

## (25) 材料の非線形性を考慮した トラスの最適設計法に関する一考察

### A STUDY ON THE OPTIMUM DESIGN METHOD OF TRUSS CONSIDERING MATERIAL NONLINEARITY

大久保 禎二\*      林 英範\*\*  
Sadaji Ohkubo,    Hidenori Hayashi

A new minimum weight design method of truss with nonlinear materials is proposed by the direct use of the energy minimization algorithm. Under the equal stress constraint, it is cleared that the total weight of truss is proportional to the total complementary energy and the minimum weight design problem can be converted into the modified complementary energy minimization problem. The energy minimization problem is solved by using the complementary energy minimization algorithm which has been developed by the author for the nonlinear analysis of truss. The accuracy and efficiency of the proposed optimum design method are demonstrated by comparing the optimum solutions by the proposed method with ones which are obtained by using sensitivities and the linear programming algorithm.

*Key words : nonlinear truss , optimum design method,  
complementary energy minimization, sequential quadratic programming,  
linear programming*

#### 1. まえがき

材料の非線形性を考慮した構造物の最適設計法に関する研究としては、これまでに最適塑性設計法に関する数多くの研究<sup>1)</sup>や、弾塑性解析法<sup>2)</sup>と数値計画法の手法とを組み合わせた最適設計法に関する研究<sup>3), 4)</sup>などがなされている。ところで、本研究では、従来の上記のような最適設計法に関する研究とは全く異なるエネルギー最小化の観点から、材料の非線形性を考慮したトラス構造物の最適設計を行う方法について基礎的な考察を行ったものである。

すなわち本研究では、トラス構造物のすべての部材が弾性限度を越えた同一の応力レベルで同時に fully stress 状態になり破壊するという条件下での最適設計問題は、構造物の全コンプリメンタリーエネルギーと総重量あるいは総製作費が比例関係にあることを明らかにすることにより、これまで大久保らにより研究されてきたコンプリメンタリーエネルギー最小化による材料の非線形性を考慮したトラスの解析アルゴリズム<sup>5), 6)</sup>を用いて解くことができることを示すとともに、この最適設計法の信頼性および有効性を検

\* 工博 愛媛大学工学部 土木工学科

\*\* 愛媛大学大学院

討するため、同様の最適設計問題を感度係数およびLPの手法を用いて解く方法による結果や計算時間、収束状況などと比較検討を行い、本論文の方法により正確な最適解が能率的に決定できることを明らかにしている。なお本研究では、節点変位がトラス構造物の解析に及ぼす影響は無視し得るものと仮定している。

## 2. コンプリメンタリーエネルギー最小化に基づく最適設計問題の定式化

非線形材料よりなる任意のトラス（図-1）の全ての部材の応力度が弾性限度を越えた同一の応力レベルで同時にfully stress状態になり破壊する場合の最適設計問題を考える。設計変数として断面積  $A = [A_1, \dots, A_n]^T$  ( $n$ : 部材数) を、また目的関数  $W$  として構造物の重量あるいは製作費などを考え、 $W$  は次式で表わされるものとする。

$$W_i(A_i) = \rho_i \ell_i A_i, \quad W(A) = \sum_{i=1}^n W_i(A_i) \quad (1)$$

ここに、 $\rho_i$ : 部材  $i$  の単位体積当りの目的関数の値

いま、図-2に示すような非線形材料よりなるトラスの部材力  $P = [P_1, \dots, P_n]^T$  を、著者の一人が文献5) で開発したコンプリメンタリーエネルギー最小化の方法により求めるものとして、 $P$  を決定する問題は次のように定式化することができる。

$$\begin{aligned} &\text{find} && P, \quad \text{which} \\ &\text{minimize} && \Pi_c(P, A) \\ &\text{subject to} && g = F - CP = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 $g = [g_1, \dots, g_m]^T$  ( $m$ : 自由度の数): 各可動節点における釣合条件式,  $P = [P_1, \dots, P_n]^T$ : 部材力ベクトル,  $F = [F_1, \dots, F_m]^T$ : 外力ベクトル,  $C$ :  $P$  の  $F$  方向への変換マトリックス

また、トラス構造物の各部材の応力度が図-2の点  $S$  である場合、部材  $i$  のコンプリメンタリーエネルギー  $\Pi_{ci}(P_i, A_i)$  は次式で計算される。

$$\Pi_{ci}(P_i, A_i) = \begin{cases} \frac{P_i^2 \ell_i}{2 E_1 A_i} & (\text{if } P_i \leq P_{ei}) \\ \frac{P_e \ell_i}{2 E_1 A_i} (2 P_i - P_e) + \frac{(P_i - P_e)^2 \ell_i}{2 E_2 A_i} & (\text{if } P_i > P_{ei}) \end{cases} \quad (3)$$

ここに、 $\ell_i$ : 部材  $i$  の部材長,  $A_i$ : 部材  $i$  の断面積  
 $P_{ei} = \sigma_e A_i$

したがって、トラス構造物の最適設計問題は、式(2)を解きつつ、式(1)の  $\sum W_i(A_i)$  を最小にする問題を解くことになる。

## 3. 最適設計問題の変換

ところで、部材  $i$  のコンプリメンタリーエネルギー  $\Pi_{ci}$  は、図-2に示すコンプリメンタリーエネルギー密度  $\beta_i$  を用いて次式で表わされる。

$$\Pi_{ci}(\sigma_i) = \beta_i(\sigma_i) \ell_i A_i \quad (4)$$

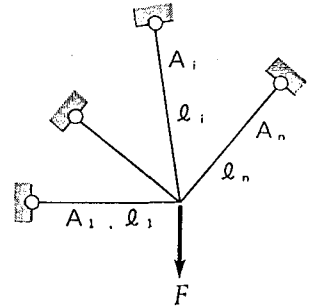


図-1 トラス

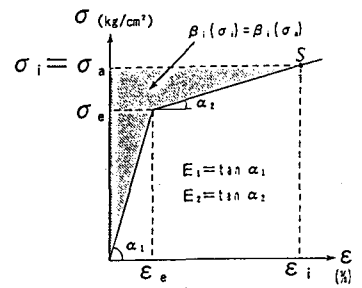


図-2 非線形応力-ひずみ関係

一方、部材  $i$  の目的関数  $W_i$  は

$$W_i(A_i) = \rho_i l_i A_i, \tag{5}$$

であるので  $A_i = W_i(A_i) / (\rho_i l_i)$  となり、これを式(4)に代入することにより  $\Pi_{ci}(\sigma_i)$  は次式のように表わされる。

$$\Pi_{ci}(\sigma_i) = \beta_i(\sigma_i) \cdot W_i(A_i) / \rho_i \tag{6}$$

本研究では、 $\rho_i$  および  $\beta_i(\sigma_i) [= \beta(\sigma_a)]$  を一定としているので、式(6)より  $\Pi_{ci}(\sigma_i) [= \Pi_{ci}(\sigma_a)]$  と  $W_i(A_i)$  とは比例関係にあることがわかる。すなわち、

$$\Pi_{ci}(\sigma_i) \propto W_i(A_i) \tag{7}$$

上の展開より明らかなように、本研究で対象としているトラス構造物の最適設計問題では、トラスの目的関数  $W(A)$  とトラスの全コンプリメンタリーエネルギー  $\Pi_c(\sigma_a)$  とは比例関係にあるので、式(2)において  $\sigma_i = P_i / A_i = \sigma_a$  の条件、すなわち  $A_i = P_i / \sigma_a$  の条件を満足させながら  $\Pi_c(P, A)$  を最小化することにより、 $W(A)$  も最小化されることとなる。したがって、本研究で対象とするトラス構造物の最適設計問題を、次のような全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題に変換して解くことができる。

$$\begin{aligned} &\text{find} && P, \quad \text{which}_n \\ &\text{minimize} && \Pi_c(P, A) = \sum_{i=1}^n \Pi_{ci}(P_i, A_i) \\ &\text{subject to} && g = F - CP \\ &&& A_i = P_i / \sigma_a. \quad (i=1, \dots, n) \end{aligned} \tag{8}$$

#### 4. SQPによる最適設計アルゴリズム

式(8)の最小化問題は、これまでに著者らが開発している全コンプリメンタリーエネルギー最小化によるトラス構造物の非線形解析のアルゴリズム<sup>5)</sup>に、 $A_i = P_i / \sigma_a$  ( $i=1, \dots, n$ ) の条件を付加するのみに、図-3に示すフローチャートにより解くことができる。

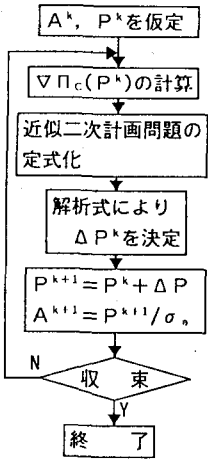


図-3 SQPによる最適設計アルゴリズム

#### 5. 感度係数およびLPを利用した最適設計法

上記の 2.～4. で述べた最適設計法の信頼性および計算効率等を検討するため、本研究では 2. で述べた最適設計問題の目的関数および各部材断面の感度係数を差分法により求め、LPの手法を用いて  $A$  を改良することを繰り返すことにより最適な  $A$  を決定する方法についても検討を行った。

トラス構造物の部材  $j$  の断面積  $A_j$  を微少量 ( $\Delta A_j$ ) 変化させた場合の目的関数および各部材断面の感度係数は次のようにして求めることができる。

すなわち、まず、部材断面の初期値  $A^0 = [A_1^0, \dots, A_n^0]^T$  を任意に設定し、全コンプリメンタリーエネルギー最小化の方法により  $A^0$  における各部材の部材力  $P^0 = [P_1^0, \dots, P_n^0]^T$  を求め、各部材の応力度が設定した応力度  $\sigma_{ai}$  となるように次式により断面積を修正する。

$$\overline{A_i^0} = P_i^0 / \sigma_{ai} \quad (i=1, \dots, n) \tag{9}$$

次に、部材  $j$  の断面積のみを  $\Delta A_j$  だけ変化させて再解析を行い、得られた部材力を  $\overline{P^j} = [\overline{P_1^j}, \dots, \overline{P_n^j}]^T$

とすると、各部材の必要断面積  $\bar{A}^j = [\bar{A}_1^j, \dots, \bar{A}_n^j]^T$  は次式より求められる。

$$\bar{A}_i^j = P_i^j / \sigma_{s,i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (10)$$

したがって部材  $j$  の断面積の変化量  $\Delta A_j$  に対する各部材の必要断面積の感度係数は次式より求められる。

$$\partial A_i / \partial A_j \doteq (\bar{A}_i^j - \bar{A}_i^0) / \Delta A_j \quad (11)$$

また、 $\Delta A_j$  に対する目的関数の感度係数は次式より求められる。

$$\partial W / \partial A_j \doteq \sum_{i=1}^n \rho_i (\bar{A}_i^j - \bar{A}_i^0) l_i / \Delta A_j \quad (12)$$

上記の式 (11) および (12) の感度係数をすべての部材の断面積の変化に対して求め、これらの感度係数を用いて  $A$  の下限値の条件および  $\Delta A$  の move limit の条件を考慮して次の LP 問題を作成し、これを解くことにより  $\Delta A$  の改良値を求める。

$$\begin{aligned} & \text{find} && \Delta A, && \text{which} \\ & \text{minimize} && \sum_{j=1}^n (\partial W / \partial A_j) \Delta A_j \rightarrow \min \\ & \text{subject to} && \bar{A}_i^0 + \sum_{j=1}^n (\partial A_i / \partial A_j) \Delta A_j \geq 0.1 \text{cm}^2 \\ & && |\Delta A_j| \leq \xi A_i^0 \quad (i=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)における  $\xi$  は、 $\Delta A$  の一回の改良における move limit の大きさを規制する係数であり、本研究では  $A$  の収束状況を見ながら逐次  $\xi$  の幅を小さくすることにより最適解を決定することができた。式(13)の LP 問題を解いて求めた  $\Delta A$  を用いて次式により  $A$  を改良し、

$$A^1 = \bar{A}^0 + \sum_{j=1}^n (\partial A_i / \partial A_j) \Delta A_j \quad (14)$$

これを初期値として再び上記の  $\Delta A$  の改良を繰り返し、 $W$  および  $A$  が一定値に収束した時最適値  $A_{OPT}$  が得られたものとした。本研究の方法により最適な  $A$  を決定する macro な流れを図-4に示す。

## 6. 最適設計例および考察

2.~5. で述べた2つの方法により種々の不静定トラスの最小重量設計を行った。非線形材料としては図-2に示すような非線形の応力-ひずみ関係を有する材料を考え、 $E_1=2000000 \text{kgf/cm}^2$ ,  $E_2=100000 \text{kgf/cm}^2$ ,  $\sigma_s=2000 \text{kgf/cm}^2$ ,  $\sigma_a=3000 \text{kgf/cm}^2$ ,  $\rho_i=10 \text{g/cm}^3$  と仮定した。設計例として図-5に示す3部材、6部材、10部材を有する不静定トラスの最適設計を行った結果の比較を表-1に、また各トラスの最適解での形状を図-6に示す。ただし、図-6において点線で示した部材は、最適解において不要となっている部材であることを示している。また、表-1に示す感度係数および LP を利用した方法による結果は、式(13)における  $\xi$  の値を種々変化

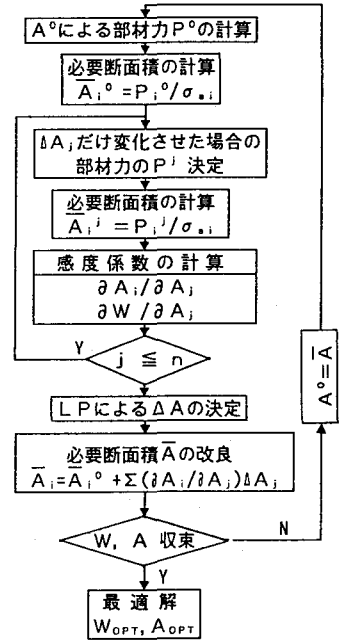


図-4 感度係数およびLPによる最適設計アルゴリズム

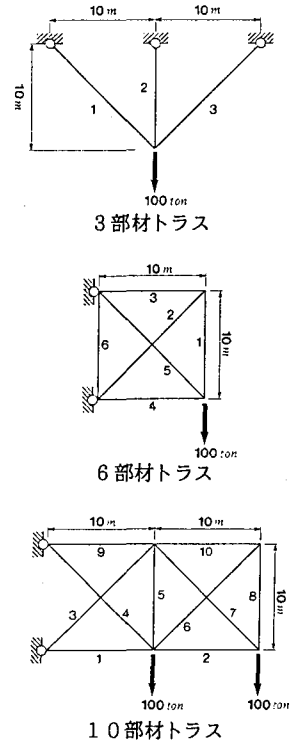


図-5 設計モデル

させ最適設計を行った中で最も早く収束した設計例の結果を掲載している。

表-1より明らかなように、両方法による最適解は完全に一致しており、本研究で提案しているエネルギー最小化の方法により正確な最適解が得られることが明らかとなった。

次に、両方法による各トラスの最適解への収束状況を示すと、それぞれ図-7および図-8のようになる。これらの図から明らかなように、エネルギー最小化に基づく方法では、初回の改良以外は一回の改良におけるAの変化があまり大きくなく、徐々に最適解に収束しており、最終的な最適解に収束するまでに必要としたPおよびAの反復回数は、3部材トラスで25回、6部材トラスで83回、10部材トラスで125回となっている。ただし、この設計法では一回の反復改良に要する計算時間がきわめて少ないため、各トラスの計算時間はそれぞれ2.0秒、8.5秒、18.3秒であった。一方、感度係数とLPを用いた方法では、一回目の改良において  $\xi=1.0$  と仮定することにより、いづれの設計例においても一回目の改良でほぼ

表-1 各トラスの最適値

| 断面積 (cm <sup>2</sup> ) | A <sub>1</sub> | A <sub>2</sub> | A <sub>3</sub> | A <sub>4</sub> | A <sub>5</sub> | A <sub>6</sub> | A <sub>7</sub> | A <sub>8</sub> | A <sub>9</sub> | A <sub>10</sub> | 重量<br>(×10kg) | 1) <sup>1)</sup><br>ITE<br>(回) | 2) <sup>2)</sup><br>CPU<br>(秒) |
|------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|---------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 初期値                    | 10.0           | 10.0           | 10.0           | 10.0           | 10.0           | 10.0           | 10.0           | 10.0           | 10.0           | 10.0            |               |                                |                                |
| 3部材トラス                 |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                 |               |                                |                                |
| C.E.M. <sup>3)</sup>   | 0.1            | 33.2           | 0.1            | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —               | 33.50         | 25                             | 2.0                            |
| L.P. <sup>4)</sup>     | 0.1            | 33.2           | 0.1            | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —               | 33.50         | 2                              | 1.0                            |
| 6部材トラス                 |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                 |               |                                |                                |
| C.E.M. <sup>3)</sup>   | 0.1            | 0.1            | 0.1            | 33.3           | 47.0           | 0.1            | —              | —              | —              | —               | 100.22        | 83                             | 8.5                            |
| L.P. <sup>4)</sup>     | 0.1            | 0.1            | 0.1            | 33.3           | 47.0           | 0.1            | —              | —              | —              | —               | 100.22        | 9                              | 10.7                           |
| 10部材トラス                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                 |               |                                |                                |
| C.E.M. <sup>3)</sup>   | 66.8           | 33.3           | 47.0           | 47.3           | 0.1            | 0.1            | 47.0           | 0.1            | 66.6           | 0.1             | 366.88        | 125                            | 18.3                           |
| L.P. <sup>4)</sup>     | 66.7           | 33.3           | 47.0           | 47.3           | 0.1            | 0.1            | 47.0           | 0.1            | 66.6           | 0.1             | 366.88        | 10                             | 60.9                           |

- 1) 最終解を得るために要した繰返し回数 2) MX2000による計算時間  
3) 補わずみエネルギー最小化による解析法を利用した最適設計法による最適解  
4) 感度係数およびLPを利用した最適設計法による最適解

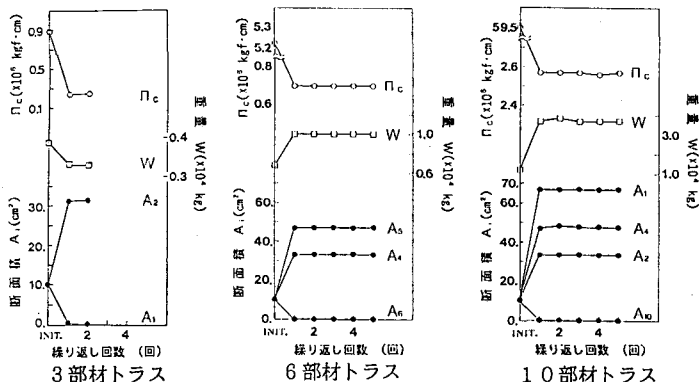


図-7 感度係数およびLPを用いた最適設計法による各トラスの収束状況

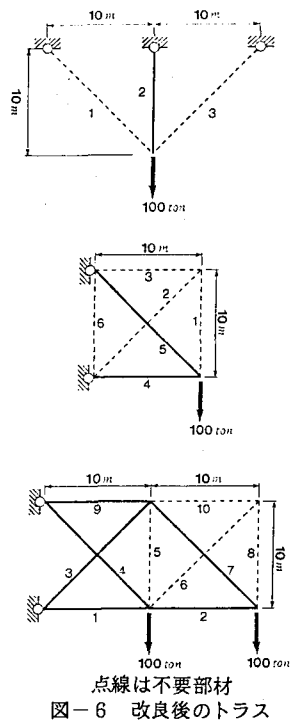


図-6 改良後のトラス

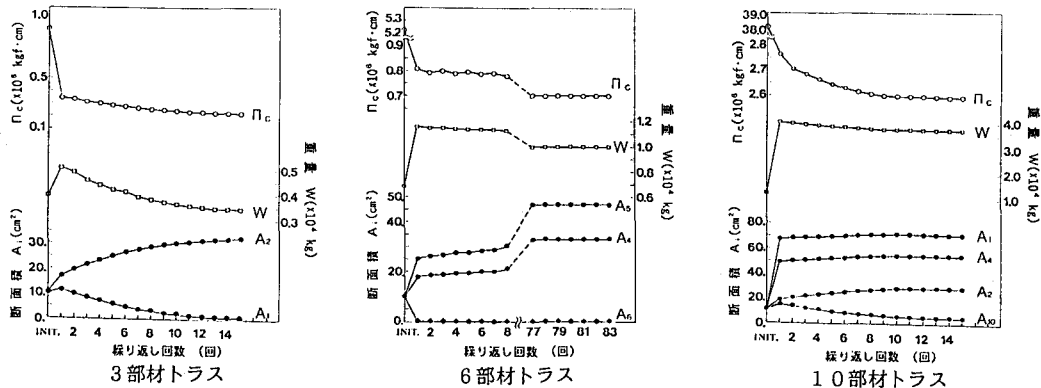


図-8 エネルギー法に基づく最適設計法による各トラスの収束状況

最適解の近傍に収束した後、 $\xi$  を非常に小さな値に修正することにより、3部材トラスで2回、6部材トラスで9回、10部材トラスで10回の反復改良により最適解を決定している。ただし、この設計法では、一回の反復改良における感度係数の計算に多くの計算時間を必要とするため、最終的な最適解を得るために必要とする計算時間(CPU)は、3部材トラスで1.0秒、6部材トラスで10.7秒、10部材トラスで60.9秒と、部材数が多くなるに従い前述のエネルギー最小化に基づく方法よりも多くの計算時間を要している。また、この設計法においては、適切な $\xi$ の値を決定するためにはある程度の試行錯誤が必要であり、この $\xi$ の値の決定が適当でない場合にはより多くの計算時間が必要となり、また、解が振動するので十分に注意する必要がある。

## 7. 結 論

本研究により得られた結論を要約すると、次のとおりである。

- ① トラス構造物のすべての部材が同一の応力レベルで同時に fully stress 状態となる条件下での最適設計問題は、コンプリメンタリーエネルギー最小化により部材力を決定するアルゴリズムに fully stress の条件を加えたアルゴリズムを用いて、構造解析、最適化とを同時に行うことにより、能率的に解くことができる。
- ② エネルギー最小化に基づく方法により得られた最適解は、感度係数とLPを用いた方法により得られた最適解と完全に一致している。
- ③ エネルギー最小化に基づく方法では、初回の改良以外は一回の改良におけるAの変化が小さく、徐々に最適解に収束している。一方、感度係数とLPを用いた方法では、move limit の改良幅 $\xi$ を適当に設定することにより、比較的少ない改良回数でほぼ最適解の近傍に収束し、さらに $\xi$ の値を微少に設定することにより、正確な最適解に収束させることができる。ただし、この改良幅の設定にはある程度の試行錯誤が必要となる。
- ④ エネルギー最小化に基づく方法では、一回の反復改良に要する計算時間がきわめて短いため、最終的な最適解を得るために必要な計算時間(CPU)は、感度係数とLPを用いた方法と比較してトラスの部材数が多くなるほど短くなる。

## 参 考 文 献

- 1) これらの研究については、例えば次の論文の文献に要領よくまとめられている。  
John Munro.:Optimal Plastic Design of Frames, Engineering Plasticity by Mathematical Programming, edited by Cohn M.Z. and Maier G., Pergamon Press, pp.135-171, 1979.
- 2) Engineering Plasticity by Mathematical Programming, edited by Cohn M.Z. and Maier, G., Pergamon Press, Chaps 6 and 13, pp.107-134 and pp.325-349, 1979.
- 3) 石川信隆・香月智・三原徹治・古川浩平:降伏部材選択方式によるトラス構造物の最適弾塑性設計法に関する一考察, 土木学会論文集, No. 350/I-2, pp. 321-329, 1984-10.
- 4) 三原徹治・北小路雅倫・石川信隆・太田俊昭:感度解析を用いたトラス構造物の最適弾塑性設計法とその応用例, 土木学会論文集, No. 392/I-9, pp. 249-258, 1988-4.
- 5) Sadaji Ohkubo and Yasuo Watada and Toshio Fujiwaki :Nonlinear Analysis of Truss by Energy Minimization, Computers & Structures Vol.27, No.1, pp. 129-145, 1987.
- 6) Sadaji Ohkubo and Koji Makino :Material Nonlinear Analysis of Rigid Plane Frames By Total Complementary Energy Minimization, Proc. of JSCE, No.416/I-13, pp. 37-48, 1990.