(33) 満足化トレードオフ法による骨組構造の最適塑性設計

TWO-OBJECTIVE OPTIMAL DESIGN OF SKELETAL PLASTIC STRUCTURES BY SATISFICING TRADE-OFF METHOD

三原　徹治*
Tetsuji MIHARA

This paper presents a multiobjective programming approach for the optimal plastic design of skeletal structures. The method is first formulated by two-objective linear programming problem that entails the minimization of total structural weight and the maximization of applied proportional load as objective functions while satisfying the conditoins of equilibrium and yield as constraints. Then, using the satisficing trade-off method, the optimal design can be transformed into a ususal (one-objective) linear programming problem. Two frame structures are designed as numerical examples to illustrate the characteristics of the proposed method.

Key words:skeletal plastic structure, proportional loading, rigid-plastic theory, multiobjective optimization, satisficing trade-off method

1.　緒　言

従来の骨組構造物の最適塑性設計に関する研究では，適用荷重一定のもとで構造総重量を最小にする断面配分を求める，いわゆる最小重量設計[1]と，一定の構造総重量のもとで最大の荷重に抵抗できる断面配分を決定する最大荷重設計[2),3]とが，それぞれ別個に行われてきた．いずれの設計法においても，その設計基本式は，慣用の塑性解析理論の仮定下では単一目的の線形計画問題（ＬＰ）として定式化されるため，解を求めることは容易であり，解の保証性も高い．ただし，最小重量設計における「一定の適用荷重」や最大荷重設計における「一定の構造重量」をいかに与えるかに関する資料が少なく，最適塑性設計の適用拡大を制限するひとつの要因とされている．しかし，この問題点は，解法そのものに起因するものと考えることもできる．すなわち，一般の設計においては，「ある経済性（あるいは安全性）の範囲内で，安全性の最大化（あるいは経済性の最小化）を図る」設計より，むしろ「より安全で，かつ，より経済的な」設計が要求される場面の方が多いにも関わらず，従来の設計法では，本来「目的」である複数の評価指標からただひとつだけを残して他を「制約」に置換えざるを得ないため，設計者の意図を必ずしも反映することができないことに根本的な原因があると考えられる．

本研究は，このような単一目的問題では対応が困難な安全性と経済性を同時に目的として追求する設計手

* 工博 九州共立大学助教授　工学部土木工学科

法の開発を企図したものである．その手法は，まず，比例荷重を受ける骨組構造物の安全性の評価指標として崩壊荷重係数を，経済性の評価指標として構造総重量をそれぞれ選び，いずれをも目的とする多目的（この場合は２目的）最適塑性設計問題を定式化する．次に，得られた基本式に満足化トレードオフ法[4]を適用し，２目的の満足度の均一化を図る単一目的問題をＬＰとして導く．最後に，数値計算を行い，その結果より本法の特性について言及する．

２．　従来の手法と２目的最適塑性設計の基本式

(1)最小重量設計[1]

最小重量設計は，最適塑性設計の一般的な手法であり，与えられた設計荷重レベル以下で塑性崩壊を起こさないことを保証し，かつ構造重量の最小化を図る．その設計基本式は，塑性解析の静的定理に基づき以下のように与えられる．

既 知 数：$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{C}, \alpha_{o}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{x}^{L}, \boldsymbol{x}^{U}$　　未 知 数：$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}, \mathrm{W}, \alpha$

目的関数：$\mathrm{W}=\boldsymbol{a}^{T}\boldsymbol{x}\rightarrow \mathrm{min.}$ ---------- (1a)

制約条件：$\boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{Q}-\alpha\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{N}^{T}\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{R}^{T}\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{0},\quad \alpha\geqq\alpha_{o}$ ---------- (1b, c, d)

$\boldsymbol{x}^{L}\leqq\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{x}^{U}$ ---------- (1e, f)

ただし，$\boldsymbol{x}$:設計変数ベクトル，$\boldsymbol{Q}$:内力ベクトル，W:構造重量関数(= $\boldsymbol{a}^{T}\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{a}$:重量換算ベクトル)，$\alpha$:崩壊荷重係数，$\boldsymbol{C}$:適合マトリックス，$\alpha_{o}$:設計荷重係数，$\boldsymbol{F}$:基準となる外力ベクトル，$\boldsymbol{N}$:降伏面における単位法線マトリックス，$\boldsymbol{R}$:塑性容量の１次微係数マトリックス($\boldsymbol{R}^{T}\boldsymbol{x}$:塑性容量ベクトル)，$\boldsymbol{x}^{L}$:設計変数の下限値ベクトル，$\boldsymbol{x}^{U}$:設計変数の上限値ベクトル，T:転置を示す記号．なお，式(1b)は内力$\boldsymbol{Q}$と外力$\alpha\boldsymbol{F}$がつりあうという平衡条件を，式(1c)は内力$\boldsymbol{Q}$がその塑性容量$\boldsymbol{R}^{T}\boldsymbol{x}$を越えないという降伏条件を，式(1f)および式(1e)は設計変数$\boldsymbol{x}$の上・下限値制約を，それぞれ表している．

(2)最大荷重設計[2]

一方，ある構造重量以下の構造物のうち最大の荷重を受け持つことができる断面配分を求める最大荷重設計の基本式は，次のように与えられる．

既 知 数：$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{C}, \mathrm{W}_{o}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{x}^{L}, \boldsymbol{x}^{U}$　　未 知 数：$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}, \mathrm{W}, \alpha$

目的関数：$\alpha\rightarrow \mathrm{max.}$ ---------- (2a)

制約条件：$\boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{Q}-\alpha\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{N}^{T}\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{R}^{T}\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{0},\quad \mathrm{W}=\boldsymbol{a}^{T}\boldsymbol{x}\leqq\mathrm{W}_{o}$ ---------- (2b, c, d)

$\boldsymbol{x}^{L}\leqq\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{x}^{U}$ ---------- (2e, f)

ただし，W_{o}:構造重量の上限値．

(3) ２目的最適塑性設計基本式

上記式(1)，(2)はいずれも単一目的の線形計画問題であるため，問題設定がなされた場合にはそれらの解は通常のＬＰにより容易に求められる．しかし，式(1)におけるα_{o}や式(2)のW_{o}の値を与える根拠は一般に希薄であり，通常は「より安全で，かつ，より経済的な」設計が要求されることの方が一般的なように思われる．このような要求への対処は，式(1)，(2)に示すような単一目的問題では困難であるので，ここでは，安全性と経済性を同時に目的として追求する設計問題を，次のような２目的問題として定式化する．

既 知 数：$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{x}^{L}, \boldsymbol{x}^{U}$　　未 知 数：$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}, \mathrm{W}, \alpha$

目的関数：$\alpha\rightarrow \mathrm{max.}$ ---------- (3a)

$\mathrm{W}=\boldsymbol{a}^{T}\boldsymbol{x}\rightarrow \mathrm{min.}$ ---------- (3b)

制約条件：$\boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{Q}-\alpha\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{N}^{T}\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{R}^{T}\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{x}^{L}\leqq\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{x}^{U}$ ---------- (3c, d, e, f)

ここに，式(3)はすべて未知数の線形式で構成され，式(3c)～(3e)の制約条件を満たしながら安全性を追求する式(3a)および経済的な設計を図る式(3b)という２目的関数を有する２目的線形最適化問題を示している．式(3)では評価指標をすべて目的として取扱うため，式(1)におけるα_0や式(2)のW_0の値を直接必要としない．

３．　２目的最適塑性設計への満足化トレードオフ法の適用

多目的線形最適化問題を解法として種々の手法が提案されているが[5]，意志決定は人間の価値判断の問題であるという観点から，意志決定者に満足化を，計算機に最適化計算をそれぞれ担当させる対話型満足化手法のひとつとして満足化トレードオフ法[4]がある．この手法は，各目的に対して理想点および希求水準の値を設定して，各目的をその満足度に関する制約条件に変換し，各目的の満足度の均一化を図るという目的関数を新たに設定することにより，結果的に単一目的問題として解を求める方法であり，いかなる理想点および希求水準値に対してもあるPareto解（もはや他の目的を犠牲にすることなくある目的を改善することはできないという解）が得られ，しかも，得られたPareto解が意志決定者にとって不満な場合のトレードオフに関する情報も提供されるという利点を有する．よって，ここでは，式(3)に示す２目的最適塑性設計問題を，満足化トレードオフ法により以下のように展開する．

まず，ＳおよびＡをそれぞれ理想点および希求水準を示す添字とすれば，式(3)の各目的の満足度関数は次のように得られる．

$$Z_W=(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}-W_S)/(W_A-W_S)\ ,\quad Z_\alpha=(\alpha-\alpha_S)/(\alpha_A-\alpha_S) \qquad \text{(4a, b)}$$

次に，問題全体の満足度を示す新たな変数をＺとし，次のように定める．

$$Z=\max(Z_W,\ Z_\alpha) \qquad \text{(5)}$$

ここに，$Z_W \leqq Z$，$Z_\alpha \leqq Z$であるから，式(4a),(4b)からそれぞれ次のような関係が得られる．

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}-(W_A-W_S)\,Z\leqq W_S\ ,\quad \alpha-(\alpha_A-\alpha_S)\,Z\geqq\alpha_S \qquad \text{(6a, b)}$$

また，各目的の満足度関数の均一化を図ることは，式(5)に示すＺの最小化により実現される．結局，式(3)は式(5),(6)から次のような単一目的問題に変換される．

既知数：$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{x}^L, \boldsymbol{x}^U, W_S, W_A, \alpha_S, \alpha_A$　　未知数：$\boldsymbol{C}, \boldsymbol{Q}, W(=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}), \alpha, Z$

目的関数：$Z\rightarrow\min.$ 　(7a)

制約条件：$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{Q}-\alpha\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{N}^T\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{x}^L\leqq\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{x}^U$ 　(7b, c, d, e)

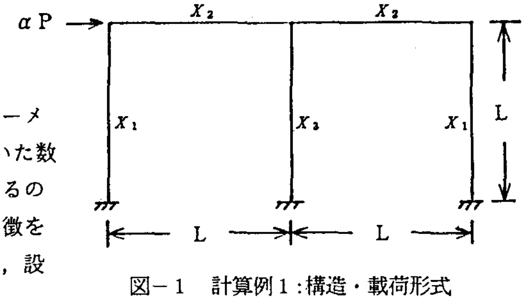
$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}-(W_A-W_S)\,Z\leqq W_S$ 　(7f)

$\alpha-(\alpha_A-\alpha_S)\,Z\geqq\alpha_S$ 　(7g)

ここに，式(7)は未知数$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{Q}$，α，Ｚに関するＬＰ問題であり，従来の手法の最大のメリットである線形性を本法でも失っていない．したがって，与えられた理想点および希求水準値に対するPareto解(設計点)を，従来どおりＬＰにより容易に求めることができ，得られた設計に不満がある場合のトレードオフもまた簡単に行うことができる．

４．　数値計算例

本法の特性を数値的に検討するため，１層２スパンラーメンおよび２層１スパンラーメンを対象として式(7)を用いた数値計算を行った．なお，対象構造では曲げが支配的であるので設計変数には全塑性モーメントを採用し，２目的の特徴を顕著にするため$\boldsymbol{x}^L=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{x}^U$には十分に大きな値を与え，設計変数の上下限値制約がinactiveになるよう配慮した．



図－１　計算例１:構造・載荷形式

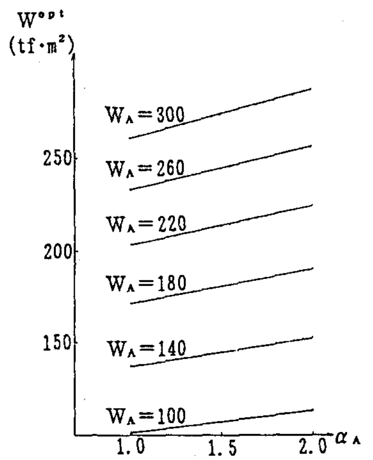
(1)計算例1：1層2スパンラーメン

満足化トレードオフ法を適用した式(7)を用いれば，与えられた理想点と希求水準に応じてPareto解のひとつを求めることができる．換言すれば，得られるPareto解に対する理想点と希求水準の設定値の影響を調べる必要がある．

図－1に示す水平荷重だけを受ける1層2スパンラーメン(P=5.0tf, L=4.0m)について，まず，希求水準値のPareto解に対する影響を調べるため，$W_s=0.0$，$\alpha_s=10.0$という理想点を設定した上で，$W_A=180$に固定し$\alpha_A=1.0$～2.0とした場合の設計結果を表－1に示す．表－1からα_Aを大きくすると崩壊荷重係数の解α^{opt}も大きくなり安全性の高い設計が得られることがわかる．安全性の向上に伴って経済性は犠牲となり設計変数および構造重量の解x_i^{opt}, W^{opt}も大きくなっている．この場合，$\alpha_A>1.5$では$\alpha_A>\alpha^{opt}$であり，安全性に関する要求が厳しいことがわかり，トレードオフのための有益な情報が提供されている．また，満足度関数Z_αおよびZ_W値はすべての場合において$Z_\alpha=Z_W$である．これは，いずれの場合も設計変数の上下限値制約がinactiveで，式(7f, g)に示す本来の目的を変換した制約がactiveであるため$Z_\alpha=Z$, $Z_W=Z$の関係が成立するからである．さらに，理想点を$W_s=0.0$，$\alpha_s=10.0$とし，W_Aをパラメータに選び$\alpha_A=1.0$～2.0と変化させたときのW^{opt}の変化を図－2に示す．図－2からW_Aを大きくすると経済性に関する要求が緩和されるためW^{opt}値も大きくなり，α_Aの値が等しい場合においてもより安全性の高い設計が得られることがわかる．また，W_Aを大きくするとα_Aの変化に対するW^{opt}の変化量も大きくなり，α_A値の設定が設計に敏感に影響することがわかる．なお，図－2ではα_A～W^{opt}関係が線形関係にあるように見えるが，厳密にはわずかに下に凸な曲線関係である．

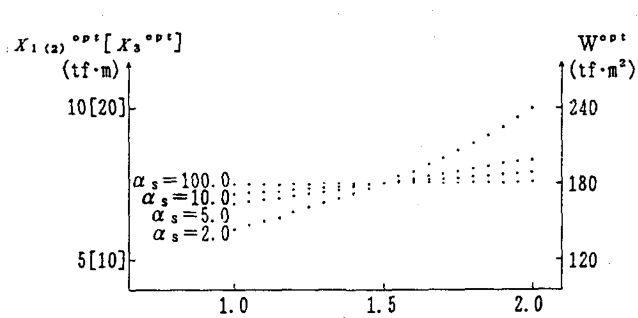
表－1　計算例1：α_A値の影響(W_S=0.0, α_S=10.0, W_A=180.0)

α_A	x_1^{opt} (tf·m)	x_2^{opt} (tf·m)	x_3^{opt} (tf·m)	α^{opt}	W^{opt} (tf·m²)	Z_W	Z_α
1.0	7.143	7.143	14.29	1.429	171.4	0.9524	0.9524
1.1	7.212	7.212	14.42	1.442	173.1	0.9615	0.9615
1.2	7.282	7.282	14.56	1.456	174.8	0.9709	0.9709
1.3	7.353	7.353	14.71	1.471	176.5	0.9804	0.9804
1.4	7.426	7.426	14.85	1.485	178.2	0.9901	0.9901
1.5	7.500	7.500	15.00	1.500	180.0	1.0000	1.0000
1.6	7.576	7.576	15.15	1.515	181.8	1.0101	1.0101
1.7	7.653	7.653	15.31	1.531	183.7	1.0204	1.0204
1.8	7.732	7.732	15.46	1.546	185.6	1.0309	1.0309
1.9	7.812	7.812	15.63	1.563	187.5	1.0417	1.0417
2.0	7.895	7.895	15.79	1.579	189.5	1.0526	1.0526



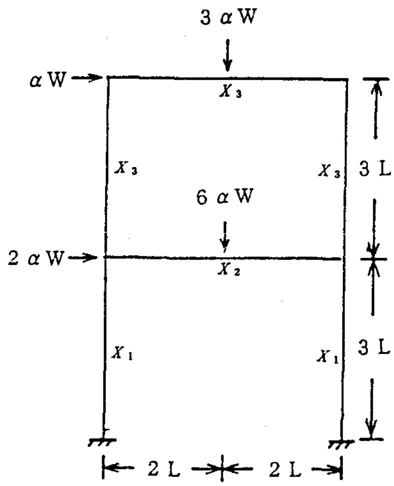
図－2　計算例1：α_A～W^{opt}関係
(W_s=0.0, α_s=10.0)

本法の場合，構造重量の理想点W_sとして最も理想的な場合を想定した$W_s=0.0$とすることに問題はないが，崩壊荷重係数の理想点α_s値をいくつに設定するかということは設計結果にも影響を及ぼすことが予想される．このため，$W_s=0.0$，$W_A=180$に固定し，α_sをパラメータとするα_A～x_i^{opt}, W^{opt}関係を図－3に示す．図－3から$\alpha_s=2.5$のときにはα_Aの変化に応じて設計値に比較的大きな変化が認められるが，$\alpha_s=10, 20$の場合には設計値はほぼ一定とみなせるような変化でしかないことがわかり，

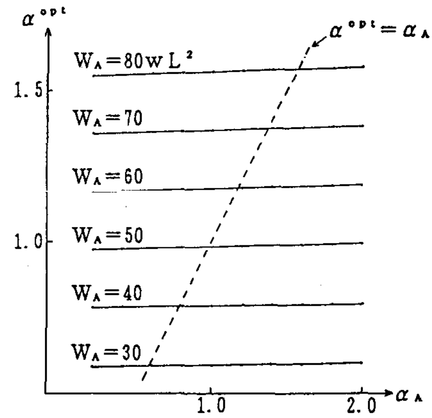


図－3　計算例1：α_A～x_i^{opt}, W^{opt}関係 (W_s=0.0, W_A=180)

α_s値の設計値に与える影響を小さくするためには十分に大きなα_s値を与えればよいことがわかる．



図－4　計算例2：構造・載荷形式



図－5　計算例2：α_A～α^{opt}関係（W_s=0.0, α_s=100.0）

(2)計算例2：2層1スパンラーメン

図－4に示すように複数の荷重を同時に受ける構造について本法により数値計算を行った．$W_s=0.0$，$\alpha_s=10.0$，$W_A=51.0wL^2$の場合のα_Aと得られたPareto解を表－2に示す．表から計算例1と同様の特性が認められ，より複雑な構造に対しても本法の適用が可能であることの予見が得られた．

表－2　計算例2：α_A値の影響(W_s=0.0, α_s=10.0, W_A=51.0WL²)

α_A	X_1^{opt} (WL)	X_2^{opt} (WL)	X_3^{opt} (WL)	α^{opt}	W^{opt} (WL²)	Z_w	Z_a
0.1	2.973	4.460	1.487	0.991	50.55	0.9911	0.9911
0.2	2.976	4.464	1.488	0.992	50.60	0.9921	0.9921
0.3	2.979	4.469	1.490	0.993	50.65	0.9930	0.9930
0.4	2.982	4.473	1.491	0.994	50.70	0.9940	0.9940
0.5	2.985	4.478	1.493	0.995	50.75	0.9950	0.9950
0.6	2.988	4.482	1.494	0.996	50.80	0.9960	0.9960
0.7	2.991	4.487	1.496	0.997	50.85	0.9970	0.9970
0.8	2.994	4.491	1.497	0.998	50.90	0.9980	0.9980
0.9	2.997	4.496	1.439	0.999	50.95	0.9990	0.9990
1.0	3.000	4.500	1.500	1.000	51.00	1.0000	1.0000
1.1	3.003	4.505	1.502	1.001	51.05	1.0010	1.0010
1.2	3.006	4.509	1.503	1.002	51.10	1.0020	1.0020
1.3	3.009	4.514	1.505	1.003	51.15	1.0030	1.0030
1.4	3.012	4.518	1.506	1.004	51.20	1.0040	1.0040
1.5	3.015	4.523	1.508	1.005	51.26	1.0050	1.0050
1.6	3.018	4.527	1.509	1.006	51.31	1.0060	1.0060
1.7	3.021	4.532	1.511	1.007	51.36	1.0070	1.0070
1.8	3.024	4.536	1.512	1.008	51.41	1.0081	1.0081
1.9	3.027	4.541	1.514	1.009	51.46	1.0091	1.0091
2.0	3.030	4.545	1.515	1.010	51.52	1.0101	1.0101

また，$W_s=0.0$，$\alpha_s=100.0$の場合のW_Aをパラメータとするα_A～α^{opt}関係を図－5に示す．図中の破線は$\alpha_A=\alpha^{opt}$を示し，この線より右側は安全性に関する要求が厳しいとされる領域を意味する．W_Aを小さくして経済性への要求を厳しくするとその領域は大きくなり，また，α^{opt}も全般に小さな値として得られていることから経済性への要求の緩和が安全性の向上に効果的であることがわかり，安全性と経済性を同時に追求する本法の有用性を認めることができる．

5．　結　言

本研究では，塑性骨組構造物の崩壊荷重最大化と構造重量最小化を同時に追求する多目的最適化問題を定式化し，満足化トレードオフ法による解法を示し，数値的にその特性を検討した．得られた成果を列挙すると以下のようである．

(1)安全性および経済性の評価指標として崩壊荷重係数と構造総重量を用いることにより比例荷重を受ける骨組構造の最適塑性設計問題を２目的線形計画問題として定式化することができた．

(2)上記２目的線形計画問題に満足化トレードオフ法を適用することにより単一目的線形計画問題へ変換することができ，通常のＬＰを用いてPareto解を求める手法を確立した．

(3)数値計算およびその結果から本法の特性が以下のように得られた．

①本法を用いれば，いかなる条件においてもPareto解のひとつを求めることができ，トレードオフのための有効な情報を得ることができる．

②計算に用いる理想点の値を$W_s=0.0$，α_sは十分大きな値とすれば，希求水準値の変更だけでトレードオフを行うことができる．

③安全性に対する要求を厳しくするよりも経済性への要求を緩和することが，安全性の向上に効果的であることを数値的に確認した．

(4)上記特性を分析することにより，逐一最適化問題を解かずにトレードオフを行う手法の開発も可能と思われる．

謝　辞

本研究を行うにあたり，甲南大学理学部応用数学科中山弘隆教授より満足化トレードオフ法に関して親身なご指導を受けた．また，数値計算には九州共立大学情報処理センターおよび同学工学部土木工学科学生宮良隼人君のご助力を得た．記して厚く謝意を表する．

参　考　文　献

1)石川信隆，大野友則:入門・塑性解析と設計法，pp.153～161，森北出版，1988.5.

2)三原徹治，最上幸夫:骨組構造物の塑性最大荷重設計法に関する二，三の考察，九州共立大学工学部研究報告第12号，pp.129～134，1988.3.

3)山田善一編:構造システムの最適化～理論と応用～，pp.49～53，土木学会，1988.9.

4)中山弘隆:多目的計画に対する満足化トレードオフ法の提案，計測自動制御学会論文集，第20巻第1号，pp.29～35，1984.1.

5)今野浩:線形計画法，pp.211～216，日科技連，1987.3.