

(31) 凸曲面の三角形分割とドーム設計への応用

A Study on the Triangulations for Constructing Domes

大澤義明*

木島安史**

Yoshiaki Ohsawa

Yasufumi Kijima

This paper is concerned with triangulations on given points in the spherical surface. The first part is devoted to present the algorithm to construct the triangulations in the spherical surface. The triangulations coincides with the boundary of the convex hull of the given set of points. The second part exhibits its application to building domes. The triangulation that is given in this paper is an excellent choice for constructing domes as follows: The triangulation maximizes the volume of the interior defined by the triangles whose vertices are the given points; The triangulation makes no concave parts which are unsuitable for dealing with rain water to stop leaks; The triangulation maximizes the minimum angle with triangulations in the spherical surface.

Key Words: dome, design, space frame, triangulation, CAD

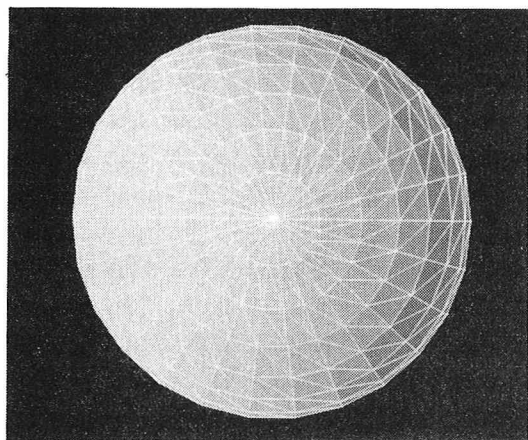
1. はじめに

最近、ドーム建築などのように表面を曲面で表現した建物が数多く設計されている（文献[2]，[3]，[4]参照）。これらの設計においては、建物の表面を曲面材で造ることが努力されてきたが、曲面材に比べ平面材の方が経済的に優れていることや構造的に安定するなどの理由から、平面材で表面を覆い近似的に曲面を表現することが多い。このような状況の中で、近年の建築施工では、部品の大量生産と組立方法の単純化による経済効果、工期の短縮化、安全性などの観点から、建築の部品をできるだけ工場生産し建築現場での仕事を単純な組み立て作業にする傾向が強くなった。特に、ドーム建築ではほぼ棒状の部材を立体的に組み合わせてできる骨組み、すなわち、スペース・フレームの利用が多くなった。スペース・フレームでは、部材をつなぐために一般にジョイントと呼ばれる接合金具が使用され、部材が面材を支持し、これら面材によってドーム表面を覆うことになる。ねじれ面が生じない点と三角形は平面の剛性を考えると非常に安定した形状である点で、面材として三角形材が使用されることが多い。特に、同一材で構築した方が費用が安いこと、各部分に加わる力が部材にスムーズに伝達され最終的には地盤に吸収され力の偏らない分散を追求していることなどの理由で、写真1～写真3のように部材を規則的に組み上げたスペース・フレームが頻繁に実施設計されてきた。写真1～写真3のスペース・フレームはそれぞれシェベドラー・ドーム、パラレル・ラメラドーム、6次のオルタネイト分割によるジョ

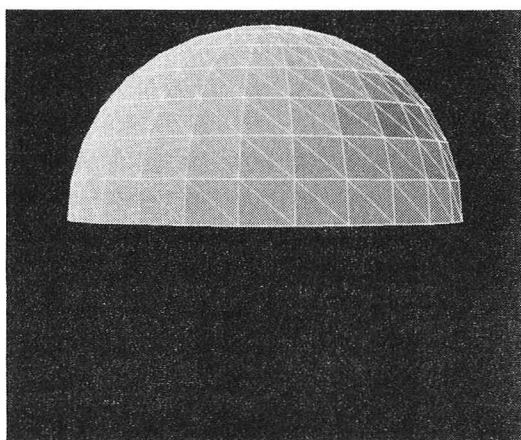
本研究は文献[1]の内容に加筆したものである。

* 学博 筑波大学講師 社会工学系

** 工博 千葉大学教授 工学部建築学科

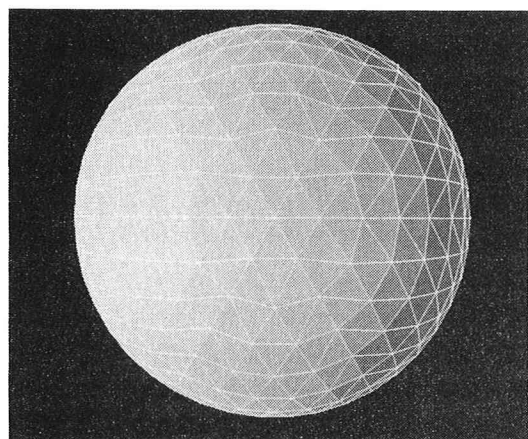


(a)

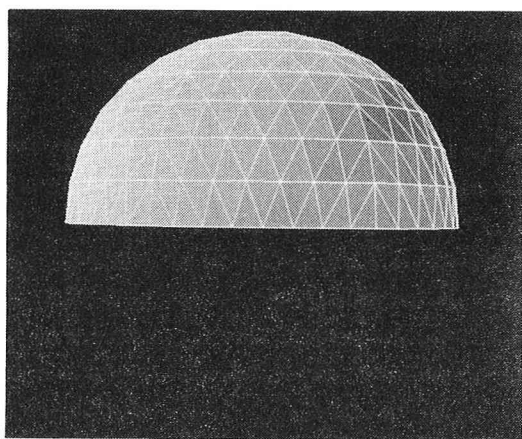


(b)

写真1 シェベドラー・ドーム

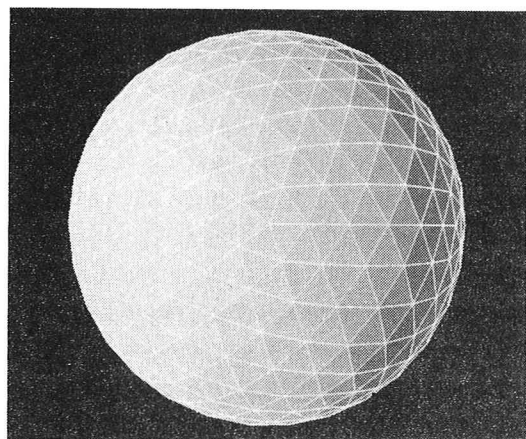


(a)

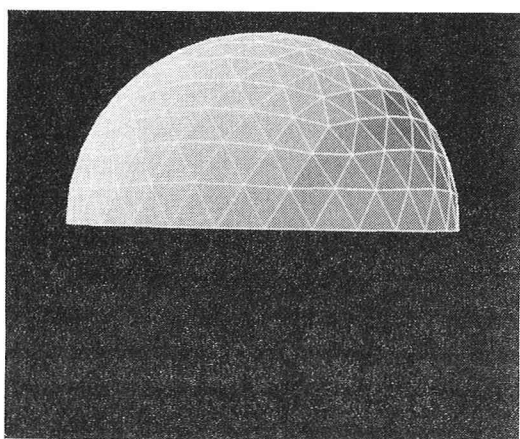


(b)

写真2 パラレル・ラメラドーム



(a)



(b)

写真3 6次のオルタネイト分割によるジオデシック・ドーム

デシック・ドームと呼ばれている（文献[4]参照）。これらの例ではジョイント数は、それぞれ209個、217個、201個であり、三角形面数は390個、384個、360個である。

しかし、科学技術の進歩発展に伴い、施工技術及び建築材料での能率及び精度の向上が著しい現在、多種多様の建物の生産が構造的に可能となった。ドーム建築の場合、内部に大きな空間を作り出すことが本来の役割である。しかし、建物には人々に形態感情を与えるという、建築意匠でのもう一つの大きな役割がある。スペース・フレームは建物の外観や内観の表情を左右するわけで、現在の規則的なユニットの繰り返しは、ある種の画一化された建物のファサードを作り出す。ジョイントを必ずしも規則的に配置しない状況を考えれば、スペース・フレームのデザインの自由度は大幅に増加し、より優れたデザインの発見が可能になる。また、ドーム建築の多くは、オーディトリウムや体育館、展示会場として使用されるので、音響効果が重要である。ドーム表面の不規則的な分割は規則的な分割よりも音響効果の点で一般に優れる。さらに、内部空間の利用目的や構造物に応じてジョイントの位置を決定すれば、現在のようにジョイントの位置を左右対称で均等に配置する場合と比較して、機能面でも効率のよいドーム建築を造ることができる。しかし、不規則に分布するジョイントの配置に対して、ある根拠をもった、定石と解釈できるようなドーム表面の三角形分割方法について論じた研究はない。

本研究の目的は、不規則に分布するジョイントに対し、これらを頂点とする全ての面が三角形である多面体の構成方法を提案し、その数理的特徴をもとに、ドーム表面の三角形分割への応用の有効性について考察を加えることである。

ところで、平面上の所与の点集合を頂点として平面領域を三角形分割の一つとしてドロネ三角形分割が知られている。ドロネ三角形分割を求める問題は計算幾何学では重要な問題であり、都市計画の分野でも応用事例は多い（文献[5]、[6]、[7]、[8]参照）。ドロネ三角形分割は次のようなアルゴリズムで定義できる。点集合に属し同一直線上に存在しない3点に対し、この3点を通る円を考える。円の内部に点集合の要素が存在しないときこの円の境界上に存在する点を頂点とする多角形を構成する。もし、この多角形が三角形でないときは、多角形をさらに三角形に任意に分割する。ドロネ三角形分割は、他の三角形分割と比較して、三角形の最も小さい角度が最も大きくなる“最小角最大原理”と呼ばれる特徴をもつことが広く知られている（文献[9]参照）。本研究は、提案する方法によって得られる三角形分割と平面上のドロネ三角形分割との関係をも明らかにする。

2. 三角形分割

2.1. 三角形分割方法

球面 Ω 上に位置する相異なる n 点のジョイント集合 P が与えられたとする。ただし、 $n \geq 3$ とする。一般にジョイント集合 J に対して全ての面が三角形となる多面体の構成方法は必ずしも一意に決まらない、ということに注意する。本研究では、構成方法として以下のアルゴリズムを提案する。

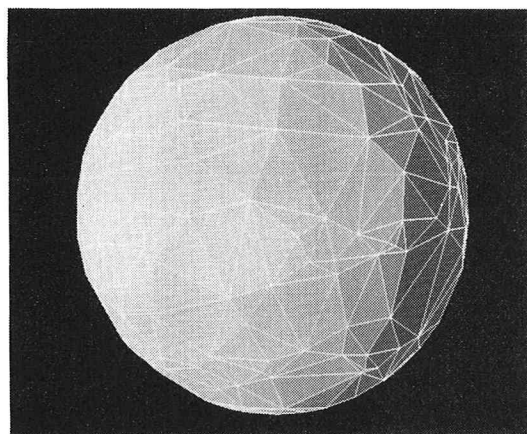
ステップ1 ジョイント集合 J に属する全ての点を頂点とする凸多面体 P を求める。

ステップ2 凸多面体 P の面がすべて三角形ならば終了する。

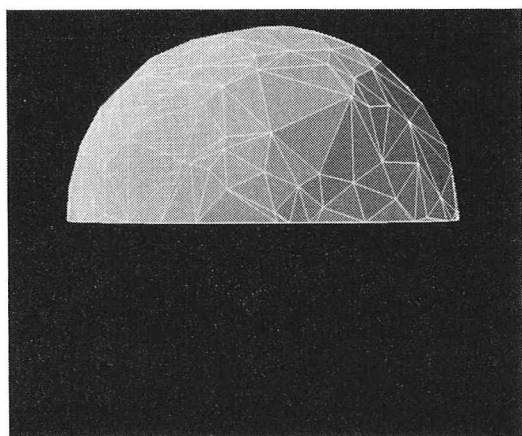
ステップ3 三角形とはならない面を、面の頂点をもとに任意に三角形分割し、終了する。

上記アルゴリズムで得られた三角形の集合 T をとする。上記アルゴリズムの定義から三角形集合 T は重なることはない。またすべての面が三角形である凸多面体を構成する。従って、赤道以北の半球面にジョイント集合を与え、上記アルゴリズムから得られる三角形集合から底部を構成する三角形を取り除けばドーム表面を構成するの三角形分割を得ることができる。写真4にその一例を示す。写真4は赤道上にランダムに分布する35個、半球面上をランダムに分布する167個のジョイントに対しての三角形分割の透視図である。

P に属するジョイントがすべて同一平面上に存在することから、これらを頂点とする凸多面体 P は必ず存在する。しかも P はジョイント集合 P の凸多面体、すなわち P を含む最小の凸集合に一致する。従

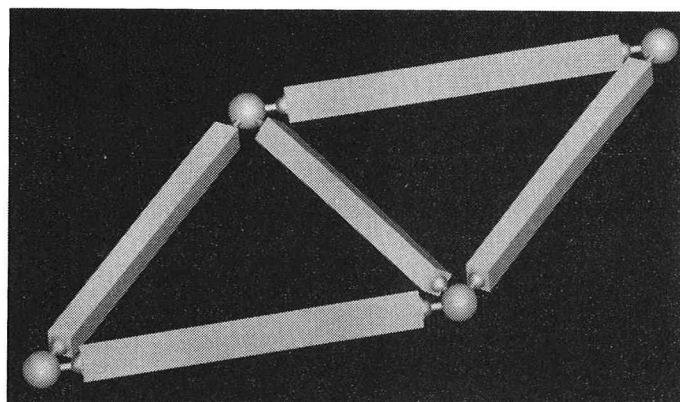


(a)

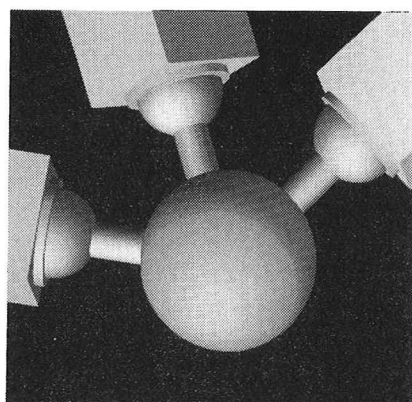


(b)

写真4 提案した方法による三角形分割

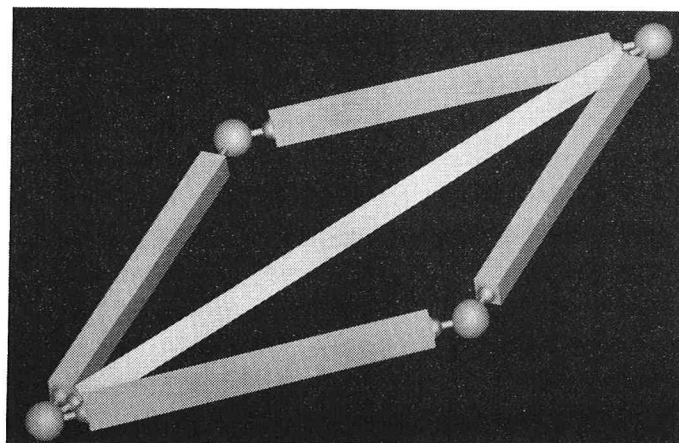


(a)

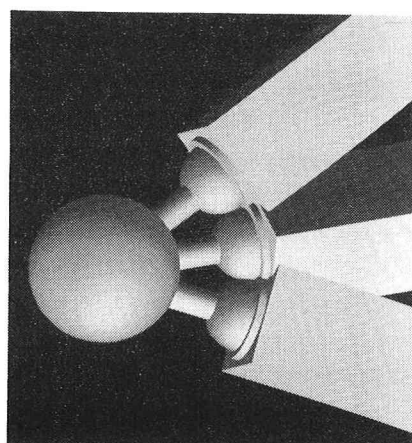


(b)

写真5 最小角が大きい三角形分割



(a)



(b)

写真6 最小角が小さい三角形分割

って、ステップ1を実行するアルゴリズムとして、空間に分布する n 点に対して n 点の凸多面体を見つけるアルゴリズムを用いればよい。凸多面体を求めるアルゴリズムは計算幾何学では最も基本的である（文献[10]参照）。たとえば、Preparata and Hongによる計算量 $O(n \log n)$ の手間のアルゴリズムが知られている（文献[11]参照）。しかし、ジョイント群は同一球面上に存在する特殊な状況であるから、より効率の良いアルゴリズムが存在するかも知れない。

2.2. ドーム建築設計での有効性

三角形集合が凸多面体を構成する、ということに注目すれば、この方法によって得られる三角形分割は、ドーム建築設計の視点から次のような長所をもつ。

第一に、この方法による三角形分割は、ジョイントの位置を所与としたとき考えられる三角形分割の中で、内部の体積を最大にする分割である。したがって、より大きな内部空間を得ることができ、内部空間の利活用の点で大きな自由度が得られる。

第二に、谷面が存在しないので雨水処理の点で優れた分割になる。もし、谷面が存在すると、三角形面材と三角形面材との継目部分に雨水が集まり、建築の大敵である雨漏りの原因となる。もちろん、このような谷面の雨漏り対策は技術的に可能であるが、その費用は大きい。

第三に、谷面が存在しないので、採光の点で優れている。もし谷面を形成する三角形面をガラス張りにしたり、そこに窓などの開口部を配置すると、太陽の日射角度によっては他の三角形面の影響で採光の効果は弱くなる。同じ理由から、谷面のある三角形分割は、通風や内部からの眺望の点でも劣る。

3. 最小角最大原理

3.1. ドローネ三角形分割との関係

ここでは、提案したアルゴリズムによって得られる三角形網と平面上のドローネ三角網との関係を明らかにする。三角形 T に属する任意の三角形 F に対し F を含む平面は空間を二つの半空間に分けるが、凸多面体 P の外側にある半空間の内部を $H(F)$ とする。また、中心が球面上にあり三角形 F の3頂点を通る球は二つ存在するが、球の中心が半空間の内部 $H(F)$ に含まれる方の球の内部を $C(F)$ とする。このとき、アルゴリズムのステップ1の定義から、半空間の内部 $H(F)$ に含まれるジョイントは存在しない。つまり数学的に次のように表現できる。

$$P \cap H(F) = \emptyset \quad \forall P \in P, \quad \forall F \in T.$$

このことは、球の内部 $C(F)$ に含まれるジョイントが存在しないこと、つまり次の式と等価である。

$$P \cap C(F) = \emptyset \quad \forall P \in P, \quad \forall F \in T.$$

単位面積当たりのジョイントの個数が多いとき、三角形 F を含む周囲の局所的部分はすべて三角形 F を含む平面上に存在すると解釈できる。したがって、この局所的部分において提案した方法による三角形網とこの平面上の局所部分に対して生成されるドローネ三角形分割とが一致する、と期待できる。実際、平面上のドローネ三角形分割では、3点を通る円を用いて三角形を定義する。一方、提案した方法では、円の代わりに3点を頂点とし中心が球面上にある球で三角形を定める。このように、提案した方法による三角形網は、平面上のドローネ三角形分割を一般化したものとも解釈できる。

3.2. 最小角最大原理

単位面積当たりのジョイントの個数が多いとき、局所的に見ると提案した方法による三角形網とドローネ三角形分割とが一致する。したがって、提案した方法による三角形網は他の三角形網と比較して三角形の最小な角度が最大となる最小角最大原理を満たすと期待できる。しかし、あるジョイント分布に対して、この方法による三角形分割は最小角最大原理を必ずしも満たさない（文献[1]参照）。

3.3. ドーム建築設計での有効性

前節で述べたように提案した方法による三角形分割では“最小角最大原理”は必ずしも成立しない。しかし、単位面積当たりのジョイント個数が多いとき最小角最大原理が成立すると期待できる。スベ

ース・フレームの三角形分割が“最小角最大原理”を満たすと、建築的に次の利点がある。

まず第一に、細長い三角形面材は歪みやすく、逆に正三角形に近い三角形面材は、面の中の歪みが起きにくく面剛性がより高い。したがって、極端に角度のつづれた三角形面が存在しない三角形分割は、耐久性の観点から優れる。

第二に、ジョイントにおいて様々な角度で部材どうしが接合する。部材間の角度範囲をより狭く限定できれば、ジョイントの基準化、統一化がより可能となり、ジョイント費用がより小さくなる。

第三に、ジョイントでの部材間の角度が狭いならば、狭い角度でのボルト締めなどの工事の手間、あるいは大きなジョイントの使用が必要となる（写真5及び写真6参照）。最小角が小さい写真6では、部材が完全に交わっている。このように、太い部材を小さな角度でつなぐことは付加的な技術や高価なジョイントを必要とする。従って、極端に角度の小さい三角形面が存在しないスペース・フレームは建設費用の点からも優れる。

4. おわりに

本研究で得られた主な知見は次の2点である。

- ① 不規則なジョイント分布に対してもドーム表面をシステムテックに三角形分割する方法を示した。従って、ドーム表面のデザインの自由度は飛躍的に大きくなった。
- ② ドーム半球面に必ずしも規則的に分布しないジョイント群に対し、建築設計上いくつかの優れた性質をもつ、三角形分割方法を提案した。

本研究は、いくつかの限られた評価項目で三角形分割の有効性を論じたが、建築を設計する上で、もちろん上記の評価項目が全てだとは決して思わない。建築総体を知りそれらをすべて満たす設計が必要である。しかし、このように客観的事実を厳密に抑えることは、建築設計を論理的に思考するための後ろだての一つになりうる。

なお、本研究で示したアルゴリズムは球面に限らず凸曲面も三角形分割できる。したがって、応用の範囲も広いと考えられる。

参考文献

- 1) 大澤義明, 木島安史(1991): ドーム表面の不規則な三角形分割に関する研究. 日本建築学会計画系論文報告集, 425, PP.87-92.
- 2) Fuller, R.B. and R. Marks(1960): The Dymaxion World of Buckminster Fuller. Doublerday and Company Inc, New York. (木島安史, 梅沢忠雄訳(1977): バックミンスター・フラーのダイマキシオンの世界. 鹿島出版会)
- 3) 宮崎興二(1979): 多面体と建築. 彰国社.
- 4) 川口衛, 阿部優, 松谷宥彦, 川崎一雄(1990): 建築構造のしくみ. 彰国社.
- 5) 古山正雄(1988): 地域結合関係による木構造. 建築学会計画系論文報告集, 384, PP.63-71.
- 6) 古山正雄(1988): 地域結合パターンとその評価指標に関する研究. 建築学会計画系論文報告集, 392, PP.84-92.
- 7) 伊理正夫, 腰塚武志(1986): bit別冊計算機幾何学と地理情報処理. 共立出版.
- 8) 谷村秀彦, 梶秀樹, 池田三郎, 腰塚武志(1986): 都市計画数理. 朝倉書店.
- 9) 岸本一男(1978): 領域の最適三角形群への分割アルゴリズム. 情報処理, pp.211-218.
- 10) Preparata, F.P. and M.I. Shamos(1985): Computational Geometry. Springer-Verlag.
- 11) Preparata F.P., and S.J. Hong (1977): Convex Hulls of Finite Sets of Points in Two and Three Deimnsions. Communication of the ACM, 20, pp.87-93.