

(20) 繊維強化積層複合材の最適構造設計
OPTIMAL STRUCTURAL DESIGN OF LAMINATED COMPOSITES

福永久雄* 関根英樹**
HISAO FUKUNAGA HIDEKI SEKINE

The paper presents an efficient optimization approach on symmetric laminates with respect to the layer thicknesses and the layer angles. Lamination parameters are introduced to reduce the degree of nonlinearity between the objective/constraints and the design variables. In the stiffness optimization problems, the lamination parameters are used as direct design variables and the feasible region of the lamination parameters constitutes a constraint function. The approach is applied to a buckling optimization of symmetric laminated plates under shear. In the stiffness and strength optimization problems, the lamination parameters are used as intermediate design variables. The approach generates a high-quality approximation and leads to an efficient one.

Key words : Structural Optimization, Composite Structures, Lamination Parameters, High-quality Approximation, Fiber Orientation Angle

1. まえがき

航空宇宙機や宇宙構造物等では、軽量化に対する強い要求により、炭素繊維を中心とした先進複合材料が使用されている。先進複合材からなる構造は、強い異方性のため、等方性材料からなる構造では生じない種々の剛性・強度特性を示す。設計においてこの異方性を有効に利用するためには、繊維角の最適化が重要となる。積層複合材構造の最適化に関しては、層厚については等方性構造の場合とほとんど同レベルまで最適化が可能となっている。一方、繊維角については、目的関数あるいは制約条件と繊維角との間の強い非線形性により、まだ十分に機能する最適化手法が確立されていない。

本報告では、前報¹⁾で示した積層複合材の最適化手法を発展させ、曲げ・捩りカップリングや伸び・せん断カップリングを有する対称積層板について、繊維角・層厚に関する効率的で安定した最適化の手法を検討する。剛性最適化問題では、積層パラメータを直接に設計変数に用いることにより、繊維角を設計変数とする場合に比べ効率的で安定した最適解が得られる。曲げ・捩りカップリングのある対称積層板のせん断座屈最適化に本手法を適用し、その有効性を示す。一方、剛性・強度最適化問題では、強度特性が各層の繊維角に関係するため、積層パラメータを直接に設計変数に用いることができないが、積層パラメータを間接的に用いる手法を提案する。対称積層板の振動および曲げに関する数値例より、本手法はかなり精度良い近似を作成できることを示す。

* 助教授 ** 教授 東北大学工学部機械航空工学科

2. 対称積層材の積層パラメータの特性

図1に示すように、一方向繊維強化材料を板厚方向に対称に重ねた積層材の構成関係式は、古典積層理論により次式で与えられる。²⁾

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ M_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} & 0 \\ 0 & D_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_j \\ \kappa_j \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 N_i 、 M_i は合力、合モーメント、 ϵ_j 、 κ_j は中央面の歪、曲率変化である。

積層材の最適設計問題では、設計変数として各層の板厚 h_k および繊維角 θ_k を用いる。積層パラメータを導入すると、面内および面外剛性は次式で示される。

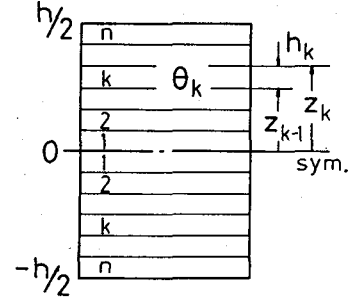


図1 積層材の繊維角と座標

$$\begin{aligned} (A_{11}, A_{22}, A_{12}, A_{66}, A_{16}, A_{26}) &= h [(U_1, U_1, U_4, U_5, 0, 0) \\ &\quad + (\epsilon_1, -\epsilon_1, 0, 0, \epsilon_3/2, \epsilon_3/2)U_2 + (\epsilon_2, \epsilon_2, -\epsilon_2, -\epsilon_2, \epsilon_4, -\epsilon_4)U_3] \\ (D_{11}, D_{22}, D_{12}, D_{66}, D_{16}, D_{26}) &= h^3/12 [(U_1, U_1, U_4, U_5, 0, 0) \\ &\quad + (\epsilon_9, -\epsilon_9, 0, 0, \epsilon_{11}/2, \epsilon_{11}/2)U_2 + (\epsilon_{10}, \epsilon_{10}, -\epsilon_{10}, -\epsilon_{10}, \epsilon_{12}, -\epsilon_{12})U_3] \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ は面内積層パラメータ、 $(\epsilon_9, \epsilon_{10}, \epsilon_{11}, \epsilon_{12})$ は面外積層パラメータと呼び、次式に示す繊維角の関数である。

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \int_0^1 \cos 2\theta(u) du, & \epsilon_2 &= \int_0^1 \cos 4\theta(u) du \\ \epsilon_3 &= \int_0^1 \sin 2\theta(u) du, & \epsilon_4 &= \int_0^1 \sin 4\theta(u) du \\ \epsilon_9 &= 3 \int_0^1 \cos 2\theta(u) u^2 du, & \epsilon_{10} &= 3 \int_0^1 \cos 4\theta(u) u^2 du \\ \epsilon_{11} &= 3 \int_0^1 \sin 2\theta(u) u^2 du, & \epsilon_{12} &= 3 \int_0^1 \sin 4\theta(u) u^2 du \end{aligned} \quad (3)$$

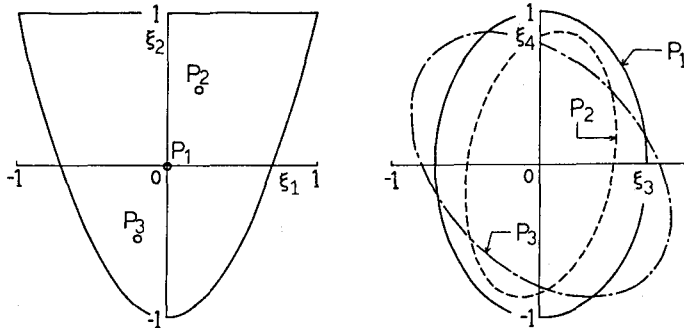


図2 積層パラメータ (ϵ_3, ϵ_4) の許容領域

($P_1: (\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0)$, $P_2: (0.2, 0.5)$, $P_3: (-0.2, -0.5)$)

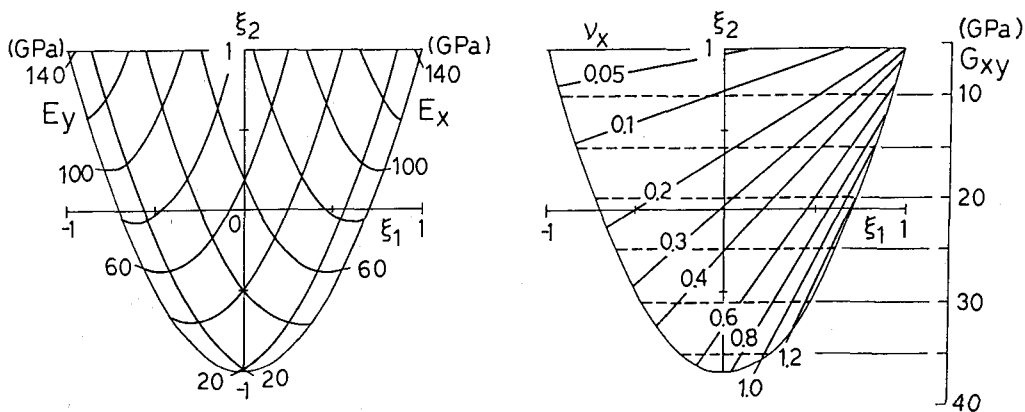


図3 CFRP材の弾性係数

表1 CFRP材の材料定数

$E_L = 142 \text{ GPa}$, $E_T = 10.8 \text{ GPa}$, $G_{LT} = 5.49 \text{ GPa}$, $\nu_L = 0.3$
--

(2)式において、面内剛性は面内積層パラメータの線形関数であり、面外剛性は面外積層パラメータの線形関数である。積層材の座屈、振動、撓みのような剛性特性は、 A_{11} と D_{11} の比較的シンプルな関数であるので、積層パラメータを最適化の設計変数として用いることができれば、層厚と繊維角を直接に設計変数に用いる場合に比べ、効率的で安定した解が求められる。積層パラメータを設計変数として用いるためには、積層パラメータの許容領域、および、積層パラメータに対応する積層構成決定法を必要とする。対称積層材の面内積層パラメータの間には次の関係が成り立つ。³⁾

$$2(1+\xi_2)\xi_3^2 - 4\xi_1\xi_3\xi_4 + \xi_4^2 \leq (\xi_2 - 2\xi_1^2 + 1)(1 - \xi_2) \quad (4)$$

(4)式の積層パラメータの関係を図2に示す。指定された (ξ_1, ξ_2) に対し、 (ξ_3, ξ_4) の許容領域は(4)式の円の内部で与えられる。 $+\theta_1$ 層と $-\theta_1$ 層の層厚の等しいバランス積層材では、 $(\xi_3, \xi_4) = (0, 0)$ となり、積層パラメータの許容領域は(4)式より $2\xi_1^2 - 1 \leq \xi_2 \leq 1$ となる。このとき、ヤング率、せん断係数、ポアソン比は (ξ_1, ξ_2) の関数で与えられ、図3にCFRP材の場合(材料定数は表1参照)の弾性係数を示す。

一方、バランスしていない一般的な対称積層材では、弾性係数は $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ の関数となる。 $(\xi_1, \xi_2) = (0, 0)$ のときの弾性係数とカップリング項の関係を図4に示す。カップリング項 (ξ_3, ξ_4) により、ヤング率、せん断係数は低下することが分かる。

面外積層パラメータの間にも、(4)式と同様に次の関係が成り立つ。

$$2(1+\xi_{10})\xi_{11}^2 - 4\xi_9\xi_{11}\xi_{12} + \xi_{12}^2 \leq (\xi_{10} - 2\xi_9^2 + 1)(1 - \xi_{10}) \quad (5)$$

(4)式あるいは(5)式の許容領域内の積層パラメータが与えられれば、対応する積層構成を4種類の繊維角からなる積層材で表すことができる。³⁾

3. 対称積層板のせん断座屈最適化

積層パラメータを設計変数に用いる例として、図5に示す周辺固定支持の対称積層板のせん断座屈最適化の問題を取り上げる。⁴⁾。座屈荷重は次式に Galerkin法を適用することにより求まる。

$$D_{11}w_{,xxxx} + 4D_{16}w_{,xxxxy} + 2(D_{12} + 2D_{66})w_{,xxxyy} + 4D_{26}w_{,xyyyy} + D_{22}w_{,yyyy} - 2\bar{N}_{xy}w_{,xy} = 0 \quad (6)$$

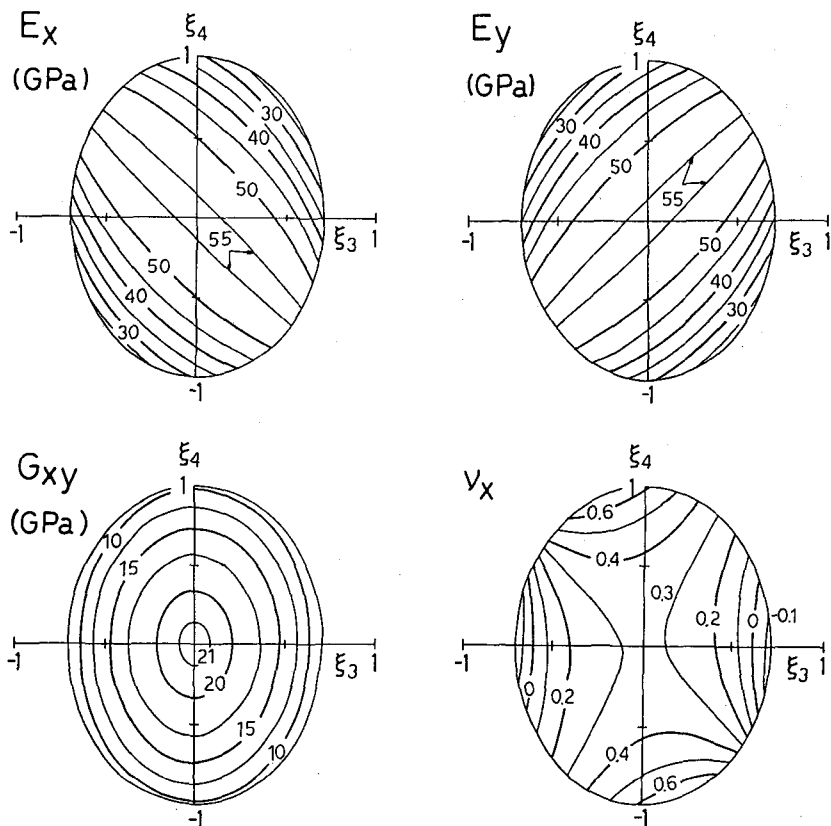


図4 弾性係数とカップリング項との関係

ここで、周辺固定の境界条件を満たす次の変位関数を用いる。

$$w = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn} \left\{ \cos \frac{(m-1)\pi x}{a} - \cos \frac{(m+1)\pi x}{a} \right\} \left\{ \cos \frac{(n-1)\pi y}{b} - \cos \frac{(n+1)\pi y}{b} \right\} \quad (7)$$

このとき、最適化問題は次のように定式化できる。

〔目的関数〕 $\max_{\xi_i} \Phi_{xy}(\xi_9, \xi_{10}, \xi_{11}, \xi_{12})$

〔制約条件〕 (5)式の許容条件式

ここで、 $\Phi_{xy} = 12b^2 \bar{N}_{xy} / \pi^2 Q_{zz} h^3$ 。最適化手法として、ADSプログラムの許容方向法⁹⁾を用いた。正方形板の場合について、3通りの初期値に対する最適値を表2に示す。異なる初期値から出発してほとんど同一の座屈応力が得られており、積層パラメータを設計変数に用いることにより安定した最適解が求まる。表2に示す正方形板の場合は、 -45° 一方向材が最適な積層構成となる。文献6)には、本手法を用いて、種々の縦横比を有する積層板について最適な積層構成が求められており、斜向した一方向材がせん断座屈荷重を最大にすることが示されている。

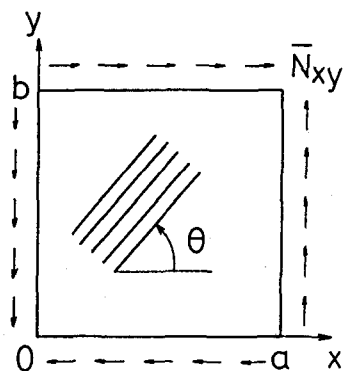


図5 対称積層板のせん断座屈

表2 正方形板の最適積層パラメータと座屈応力

初期値 ($\xi_9, \xi_{10}, \xi_{11}, \xi_{12}$)	最適積層パラメータ				初期値 Φ_{x0}	最大値 Φ_{x0}
	ξ_9	ξ_{10}	ξ_{11}	ξ_{12}		
(0.5, 0.5, 0.5, 0.5)	-0.01	-1.00	-1.00	0.23	44.3	141.5
(0, 0.1, 0, 0.1)	-0.02	-1.00	-1.00	0.03	82.4	141.9
(0.1, 0.9, 0.1, 0.9)	-0.17	-0.89	-0.98	0.32	69.8	140.2

4. 積層パラメータを中間変数に用いた積層材の剛性・強度最適化手法

前節で述べたように、座屈等の剛性最適化問題では、積層パラメータを直接に設計変数に用いることにより、効率的で安定した最適解を得ることができる。これは、剛性特性が繊維角とは強い非線形関係にあるのに対し、積層パラメータで表示したときはその非線形性がかかなり減少していることによっている。

一方、強度最適化問題では、通常の強度基準は各層の繊維角に関係するため、強度特性を積層パラメータで表示することはできない。本報告では、変位や応力を積層パラメータの線形近似により表すことにより、繊維角による線形近似より精度よい近似問題を作成できることを示す。

有限要素法等で離散化された構造の変形問題、あるいは、座屈・振動等の固有値問題は次式で与えられる。

$$Ku = P \quad (8)$$

$$Ku = \lambda Mu \quad (9)$$

ここで、設計変数は積層材の各層の繊維角とする。Kマトリックスは、繊維角に対してはかなり強い非線形性を有するが、積層パラメータによる表示では線形関係となる。いま、(8)式の変形問題で、繊維角が変動したときの変位の精度良い近似を検討する。まず、積層パラメータを用いて次式で近似する。

$$u(\xi + \Delta\xi) = u(\xi) + \sum_i (\partial u / \partial \xi_i) \Delta\xi_i \quad (10)$$

積層材の各層の繊維角と積層パラメータの関係は(3)式で示されており、たとえば、 i 番目層の繊維角が $\Delta\theta_i$ 変動したとき積層パラメータ ξ_i の変動 $\Delta\xi_i$ は次式で与えられる。

$$\Delta\xi_i = \xi_i(\theta_i + \Delta\theta_i) - \xi_i(\theta_i) = h_i (\cos 2(\theta_i + \Delta\theta_i) - \cos 2\theta_i) \quad (11)$$

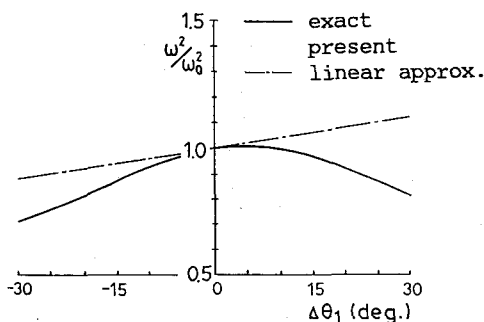
このように、設計変数としては各層の繊維角を用いるが、変位の近似は積層パラメータによる線形近似を用いることにより、精度のより良い近似問題を作成できる。(9)式で示す固有値問題のときも、固有値 λ を積層パラメータに関して線形近似する。

$$\lambda(\xi + \Delta\xi) = \lambda(\xi) + \sum_i (\partial \lambda / \partial \xi_i) \Delta\xi_i \quad (12)$$

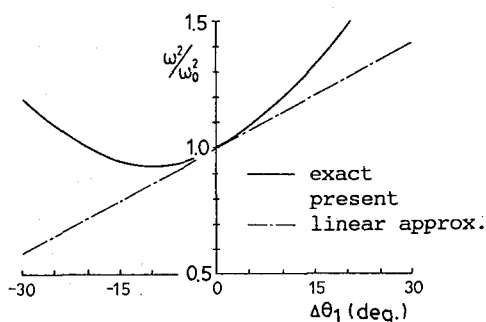
ここで、積層パラメータの変動 $\Delta\xi_i$ の計算には(11)式等の関係を用いる。

本手法の適用例として、まず、 $[(\pm\theta_1)/(\pm\theta_2)]_s$ CFRP積層板の振動問題を取り上げる。板は、周辺単純支持されており、曲げ・振りのカップリング項を無視できる直交異方性積層板と仮定する。基本固有振動数と繊維角の変動 $\Delta\theta_1$ の関係を無次元化して図6に示す。この問題では、 $\Delta\theta_1$ が変動しても基本振動モードは変化しないため、(12)式の近似は正解を与える。一方、繊維角の線形近似の精度は良くないことが分かる。

次に、 $[(\pm\theta_1)/(\pm\theta_2)]_s$ 周辺単純支持積層板が一様分布荷重を受けるときの板中央点での撓みと $\Delta\theta_1$ の関係を図7に示す。ここでも、直交異方性積層板の仮定を用いる。積層パラメータの線形近似(10)式は、繊維角の線形近似に比べかなり精度のよい近似となっていることが分かる。

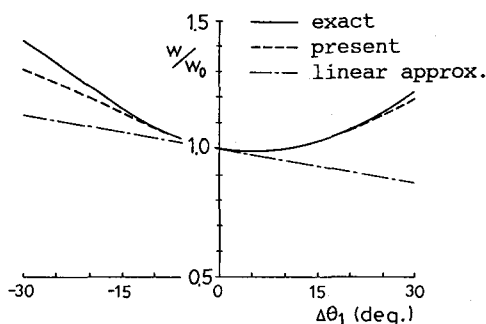


(a) $a/b = 1$, $\theta_1 = 40^\circ$, $\theta_2 = 90^\circ$

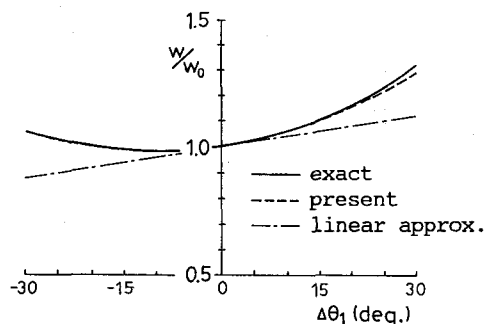


(b) $a/b = 2$, $\theta_1 = 10^\circ$, $\theta_2 = 60^\circ$

図6 $|(\pm\theta_1)/(\pm\theta_2)|_s$ 積層板の基本固有振動数



(a) $a/b = 1$, $\theta_1 = 40^\circ$, $\theta_2 = 90^\circ$



(b) $a/b = 2$, $\theta_1 = 10^\circ$, $\theta_2 = 60^\circ$

図7 一様分布荷重を受ける $|(\pm\theta_1)/(\pm\theta_2)|_s$ 積層板の中央点撓み

5. 結論

本研究では、積層複合材の繊維角最適化の手法として、積層パラメータを直接あるいは間接に用いる手法を検討した。剛性最適化問題では、積層パラメータを直接に設計変数に用いることにより、効率的で安定した最適解を得ることができる。また、強度・剛性最適化問題では、変位や固有値を積層パラメータで線形近似することにより、精度よい近似問題を作成できることを示した。

参考文献

- 1) 福永久雄, Vanderplaats, G.N. : 繊維強化積層複合材構造の最適化、システム最適化に関するシンポジウム講演論文集 (1989), p.169, also AIAA J., Vol.29 (1991), pp.641-646. Comput. & Struct. (1991), to appear, and JSME Int. J., Vol.34 (1991), pp.171-177.
- 2) Tsai, S.W. and Hahn, H.T. : Introduction to Composite Materials, Technomic Publ., (1980).
- 3) Fukunaga, H. and Sekine H. : Stiffness Design method of Symmetric Laminates using Lamination Parameters, submitted for publication.
- 4) 福永久雄、飯野明 : 積層パラメータの特性と積層材の最適設計への応用、第32回構造強度に関する講演会 (1990), p.104.
- 5) Vanderplaats, G.N. and Sugimoto, H. : A General Purpose Optimization Program for Engineering Design, Comput. & Struct., Vol.24 (1986), pp.13-21.
- 6) 飯野明 : 対称アンバランス積層板のせん断座屈特性と最適化、第15回複合材料シンポジウム講演要旨集 (1990), p.9.