

(32) 共振3波を受ける構造物の最適設計

OPTIMAL DESIGN OF STRUCTURES SUBJECTED TO 3 CYCLES OF RESONANT EXCITATION

菊田征勇* 松井邦人** 新延泰生***

Yukio KIKUTA, Kunihiro MATSUI, Yasuo NIINOBE

According to aseismic design for a circuit breaker system, the system is confirmed safe if it withstands during a duration of three periods of sinusoidal ground acceleration with resonant frequency. Under this concept, optimal design procedure has been developed and optimization algorithm is presented. By using a simple structure composed of 10 members with two lumped masses as an example problem, the algorithm is verified by finding the optimal areas of members with stress constraints.

Key Words : Structural Optimization, Dynamic Analysis, Mass
Excitation, Resonant Frequency

1. まえがき

発電された電気は変電所で昇圧し、需要地の変電所で降圧して配電網に送られて需要をまかなうが、昇圧して送電することにより、送電の効率化とロスが減少が計られている。また変電所は電力系統網の要でもあり、基幹変電所に故障がなければ、系統運用により需要地への送電は可能である。ところで地震動は、その震源から地表面に到達するまでに表層地盤の影響を受ける。変電所は様々な地盤上に建設されているので、各変電所毎に表層地盤の地震動の伝達機構を考慮して耐震設計を行う必要がある。しかし、変電所は全国に散在して種々の地盤に建設されるので、発生しそうな地震動を決定することも容易ではない。変電機器の1次の固有振動数は、地震動の振動数に近く、実際に起こった地震による機器の被害状況からも、1次モードの共振現象が発生して破損したと推測されている¹⁾。また変電機器の設計地震動波形として、共振正弦2～3波入力を採用すれば、ほとんどすべての地震動を網羅した条件を満たすことが分かっている。故に、変電設備の耐震設計は、基礎と地盤との相互作用効果などを考慮して、共振正弦3波入力が規定されている¹⁾。

本研究では、この共振正弦3波入力の考えを構造物の設計に取り入れ、共振正弦3波の質量加振を受けた構造物の最小質量設計のアルゴリズムを提案し、その有効性を示すものである。

* 工修 国士舘大学教授 工学部土木工学科

** Ph. D. 東京電機大学教授 理工学部建設工学科

*** 工博 東洋大学助教授 工学部土木工学科

2. 動的解析

動的外力の作用を受ける線形多自由度系の構造物の運動方程式は、マトリックス表示を用いて、次式で表わされる。

$$M(b)\ddot{z} + C(b)\dot{z} + K(b)z = Q(b)\sin\omega t \quad (1)$$

$$z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0 \quad (2)$$

ここに、 $M(b)$ 、 $C(b)$ および $K(b)$ は、それぞれ $n \times n$ の質量マトリックス、減衰マトリックスおよび剛性マトリックスである。列ベクトル $Q(b)$ は $n \times 1$ の外力ベクトルであり、 b は $m \times 1$ の設計変数ベクトルである。 z 、 $\dot{z}$ および $\ddot{z}$ は、それぞれ、構造物の変位、速度および加速度を表わす。また、 z_0 および $\dot{z}_0$ は初期変位および初期速度である。もしも C が M と K との線形結合で表されるならば、式 (1) の解はモーダルアナリシスにより、次式のように表される。

$$z = \sum_{i=1}^{N_p} Y_i p_i(t), \quad \dot{z} = \sum_{i=1}^{N_p} Y_i \dot{p}_i(t), \quad \ddot{z} = \sum_{i=1}^{N_p} Y_i \ddot{p}_i(t) \quad (3)$$

ここに、 Y_i ($i=1, \dots, n_p$) は固有方程式 $KY_i = \omega_i^2 MY_i$ の固有ベクトルであり、 Y_i に対応する固有値は ω_i^2 で表される。また、 $p_i(t)$ は基準座標であり、 N_p は考慮した振動モードの個数である。固有ベクトルの直交性から次のような関係がある。

$$Y_i^T M Y_i = m_i, \quad Y_i^T C Y_i = 2h_i \omega_i m_i, \quad Y_i^T K Y_i = \omega_i^2 m_i \quad (4)$$

2つの相異なるモード Y_i および Y_j ($i \neq j$) を含む積はすべて0である。また、 m_i 、 h_i および ω_i は、それぞれ i 次の基準振動の換算質量、モード減衰定数および固有円振動数である。したがって、式 (1) および式 (2) は、式 (5) および式 (6) に書き換えられる。

$$\ddot{p}_i + 2h_i \omega_i \dot{p}_i + \omega_{Di}^2 p_i = q_i(b) \sin\omega t \quad (i=1, \dots, n_p) \quad (5)$$

$$p_i(0) = p_{i0}, \quad \dot{p}_i(0) = \dot{p}_{i0} \quad (i=1, \dots, n_p) \quad (6)$$

ここに

$$q_i(b) = Y_i^T Q(b) / m_i, \quad p_{i0} = Y_i^T z_0 / Y_i^T Y_i, \quad \dot{p}_{i0} = Y_i^T \dot{z}_0 / Y_i^T Y_i \quad (7)$$

である。初期条件式 (6) を考慮した式 (5) の解は

$$\begin{aligned} p_i(t) = & A_i e^{-h_i \omega_i t} \sin \theta_i \cos \omega_{Di} t \\ & + A_i e^{-h_i \omega_i t} \left(\frac{h_i \omega_i}{\omega_{Di}} \sin \theta_i - \frac{\omega}{\omega_{Di}} \cos \theta_i \right) \sin \omega_{Di} t \\ & + A_i \sin(\omega t - \theta_i) \end{aligned} \quad (8)$$

と表される。ここに

$$\omega_{Di} = \omega_i \sqrt{1 - h_i^2} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \frac{q_i}{\sqrt{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + (2h_i \omega_i \omega)^2}} \\ \sin \theta_i &= \frac{2h_i \omega_i \omega}{\sqrt{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + (2h_i \omega_i \omega)^2}} \\ \cos \theta_i &= \frac{\omega_i^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + (2h_i \omega_i \omega)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

である。式 (8) を微分すれば

$$\dot{p}_i(t) = -A_i e^{-h_i \omega_i t} \omega \cos \theta_i \cos \omega_{Di} t$$

$$+ A_i e^{-h_i \omega_i t} \left(-\frac{\omega_i^2}{\omega_{D1}} \sin \theta_i + \frac{h_i \omega_i \omega}{\omega_{D1}} \cos \theta_i \right) \sin \omega_{D1} t \\ + A_i \omega \cos (\omega t - \theta_i) \quad (11)$$

となる。また、 $\ddot{p}_i$ は式 (5) から

$$\ddot{p}_i = q_i(b) \sin \omega t - 2h_i \omega_i \dot{p}_i - \omega_i^2 p_i \quad (12)$$

として求められる。一次モードで共振するときは $\omega = \omega_{D1}$ であるから、式 (8) ~ 式 (12) において $\omega = \omega_{D1}$ とすればよい。式 (8)、式 (11) および式 (14) を式 (3) に代入すれば、変位、速度および加速度が求められる。

ところで、一次の固有周期の3波分の時間を T_3 とすれば、 $t > T_3$ では自由振動となるので、運動方程式は、 z_{T3} および $\dot{z}_{T3}$ を自由振動の初期条件として、次式で表される。

$$M(b) \ddot{z} + C(b) \dot{z} + K(b) z = 0 \quad (13)$$

$$z(T_3) = z_{T3}, \quad \dot{z}(T_3) = \dot{z}_{T3} \quad (14)$$

ここで式 (3) を用いれば、式 (13) および式 (14) は

$$\ddot{p}_i + 2h_i \omega_i \dot{p}_i + \omega_i^2 p_i = 0 \quad (15)$$

$$p_i(T_3) = p_{iT3}, \quad \dot{p}_i(T_3) = \dot{p}_{iT3} \quad (16)$$

となるので、これを解けば

$$p_i(t) = e^{-h_i \omega_i (t-T_3)} p_{iT3} \cos \omega_{D1} (t-T_3) \\ + e^{-h_i \omega_i (t-T_3)} \frac{p_{iT3} h_i \omega_i + \dot{p}_{iT3}}{\omega_{D1}} \sin \omega_{D1} (t-T_3) \quad (17)$$

$$\dot{p}_i(t) = e^{-h_i \omega_i (t-T_3)} \dot{p}_{iT3} \cos \omega_{D1} (t-T_3) \\ + e^{-h_i \omega_i (t-T_3)} \frac{p_{iT3} \omega_i^2 + \dot{p}_{iT3} h_i \omega_i}{\omega_{D1}} \sin \omega_{D1} (t-T_3) \quad (18)$$

となる。また、 $\ddot{p}_i$ は式 (5) から

$$\ddot{p}_i = -2h_i \omega_i \dot{p}_i - \omega_i^2 p_i \quad (19)$$

となるので、式 (17) ~ 式 (19) を式 (3) に代入すれば、自由振動の変位、速度および加速度が求められる。

3. 動的感度解析

変位や部材力は、一般に b や z の関数として $\phi_j(b, z)$ ($j = 1, \dots, n_r$) と表わされる。ここに n_r は関係する応答の数である。 b および z がそれぞれ微小量 δb および δz だけ変化するとき、 ϕ_j は

$$\delta \phi_j = \frac{\partial \phi_j}{\partial b} \delta b + \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \delta z \quad (j = 1, \dots, n_r) \quad (20)$$

と表わされる。 δz を δb で表すために、式 (3) の第1式を用いると

$$\delta z = \sum_{i=1}^{n_v} \left\{ \frac{\partial Y_i}{\partial b} p_i(t) + Y_i \frac{\partial p_i(t)}{\partial b} \right\} \delta b \quad (21)$$

となる。この方法は、固有ベクトルの微係数が必要になるので好ましくない。

本研究では、固有値および固有ベクトルの設計変数 b に関する微係数を用いなくて、 δz と δb との関係式を直接的に求めた。一次モードで共振するときは $\omega = \omega_{D1}$ であるから、式 (1) から次式が得られる。

$$M(b)\delta\ddot{z} + C(b)\delta\dot{z} + K(b)\delta z = H(b, \omega_{D1}, t)\delta b \quad (22)$$

$$\delta z(0) = 0, \quad \delta\dot{z}(0) = 0 \quad (23)$$

ここに、

$$H(b, \omega_{D1}, t) = \frac{\partial Q(b)}{\partial b} \sin \omega_{D1} t + Q(b) \cos \omega_{D1} t \frac{\partial \omega_{D1}}{\partial b} z - \frac{\partial M}{\partial b} \ddot{z} - \frac{\partial C}{\partial b} \dot{z} - \frac{\partial K}{\partial b} z \quad (24)$$

である。式(23)は初期条件である。ところで、式(24)中の $(\partial M / \partial b) \ddot{z}$ および $(\partial C / \partial b) \dot{z}$ の項の有無は、感度解析の精度上ほとんど影響ない²⁾ので、感度解析には、式(24)からこれらの項を除いた次式を用いることにする。

$$H(b, \omega_{D1}, t) = \frac{\partial Q(b)}{\partial b} \sin \omega_{D1} t + Q(b) \cos \omega_{D1} t \frac{\partial \omega_{D1}}{\partial b} - \frac{\partial K}{\partial b} z \quad (25)$$

式(22)の左辺は式(1)の左辺とまったく同じ微分方程式なので、式(1)を解く場合と同様にして、式(22)の解は次式のように求められる³⁾。

$$\delta z = \sum_{i=1}^{np} Y_i S_i^T(t) \delta b, \quad \delta\dot{z} = \sum_{i=1}^{np} Y_i \dot{S}_i^T(t) \delta b, \quad \delta\ddot{z} = \sum_{i=1}^{np} Y_i \ddot{S}_i^T(t) \delta b \quad (26)$$

として式(22)に代入し、前から Y_i^T を乗じて固有ベクトルの直交性を用い、 δb が任意の値を取ることを考えると

$$\ddot{S}_i^T + 2h_i \omega_i \dot{S}_i^T + \omega_i^2 S_i^T = \frac{1}{m_i} Y_i^T H(b, \omega_{D1}, t) \quad (i = 1, \dots, n_p) \quad (27)$$

$$S_i^T(0) = 0, \quad \dot{S}_i^T(0) = 0 \quad (i = 1, \dots, n_p) \quad (28)$$

となる。式(28)は初期条件である。これを解くと次式となる。

$$S_i^T(t) = \frac{1}{m_i \omega_{D1}} \int_0^t Y_i^T H(b, \omega_{D1}, \tau) e^{-h_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{D1} (t-\tau) d\tau \quad (i = 1, \dots, n_p) \quad (29)$$

したがって、応答の感度は次式で求められる。

$$\delta\phi_j = \left[\frac{\partial \phi_j}{\partial b} + \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \left\{ \sum_{i=1}^{np} Y_i S_i^T(t) \right\} \right] \delta b \quad (j = 1, \dots, n_r) \quad (30)$$

また、自由振動となる $t > T$ では外力が作用しないので、式(24)あるいは式(25)中で、外力に関係する項を0とすればよい。

4. 計算例

共振正弦3波を受ける構造物の最適化の理論を検証するために、Fig. 1に示す10部材トラスの最小質量設計を行った。これは最上部に給水槽などの重量物を積載した構造物を対象としたものである。なお、最適化の手法としては、Rosenの傾斜斜影法(Gradient Projection Method)を用いている。

a) 材料定数

トラス構造物の構成材料は鋼材で、そのヤング係数は $E = 2.06 \text{ GPa}$ 、密度 $\rho = 7.85 \text{ t/m}^3$ である。減衰定数 h は各モードで一定とし、 $h = 0.30, 0.20, 0.10, 0.05, 0.02$ の5種を考えた。これは、減衰定数の違いにより最小質量がどのように変化するかを見るためである。

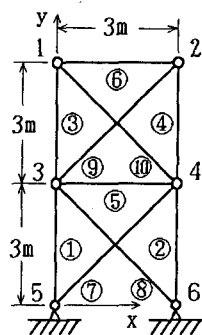


Fig. 1 10 Member Truss

b) 設計変数

設計変数 b_i は各部材の断面積であり、構造物の対称性、材料の規格化および設計変数の減少を考慮して、水平部材⑤および⑥を除いて各対称2部材を1グループとし、6グループに分けた。なお、断面積の下限および上限は各グループともそれぞれ 0.10 cm^2 および 1000.00 cm^2 とした。

c) 制約条件

制約条件としては、前述の部材断面寸法の制限以外には座屈応力も含めた応力制約だけを考慮し、変位制約は考えていない。許容圧縮応力度および許容引張応力度はともに 137.3 MPa であり、許容座屈応力度はオイラーの座屈応力度を安全率1.70 で除した値を用いている。このとき、オイラーの座屈応力を求める場合の断面2次モーメント I_i は、設計変数である部材断面積 b_i の関数として $I_i = \alpha b_i^2$ とおいたが、簡単のために $\alpha = 1.00$ とした。

d) 荷重条件

Fig. 2 に示すように、死荷重として節点1および節点2に重量物

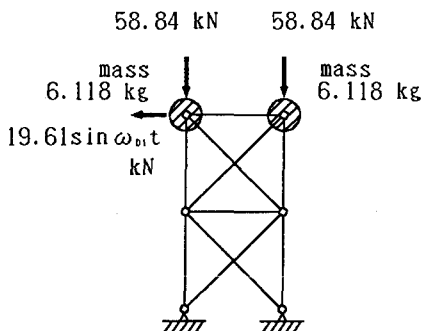
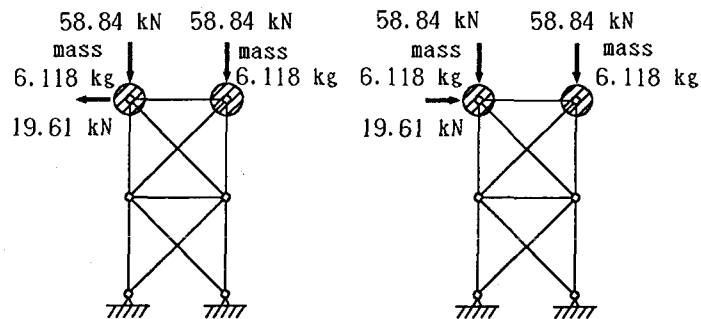


Fig. 2 Mass Excitation



(a) Loading condition a

(b) Loading condition b

Fig. 3 Static Loadings

として節点1および節点2に重量物

58.84 kN を載せている。これに相当する質量は6.118 kg である。さらに、質量加振として節点1に水平方向に $19.61 \sin \omega_{D1} t$ kN の力を作作用させた。応答の計算時間の間隔は0.001 秒であり、応答全体の計算時間は5周期分である。この質量加振と比較するために、 $19.61 \sin \omega_{D1} t$ kN の質量加振の代わりに、節点1に静的な荷重19.61 kN をx軸の負の向き (Fig. 3(a)) および正の向き (Fig. 3(b)) に別々に載荷し、この2種類の荷重状態を同時に満足する場合の最適解も求めた (この状態を静的荷重状態と称する)。

前記諸条件における計算結果を、Table 1 に示す。なお、最大変位は絶対値を示し、いずれも水平変位である。Table 1 から次のようなことが分かる。最適設計の結果得られたトラスの最小質量は、静的荷重状態よりも質量加振の方が大きくなっており、これは慣性力の影響によるものである。最適化されたトラス

Table 1 Optimal Design for 10 Member Truss

Design Group	Member Numbers	Static Loadings	Mass Excitation				
			h=0.30	h=0.20	h=0.10	h=0.05	h=0.02
b_1	1, 2	8.125 cm^2	9.099 cm^2	10.038 cm^2	13.727 cm^2	17.812 cm^2	21.616 cm^2
b_2	3, 4	7.149	7.589	8.000	8.894	9.750	10.627
b_3	5	0.336	0.250	0.154	0.100	0.100	0.100
b_4	6	2.204	2.200	2.253	2.223	2.026	2.983
b_5	7, 8	5.189	6.109	7.023	8.862	10.628	12.133
b_6	9, 10	5.431	6.369	7.356	9.486	11.265	12.701
Mass		148.67 kg	167.48 kg	186.41 kg	234.23 kg	280.65 kg	324.54 kg
Displacement(Node)		0.365 cm (1)	0.512 cm (1)	0.640 cm (1)	0.846 cm (2)	0.988 cm (2)	1.089 cm (2)
Natural Freq. (1st)		3.45 Hz	3.67 Hz	3.88 Hz	4.43 Hz	4.91 Hz	5.29 Hz

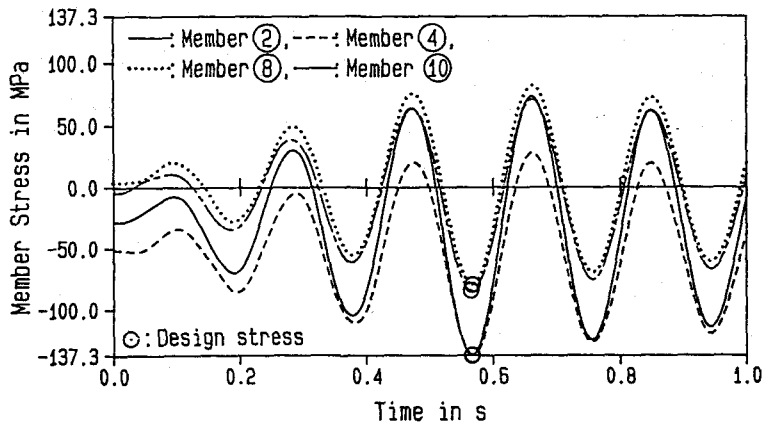


Fig. 4 Stress History ($h=0.02$)

の1次の固有振動数は、静的載荷状態よりも質量加振の場合の方が高い。減衰が小さくなるにつれて、1次の固有振動数は大きくなり、1層目の弦材と1および2層目の斜材の材料配分が増える。水平部材5は最小断面となってほとんど効いていない。Fig. 4 には、減衰定数 $h=0.02$ の場合で、応力制約いっぱいになっている4部材の応力の時刻歴を示す。いずれも0.566秒付近で設計応力に達している。この時間は固有周期 $1/5.29=0.189$ 秒の2.99倍である。他の減衰定数の場合でも、設計応力は3周期の終わりの少し手前で発生していることが多く、3周期を越えることはない。

5. まとめ

本研究は、送変電施設の耐震設計基準となっている共振正弦3波地震動入力のを考えを構造物の設計に取り入れて、共振正弦3波の質量加振を受ける構造物の最適化を行う手法を提案し、10部材トラスを対象とした最小質量設計を行い、理論の妥当性を示した。その結果から次の結論が下せる。

a) 固有ベクトルの設計変数に関する偏微分を求めることなく、解析に使用した固有値および固有ベクトルを用いて感度解析を行うことができ、しかも応答解析と感度解析が平行して行える。また、感度解析において、質量マトリックスおよび減衰マトリックスの設計変数に関する偏微分の項を無視しても、支障なく最適解が得られる。

b) 質量加振を受けるトラスの最小質量設計は、慣性力の影響を受け、最小質量は静的載荷状態よりも大きい。また減衰定数が小さくなるにつれて、最小質量は大きくなり、1次の固有振動数は大きくなる。1層目の弦材と1および2層目の斜材の材料配分が増える。

参考文献

- 1) 土木学会編：エネルギー施設，動的解析と耐震設計，第3巻，pp.143～147，1989.
- 2) 菊田征勇：動的感度解析における減衰マトリックスの影響について，第11回最適設計研究会，1991.
- 3) 菊田征勇・松井邦人・新延泰生：動的領域における構造物の感度解析，構造工学論文集，Vol.33A，pp.703～714，1987.