \lambda) n_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_2 n_2 - \mu(u_s n_2 - u_t n_1) \\ p_1 n_1 - \mu(u_s n_2 - u_t n_1) \end{Bmatrix}, \quad u_{1,2} + u_{2,1} = \frac{u_s}{n_1} - \frac{u_t}{n_2} + \frac{n_2}{n_1} u_{1,1} + \frac{n_1}{n_2} u_{2,2} \quad (28)$$

ただし、 $\lambda = 2\mu\nu / (1 - 2\nu)$, $a = -(2\mu + \lambda)$, また u_s, u_t は境界接線方向の変位勾配を表し、 $u_s = N_{I,\xi} u_{1I} / |J|$, $u_t = N_{I,\xi} u_{2I} / |J|$ 。このとき座標応力成分 $\sigma_{\alpha\beta}$ は次式で定まる。

$$\sigma_{11} = -a u_{1,1} + \lambda u_{2,2}, \quad \sigma_{22} = \lambda u_{1,1} - a u_{2,2}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu(u_{1,2} + u_{2,1}) \quad (29)$$

したがって、境界上の点の応力感度はまず式(28)を直接設計変数 b_i で微分した次式を解いて変位勾配の設計感度を求める。

$$\begin{bmatrix} (\mu + \lambda)n_2^2 \mu n_1^2 - a n_2^2 \\ \mu n_2^2 - a n_1^2 (\mu + \lambda) n_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_{1,1} \\ \dot{u}_{2,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_2 \dot{n}_2 - \mu(u_s \dot{n}_2 - u_t \dot{n}_1 + \dot{u}_s n_2 - \dot{u}_t n_1) \\ p_1 \dot{n}_1 - \mu(u_s \dot{n}_2 - u_t \dot{n}_1 + \dot{u}_s n_2 - \dot{u}_t n_1) \end{Bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} (\mu + \lambda)n_2 \dot{n}_2 & \mu n_1 \dot{n}_1 - a n_2 \dot{n}_2 \\ \mu n_2 \dot{n}_2 - a n_1 \dot{n}_1 & (\mu + \lambda)n_1 \dot{n}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

ここに

$$\dot{u}_s = (N_{I,\xi} \dot{u}_{1I} - u_s |J|) / |J|, \quad \dot{u}_t = (N_{I,\xi} \dot{u}_{2I} - u_t |J|) / |J|$$

このとき応力感度は式(29)を直接微分した次式より求まる。

$$\dot{\sigma}_{11} = -a \dot{u}_{1,1} + \lambda \dot{u}_{2,2}, \quad \dot{\sigma}_{22} = \lambda \dot{u}_{1,1} - a \dot{u}_{2,2}, \quad \dot{\sigma}_{12} = \dot{\sigma}_{21} = \mu(\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1}) \quad (31)$$

2.3 設計変数縮約法 形状最適化の効率を上げる方策の一つとして設計変数の数を可能な限り削減することが重要である。形状の任意性を失う個となく、独立な設計変数の数を減少させ、滑らかな最終形状を得る具体的な縮約法として、ここでは一般的な境界形状を取扱うためのアイソパラメトリック補間法と、空孔形状などを扱う上でさらに縮約した表現が可能な三角級数補間法を紹介する¹²⁾。

アイソパラメトリック補間法では、設計境界をいくつかの設計区間に分割し、各区分ごとの境界形状を境界上の少数の代表点(形状制御節点)の形状ベクトルを用いたアイソパラメトリック補間によって表す。図1に示すように各設計区間内には補間によって解析に必要な境界節点が生成され、境界要素が構成される。このとき形状制御節点位置を表す、任意原点 b_0 からの形状ベクトルの大きさ b_i を設計変数にとる。設計区間内にとった正規座標を ζ ($-1 \leq \zeta \leq 1$)、形状制御節点の形状ベクトルを b_j ($j = 1, 2, \dots, M$)。ただし補間次数を $M-1$ の x_α 成分を $x_{j\alpha}$ 、原点を $x_{0\alpha}$ とすると、生成される任意節点 k の座標は次式で与えられる。

$$x_\alpha^k = x_{0\alpha} + N_j(\zeta_k) x_{j\alpha} \quad (32)$$

ここに ζ_k は節点 k の ζ 座標値、 N_j は $M-1$ 次の内挿関数とする。2次あるいは3次の内挿関数を採用することにより複雑な任意形状を表現することが可能である。

一方、三角級数補間法では設計境界の形状を一つの三角級数あるいは複数個の三角級数の接続によ

って近似する。このとき各級数項の係数を A_{an}, B_{am} として任意節点 k の座標を次式で表す。

$$x_k^k = \sum_n A_{an} \cos(n\theta_k) + \sum_m B_{am} \sin(m\theta_k) \quad (33)$$

そしてこれら各係数を直接設計変数にとる。 θ_k は基準となる座標軸からの角度パラメータで、各生成節点ごとにあらかじめ与える定数とする。各級数項は $n=0$ あるいは $m=1$ から1～2項をとるだけでも種々の形状を表現することができ、孔形状などを少ない設計変数で表すのに適している。

2.4 適応要素分割法 形状最適化の過程において形状変化に伴って設計境界の要素分割が不適切なものとなり、そのために解析精度が低下して最終的に求まった形状がゆがんだり、制約条件を正確に満足しなかったりすることが多い。そのような事態を避けるには形状変化の過程において適宜適応要素分割を実施することが望ましい。ここでは適応要素分割による計算コストの増大を極力抑さえるため、次の方法を採用した。まず各設計区間ごとに生成する節点数を境界形状の曲率、応力集中を加味してあらかじめ与え、等間隔に配置した分割モデルの解析を実施して境界応力分布を求める。その結果を用いて要素ごとの応力勾配 $\nabla\sigma_j$ を次式から求める。

$$\nabla\sigma_j = \frac{\Delta\sigma_j}{|\zeta_{k+2} - \zeta_k|} \quad (34)$$

ここに $\Delta\sigma_j$ を節点間の応力落差、 ζ_k を区間内節点の正規座標値とする。上式の応力落差を基に要素の分割間隔 $\Delta\zeta_k$ を次式で定め、節点位置を再配置する。

$$\Delta\zeta_k = \frac{1-\beta}{L} + \frac{\beta\Delta\sigma_{\text{mean}}}{\nabla\sigma_j}, \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad (35)$$

ここに β は不連続性緩和のための重み係数、 $\Delta\sigma_{\text{mean}}$ は区間内の平均応力落差、 L は設計区間ごとに生成する要素数とする。

3. 最適設計例

前章に述べた定式化に従って近似法に基づく形状最適化プログラムを作成し、応力制約下の最小重量設計問題に適用した結果を以下に示す。用いた境界要素は3節点二次のアイソパラメトリック要素で、平面ひずみ状態を仮定してヤング率 $E=205.8\text{GPa}$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ を用いた。

3.1 二軸引張下の正方形板中の楕円孔の設計感度と最小重量形状 図3に示すように長短軸半径が a_1, a_2 の楕円孔($x_1=a_1\cos\theta, x_2=a_2\sin\theta$)を有する一辺 $2W$ の正方形板が x_1, x_2 軸方向に $\sigma_0, 2\sigma_0$ の一樣引張応力を負荷される場合を対象に、 a_1, a_2 を設計変数として楕円孔縁の応力感度を求めた。モデルの対称性から1/4領域の外部境界を16要素、33節点に、楕円孔縁を10要素、21節点に分割した。 $a_1/W=1/10, a_1/a_2=1, 2, 4$ の場合についての直接微分法、

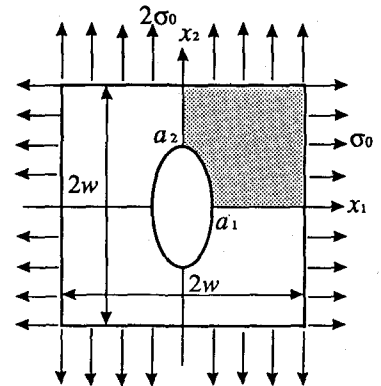


図3 楕円孔を有する正方形板

表1 二軸引張下の平板中の楕円孔応力感度 ($\Delta a_1/a_1 = \Delta a_2/a_2 = 0.01$)

a_1/a_2		1.0	2.0	4.0
Stress	BEM	5.104	9.169	17.28
	Theory*	5.000	9.000	17.00
Stress	BEM	0.9496	-0.0548	-0.5478
	Theory*	1.0000	0.0000	-0.5000
Sensitivity	BEM	4.294	6.341	10.49
	SAM	4.222	6.223	10.29
	Theory*	4.000	6.000	10.00
Sensitivity	BEM	-2.148	-0.8263	-0.3674
	SAM	-2.150	-0.8214	-0.3610
	Theory*	-2.000	-0.7500	-0.3125
Sensitivity	BEM	-4.084	-12.17	-40.55
	SAM	-3.983	-11.91	-39.73
	Theory*	-4.000	-12.00	-40.00
Sensitivity	BEM	2.044	1.486	1.228
	SAM	2.027	1.475	1.223
	Theory*	2.000	1.500	1.250

*: Theoretical values for infinite plate with an elliptic hole.
BEM: Implicit differentiation method.
SAM: Semi-analytical method.

半解析解法による応力感度を表1に示す。同表中の $\theta=0^\circ$ および $\theta=90^\circ$ は x_1, x_2 軸上の値であることを指す。また $R = (a_1 + a_2)/2$ とする。同表には二軸引張応力場下の無限板中の楕円孔の理論応力値、応力感度を参考として示す。変位感度計算時間は直接微分法で2613 ms, 半解析解法で3144 ms (FACOM M760-20)であり、直接微分法の方が明らかに有利であった。

次に直接微分法による感度解析を利用して図3のモデルについて応力制約条件下で、最小重量設計を行った結果を示す。具体的な制約条件としてミーゼスの相当応力 σ_e の許容値を $\sigma_a = 4\sigma_0$ とし、 $\theta=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ の点で応力制約を課した。すなわち、

$$\begin{aligned} g_1 &= \sigma_{e\theta=90^\circ}/\sigma_a - 1, \quad g_2 = \sigma_{e\theta=45^\circ}/\sigma_a - 1, \\ g_3 &= \sigma_{e\theta=0^\circ}/\sigma_a - 1 \end{aligned} \quad (36)$$

$a_1/W = a_2/W = 0.2$ を初期形状とし、最適化のための具体的な解法として逐次二次計画法を用いたところ5回の繰返しで収束した。図4に目的関数、制約条件の繰返しによる変化過程を示す。また表2にはその具体的な数値をそれぞれ示す。さらに図5には孔縁の相当応力分布を比較して示す。最適形状では制約を課さなかった $\theta=45^\circ, 90^\circ$ の中間で若干制約値を超えているもののほぼ妥当な結果が得られたと判断できる。

3.2 二軸負荷応力場下の矩形板中の円孔周りの付加孔形状 設計モデルは図6に示すように、長方形板($a=200$ mm, $b=300$ mm)の中央に存在する直径 $d=100$ mmの円孔周りの応力集中を緩和するため、円孔の上下に任意形状の付加孔を設ける場合を考える。中央の円孔形状を不変として、付加

孔の形状を変化させて応力制約下の最小重量設計を、二軸の負荷条件 $\sigma_{11}=\sigma_0, \sigma_{22}=2\sigma_0$ で行なった。設計変数縮約法として三角級数補間とアイソパラメトリック補間の両補間法について設計を試みた。モデルの対称性から付加孔の1/4部分を、三角級数補間法では次式で近似した。

$$x_1^k = A_{11}\cos\theta_k - B_{12}\sin 2\theta_k, \quad x_2^k = A_{20} + B_{21}\sin\theta_k \quad (-\pi/2 \leq \theta_k \leq \pi/2) \quad (37)$$

初期形状を $A_{11}=0.15a, B_{12}=0.0005a, A_{20}=0.5a, B_{21}=0.15a$ とし、これらの係数を直接設計変数にとった。1/4部分の境界を総節点数78, 総要素数37, 付加孔部分を節点数37, 要素数18に分割した。

表2 設計変数, 目的関数, 制約関数値の比較

	Initial	Optimal
a_1/W	0.2000	0.3480
a_2/W	0.2000	0.6652
f/W^2	0.9382	0.6694
g_1	-0.8050	1.802×10^{-5}
g_2	-0.2204	-4.902×10^{-6}
g_3	0.3575	-0.1185

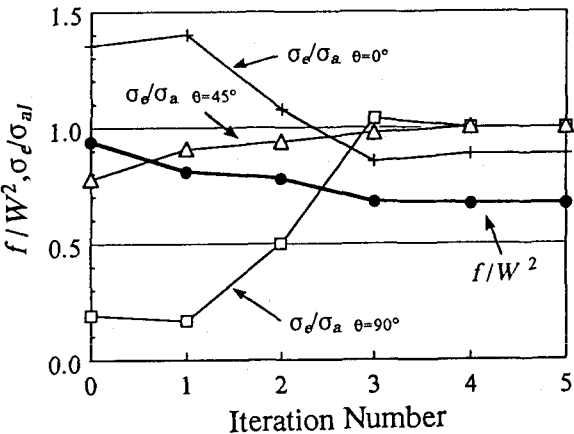


図4 目的関数, 境界応力値の変化

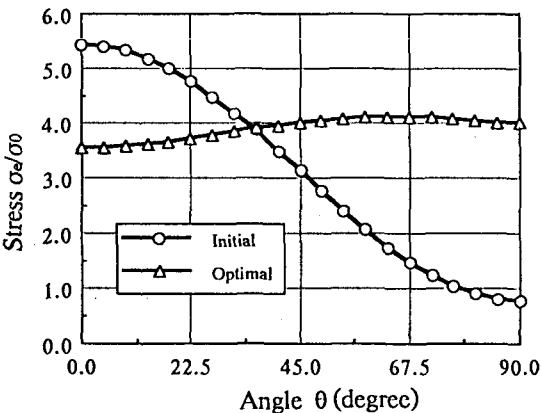


図5 境界応力分布の比較

一方、アイソパラメトリック補間法では設計境界である付加孔境界を設計区間4に分割し、各区間の形状を2次の内挿関数を用いて表し、各区間に13の節点を配して $\beta=0.5$ として適応分割を実施した。設計変数として付加孔中心を原点とする形状制御節点の形状ベクトル9個、 y 軸上の付加孔位置を表すパラメータの計10設計変数とし、総節点数90、総要素数43に分割して最適化した。

応力制約条件として付加孔縁で8箇所、中央の円孔縁で3箇所のミーゼスの相当応力 σ_e の上限を $\sigma_e=4.25\sigma_0$ に制限し、次式で制約条件を与えた。

$$g_j = \sigma_{ej}/\sigma_0 - 4.25 \leq 0 \quad (j=1, \dots, 11) \quad (38)$$

解析の結果、境界要素解析回数は三角級数補間法で7回、アイソパラメトリック補間法で27回で最適解に収束した。付加孔の初期形状と各補間法による最適形状を比較して図7に示す。最適形状は円孔から最遠点側の y 軸上で尖った洋梨型の形状となった。また初期形状、最適形状の付加孔縁、円孔縁におけるミーゼス相当応力分布をそれぞれ図8、9に示す。いずれの補間法による場合も境界上で応力制約を満足しているが、アイソパラメトリック補間法では設計区間のつなぎ目で曲率が不連続となることに起因して応力分布にも若干の不連続が見られる。

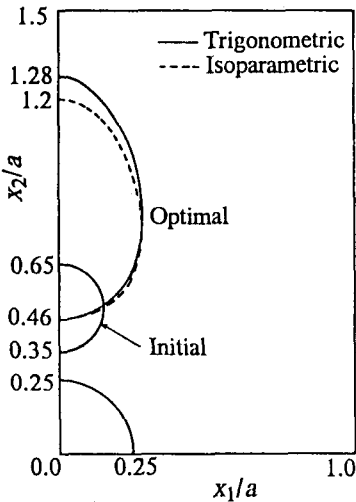


図7 初期形状と最終形状

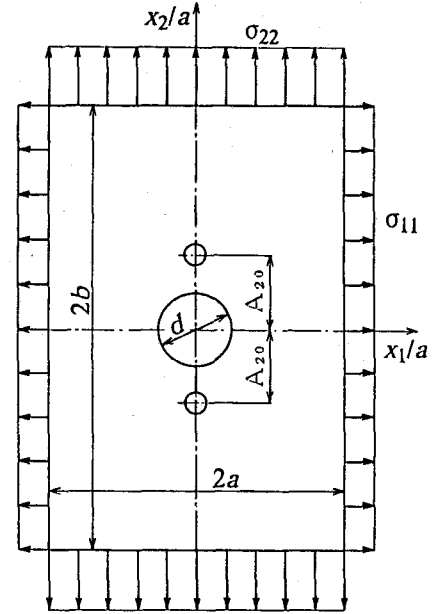


図6 二軸負荷応力場の円孔周りの付加孔モデル

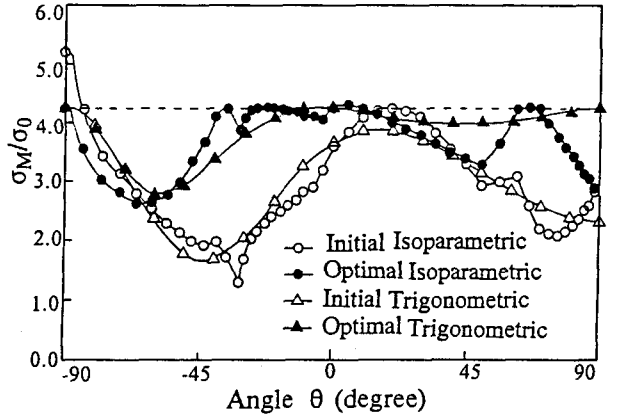


図8 付加孔縁のミーゼス相当応力分布

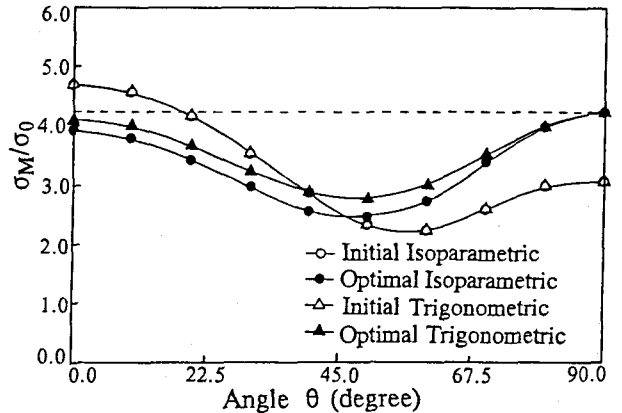


図9 円孔縁のミーゼス相当応力分布

4. 結 言

本報告では二次元形状最適化問題を対象に、境界要素法による効率的な設計感度解析法および近似形状最適化法を提示した。具体的にはアイソパラメトリック補間と三角級数補間により設計変数を縮約し、目的関数を設計変数の二次式に、制約条件を線形に近似し、移動制約のもとに非線形計画法で逐次解く解法を示し、いくつかの応力制約下の最小重量設計例に適用した結果も示した。その結果、近似問題の構成により設計変数の幅広い範囲で数値計画の探索が可能となること、また補間法によって設計変数の縮約を図ることにより最終的な最適形状を得るまでの構造解析回数を削減できることが確認された。

文 献

- 1) Mota Soares, C. A., Rodrigues, H. C. and Choi, K. K., *Trans. ASME, J. Mech. Transmissions and Automation in Design*, Vol.106, No.4, pp.518-523, 1984.
- 2) Botkin, M. E., Yang, R. J. and Bennett, J. A., *The Optimum Shape* (Bennett, J. A. and Botkin, M. E. ed.), Prentice Hall, pp.235-257, 1986.
- 3) Kikuchi, N., Chung, K. Y., Torigaki, T. and Taylor, J. E., *The Optimum Shape* (Bennett, J. A. and Botkin, M. E. ed.), Prentice Hall, pp.139-166, 1986.
- 4) Sandgren, E. and Wo, S. J., *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.26, No.9, pp.1913-1924, 1988.
- 5) 畔上, 機械学会論文集, 54巻, 508号, A編, pp.2167-2175, 1988.
- 6) Kodiyalparambath, S. and Vanderplaats, G. N., *AIAA Journal*, Vol.27, No.9, pp.1256-1263, 1989.
- 7) 中桐・鈴木, 機械学会論文集, 55巻, 509号, A編, pp.106-111, 1989.
- 8) 大河内・伊藤・相原, 機械学会論文集, 56巻, 525号, A編, pp.1304-1310, 1990.
- 9) Hajela, P. and Jih, J., *International Journal of Solids & Structures*, Vol.26, No.1, pp.29-41, 1990.
- 10) Barone, M. R. and Yang, R. J., *AIAA Journal*, Vol.26, No.5, pp.589-594, 1988.
- 11) 山崎・坂本, 機械学会論文集, 57巻, 540号, A編, pp.1910-1915, 1990.
- 12) 山崎・坂本・尾田・林, 機械学会論文集, 57巻, 542号, A編, 1990 (掲載予定).