第2回システム最適化に関するシンポジウム講演論文集　1991年11月

(24) 不等式制約条件下でのシフト・シンセシスの一般逆行列解法

GENERALIZED INVERSE FORMULATION APPLIED TO STRUCTURAL SHIFT SYNTHESIS UNDER INEQUALITY CONSTRAINT CONDITIONS

鈴木　敬子*　　中桐　滋**

Keiko SUZUKI　　Shigeru NAKAGIRI

A formulation is presented for the structural shift synthesis under equality and inequality constraint conditions which are approximated in linear terms of design variables. Slack variables are introduced to modify the inequality conditions into the equality form. The formulation is based on the solution of the governing equation of the design variables and slack variables by means of Moore-Penrose generalized inverse. The complementary solution is added when the particular solution fails to satisfy the requisite of the slack variables. The numerical examples based on the finite and boundary element sensitivity analyses deal with the shape modification of a beam and a press yoke, respectively, and verify the validity of the proposed formulation.

Key Words: computatioal mechanics, shift synthesis, shape modification, constraint condition, generalized inverse

1．はじめに

原設計または試設計の構造応答が設計者の意図を満たさないとき，設計者は構造諸元を変更して所望の構造応答を実現しようとする．弾性設計の例では，原設計での発生応力が高すぎるときそれを材料の降伏点から定められる許容応力以下とするように構造の寸法は変更される．構造変更の原設計からのシフト・シンセシスにおいては，構造応答の一つである発生応力を許容応力以下に抑えることは構造応答を定める設計変数に関する不等式制約条件を構成する．本研究の例では等式，不等式制約条件のみを課しているので，たとえば固有振動数を一定値以下とする最小重量設計または最大剛性設計等の制約条件付き最適化とは問題の設定を異にする．従って解の唯一性は要求されていない．

一方不等式制約条件は構造最適化の分野における線形計画法でもスラック変数を用いて取り扱われていた．不等式制約条件については一種の乗数法[1)・2)]，および擬似最小二乗法による方法[3)]などが提案されている．それらはいずれも一組の不等式制約条件を満たす設計変数を求めるのに反復解法を用いている．反復解法では所望の設計変数が得られるまでに要する反復回数を事前に推定するのは一般に困難である．また，乗数法と併用するときは，問題に応じた乗数の初期値設定と反復時の乗数変更方式の選択にある程度の試行と経験を要する．基本的には反復解法によらずに，不等式制約条件のみを満たす設計変数を探索するアルゴリズム

*　東京大学生産技術研究所　技官　　**　工博　東京大学生産技術研究所　教授

を一般逆行列[4]を用いて定式化する．不等式制約条件の下での構造変更のシンセシスについてはスラック変数を導入することにより不等式制約条件を等式化する．そして他の等式制約条件がある場合にはそれらをも併せて非正方線形連立方程式を構成し，その一般解を一般逆行列により求め，不等式制約条件を満たす構造応答を実現する設計変数を定めるものである．

本研究の目的は等式制約条件のみの場合，不等式制約条件のみの場合，等式制約条件と不等式制約条件が同時に課られる場合にも統一的に取り扱える一般逆行列に基づく定式を呈示することである．その応用例として有限要素法を用いて梁の振動モード，振動数等に不等式制約条件を与えたときの梁の形状変更，および境界要素法を用いて指定重量の下で応力値に制限を加えるプレス・ヨークの変更形状を求める．

2．問題の設定

注目する構造応答（諸元を含む） z についての不等式制約条件が式（1）で与えられ，また等式制約条件が同時に式（2）で与えられているとする．設計変数 αn の一次式で表わされている制約条件をここでは厳密なものとする．上付き棒記号は試設計での値を示し，肩符 I は設計変数 αn に関する応答 $z i$, または $z j$ の一階感度を，星印は目標応答の値または限界値を示す．一階感度は既知であるとする．試設計の応答は等式および不等式制約条件のいずれも満たしていないので，制約条件が満たされる様に構造諸元 $A n$ を式（3）により変更するとして，その設計変数 αn を決定することを本研究の問題とする．

$$\bar{z}_j + \sum_{n=1}^{N} z_{jn}^{I}\,\alpha_n - z_j^{*} \leqq 0, \qquad j = 1, J \tag{1}$$

$$\bar{z}_i + \sum_{n=1}^{N} z_{in}^{I}\,\alpha_n - z_i^{*} = 0, \qquad i = J+1, J+I \tag{2}$$

$$A_n = \bar{A}_n\,(1 + \alpha_n), \qquad n = 1, N \tag{3}$$

等式制約条件の数は設計変数の数より小さいものとする．実際の構造変更における制約条件は設計変数の非線形関数であり，式（1），（2）の表示はその制約条件の一次近似式である．

3．Moore-Penrose一般逆行列による定式

不等式制約条件については J 個のスラック変数 βj を用いて式（4）の形に等式化する．このときスラック変数は全て非負でなければならない．式（4）と式（2）をまとめて行列表示すると式（5）が得られる．本式により等式および不等式制約条件を統一的に取り扱える．式（5）の［S］は応答の一階感度と定数1からなる K (=I+J) x M (=N+J) の非正方行列，{D} は応答の目標値または限界値と試設計の応答の差を成分とする既知ベクトル，{X} は設計変数 αn とスラック変数 βj を成分とする未知ベクトルである．

$$\sum_{n=1}^{N} z_{jn}^{I}\,\alpha_n + \bar{z}_j - z_j^{*} + \beta_j = 0, \qquad j = 1, J \tag{4}$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
z_{11}^{I} & \cdots & z_{1N}^{I} & 1 & & \\
\vdots & & & & \ddots & \\
z_{J1}^{I} & \cdots & z_{JN}^{I} & & & 1 \\
\hline
\vdots & & & & & \\
z_{KN}^{I} & \cdots & z_{KN}^{I} & & 0 &
\end{array}\right]
\left\{\begin{array}{c}
\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \\ \hline \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_J
\end{array}\right\}
=
\left\{\begin{array}{c}
z_1^{*}-\overline{z}_1 \\ \vdots \\ z_J^{*}-\overline{z}_J \\ \hline \vdots \\ z_K^{*}-\overline{z}_K
\end{array}\right\}
$$

$$[S]\{X\}=\{D\} \tag{5}$$

このとき式（5）の解｛X｝が存在するための必要十分条件は，［S⁻］をMoore-Penrose一般逆行列[4]として，式（6）が成立することである．本稿では［I］は K x K または M x M の単位行列である．解が存在するとき，式（7）の特解｛Xp｝および式（8）の補解｛Xc｝の和として一般解｛X｝は式（9）と求められる．式（8）の｛h｝は任意ベクトルである[5]．このようにして得られる解｛Xp｝はそのノルムが最小になっている．本研究において一般逆行列はPenrose法により計算している[6]．

$$([S][S^{-}]-[I])\{D\}=\{0\} \tag{6}$$

$$\{Xp\}=[S^{-}]\{D\} \tag{7}$$

$$\{Xc\}=([I]-[S^{-}][S])\{h\} \tag{8}$$

$$\{X\}=\{Xp\}+\{Xc\} \tag{9}$$

特解のスラック変数｛βp｝が全て非負であれば，特解｛Xp｝の中の設計変数｛αp｝により構造変更を行なうことにより制約条件を満たす構造応答が得られる．特解のスラック変数で負のものがあれば補解による補正を行いスラック変数を一般解として非負とする．非負とする仕方は唯一ではない．特解では負であるスラック変数を一般解では零とする様に，補解補正に用いる｛h｝を定める方法をとる．負である特解のスラック変数を L 個として，それ等に対応する L 行を[I]-[S⁻][S]から抽出して L x M の行列［C］を作成し，任意ベクトル｛h｝を式（10）より定める．ここで｛βp'｝は特解のスラック変数で負のものをまとめたベクトルである．

$$\{h\}=-[C^{-}]\{\beta p'\} \tag{10}$$

この｛h｝を式（8）に代入して補解｛Xc｝を定めれば，補解補正後の一般解｛X｝から設計変数が求められる．また L が N-I より大きいときは L 行から N-I 行をとりだして補解補正を行なう．特解では非負であったスラック変数が補解補正により負に転じれば，スラック変数が全て非負となるまで補解補正を適宜繰り返す．本定式では設計変数とスラック変数の自乗和を最小とする特解を出発点としているので，試設計からの設計変更が小さいシンセシスを行なうこととなる．したがって等式制約条件のみの場合には，特解におい

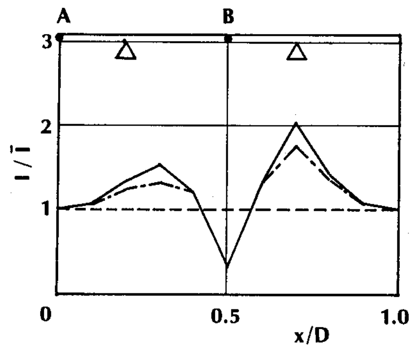

図1　はりの有限要素モデルと構造変更前後の断面二次モーメント分布（例1）

て設計変更量が求められ，本定式では従来われわれが示してきた設計変更最小の構造変更シンセシスの定式[7),8)]と一致する．

4．有限要素解析に基づく振動モード性状変形の形状変更

図１のモデルに示すように２点単純支持の長さＤ＝２０ｍｍの真直弾性梁の一次曲げ振動のモード形の有限要素法に基づく変更例を示す．梁を１０個の等長要素に分割し，節点の断面二次モーメントＩについて設計変数を設定する．原設計の断面二次モーメントは一様とする．このとき一次固有値は４．１９４である．この例ではモードの振幅絶対値を大きくすると固有値は減少するが，固有値の初期設計の値を下回らないとの条件を図２中に示すように与えた．ここでは構造応答の変化を一階感度[7)]で表しているので，式（１），（２）の一次式は近似である．従って，この一次近似の誤差補償のために構造変更の反復を要する．図２中の斜線部は制約条件範囲を，破線は原設計のモード形を，実線は変更後のモード形を示す．このときの構造変更前後の断面二次モーメント分布を図１にモード形を図２に示す．なお図１の一点鎖線は三制約条件をすべて等式として特解により得られた断面二次モーメントを併記したものである． Moore-Penrose形の一般逆行列を用いる本定式の特解はαｎとβｊからなる｛Ｘｐ｝はそのノルムが最小となるように定められる．従ってこの不等式条件での設計変数はスラック変数の寄与分だけ異なっている．

次の例は図３に示す不等式制約条件を固有ベクトルたわみ成分と固有値に課したときの変更前後のモード形を示し，図４は反復履歴を示す．この不等式制約条件を満たす構造は唯一ではない．各構造応答は反復に対して一定値に収束はしていないが，３回の反復で所要の構造変更が得られている．図５より３回変更後の断面二次モーメントが前例と逆の分布を示すことがわかる．

5．境界要素解析に基づく応力制限のための形状変更

図６は数値計算例に取り上げるHIP装置ヨーク初期形状の 1/4 モデルとその境界要素分割を示す．その梁部

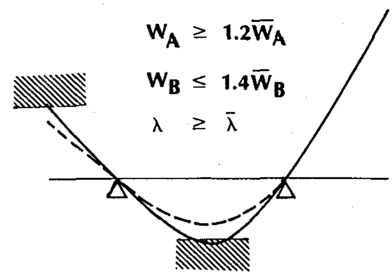

図２　構造変更前後の一次固有振動モード形（例1）

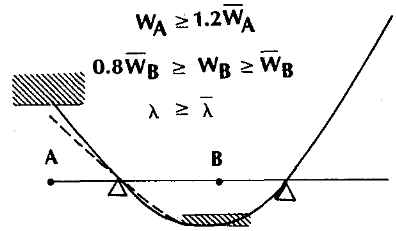

図３　構造変更前後の一次固有振動モード形（例２）

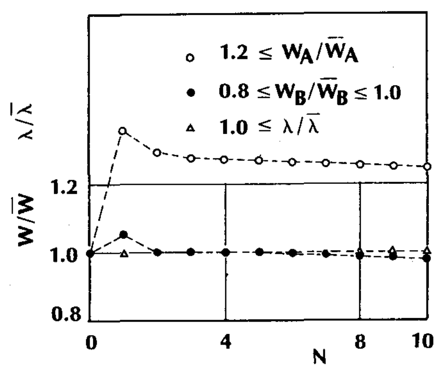

図４　構造変更反復と構造応答の収束（例２）

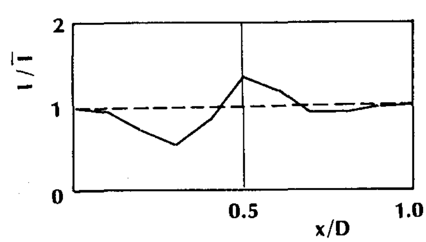

図５　構造変更前後の断面二次モーメント分布（例２）

下面平行部に上向きの一様分布荷重 24 MPa を受ける鋼製ヨークの厚さは 500 mm であり，材料定数は横弾性係数8x10[4] MPa，ポアソン比0.3とした．このとき平面ひずみ状態として梁部上表面の Misesの相当応力を境界要素法で解析する．解析では要素内で変位一定の境界要素を用い，使用要素数は 65 個である．また図中の AB 間の x,y座標を設計変数にとり，表面相当応力と重量の一階感度を境界要素解析と形状の面積変化により算出する[8]．このヨークの梁・柱結合部近傍の応力は 24 MPa 程度に小さいので，形状変更により応力を不等式制約条件により増加し，重量を指定量だけ等式制約条件により低減する構造変更シンセシスを行なう．

不等式制約条件では図6の網目部分外側輪郭上の表面相当応力の下限を 40 MPa に，上限を 80 MPa に設定する．そして同図モデルの網目部分の面積を初期面積の 86 % にする等式制約条件を付加する．下限のみを設定すると相当応力が大きくなりすぎたので上限を追加して設定した．本例における形状変更結果を図7に示す．式（1），（2）の不等式および等式制約条件には幾何計算による面積変化の表示式と境界要素解析により算出する相当応力変動の一次近似式を用いる．この一次近似の誤差補償の為に試設計の更新による形状変更の反復が必要となる．図8は，図6の C 点の相当応力および面積がその限界値および目標値へ単調に収束する状況を示す．AB 間の形状変更は6回の反復で収束している．各反復では特解のスラック変数に負のものがあり，非負のスラック変数を得るのに補解補正が必要であった．図中の応力プロットにおいて白丸は1回の補解補正のみで設計変数が定められた変更を，黒丸は2回の補解補正を要した変更を意味する．1回目の補解補正では負であった特解スラック変数を全て一般解で零とする．この補解補正を行なって正の特解スラック変数で負に転じるものが現われたとき，正であった特解スラック変数をふくめて全て零とする方法が2回目の補解補正である．

6．おわりに

本研究では，構造変更のシフト・シンセシスにおいて不等式制約条件と等式制約条件を統一的に取り扱う一般逆行列による定式を示した．この定式では構造

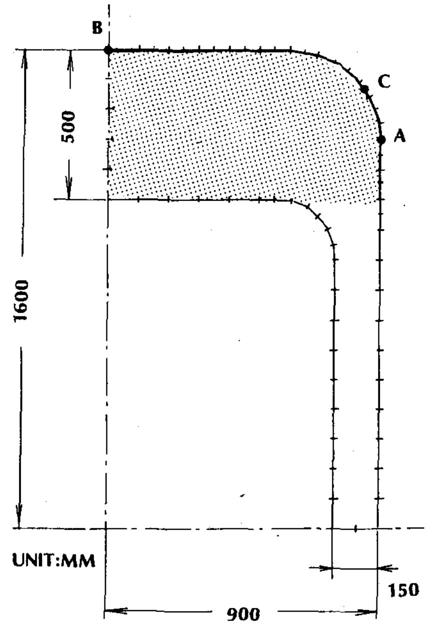

図6　ヨークの1／4モデルとその境界要素分割

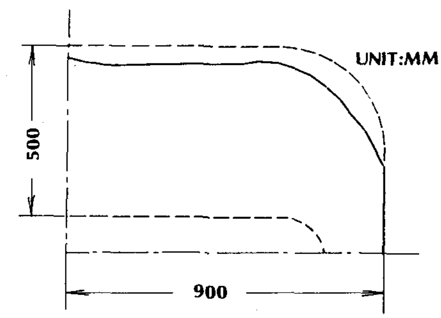

図7　変更後のヨーク形状（等式による重量低減）

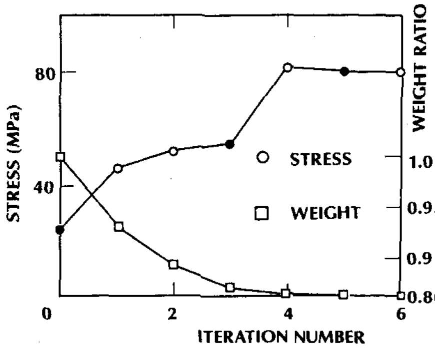

図8　形状変更の収束状況

応答の設計変数に関する一階感度を用いて，試設計の構造応答から構造応答の許容限界値または目標値への変化を一次式により表わす．そして非負であるスラック変数を用いて不等式制約条件の等式化を行い，また本来の等式制約条件を加えて設計変数とスラック変数を未知数とする非正方行列方程式を構成し，一般逆行列を利用して未知数を定めている．スラック変数を非負とするため，一般逆行列解の補解補正を加える必要がある．

数値計算例としては有限要素解析に基づいてはりの振動モード，振動数に制約を加えたときの断面二次モーメントの分布を求めるケースと，境界要素解析に基づいて，ヨークの表面相当応力を大きくして重量を一定値まで低減するとの構造シンセシスの数値計算例により，本定式の妥当性を検証した．

参考文献

1）Fletcher, R.編：Optimization (1969), p.57, Academic Press.
2）今野浩・山下浩：非線形計画法，(1988), p.237, 日科技連.
3）岩原光男・長松昭男：日本機械学会論文集　C編，56巻　523号 (1989)　p.612.
4）柳井晴夫・竹内　啓：射影行列・一般逆行列・特異値分解，(1983) p.49, 東大出版会
5）半谷 裕彦，川口健一：形態解析一般逆行列とその応用ー，(1991), p.38, 培風館
6）Penrose, R.： Camb. Philos. 52-1 (1956), p.17.
7）中桐 滋，鈴木 敬子：日本機械学会論文集　C編，53巻，496号 (1987), p.2439.
8）中桐 滋，鈴木 敬子：日本機械学会論文集　A編，55巻，509号 (1989), p.106.