

(18) 形状パラメータの推定値の信頼性に関する検討

RELIABILITY OF ESTIMATED SHAPE PARAMETERS

松井 邦人 西田 徳行

Kunihito MATSUI, Noriyuki NISHIDA

It is commonly practiced to confirm a shape of structure during construction and at the time of its completion by surveying some observation points from time to time.

Some degree of errors always exists in observed values. Assuming the errors involved in surveying are accidental errors, their effect on the estimated parameters in a shape equation is examined.

Accuracy of the estimates depends on number of observation points, their locations, accuracy of data at each observation point.

Choosing a circular cross section as a example problem, the location of its center and the radius are statistically estimated.

Key words : inverse problem, accidental error, statistical inference
variance of estimates

1. はじめに

構造物を建設するとき、完成した構造物がどの程度設計と一致しているかを確認することは通常行われている。検査の方法として、代表的な観測点を選び、その位置を測量し、その値を設計図面と比較して精度を多分に経験的に、直感的に判断している。しかし、完成系の精度は、観測点の位置、個数および測定精度などにより異なることが考えられる。従来判断では、必ずしも理論的、定量的に裏付けがなされているとは言えない。

本研究では、例題として簡単な円形断面を対象に、その形状を支配するパラメータ、すなわち円の中心座標と半径、が形状を確認するための測定点の位置、測定点の個数、測定精度によりどのように変化するかを、測定値のばらつきを考慮して求めようとするものである。このような問題は関数の形を与え、その中に含まれているパラメータを決定する、一種の回帰問題である。パラメータを決定するに当たり、通常このような問題を非線形最小二乗問題に帰着させている。最小二乗問題は、一種の最適化問題であることを考えると、本問題を回帰問題に関する知見だけでなく、最適化問題の知識をも活用することができる。

最適なパラメータの値は、最適問題の解に対応し、また誤差による最適解の変動は最適解の感度とみなす

* Ph.D. 東京電機大学教授 理工学部建設工学科

** 西松建設株式会社 技術開発部土木技術課

ことができる。測定回数が増えると測定値に対する信頼性が大きく成ってくる。したがって、最適解の感度の概念を利用し、測定回数、測定点の位置と個数、パラメータの推定精度の関係式を誘導する。円形断面を例題に選び、本手法を用いた計算結果を示している。

2. 観測方程式

形状の数学モデルを一般に式(1)で表せるものとする。

$$f(X, Y, C) = 0 \quad (1)$$

X, Y は観測値であり、 $C = \{c_j\}$, ($j=1, \dots, m$) は未知パラメータを表すベクトルである。ここに式(1)を形状方程式と呼ぶ。今観測点 i に置ける X, Y の観測値を X_i, Y_i とすると、式(1)より

$$f_i = f(X_i, Y_i, C) = v_i, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2)$$

v_i は、 X_i, Y_i 観測誤差を反映した式(1)の誤差である。誤差の2乗和は式(3)のようになる。

$$\Phi = \sum_{i=1}^n w_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n w_i f_i^2 \quad (3)$$

c_j の近似値を c_j^0 とする。 c_j^0 はあらかじめ何らかの方法で計算または推定しておく。 c_j^0 に対する補正量 d_j とすると最確値 $c_j^* = c_j^0 + d_j$ 。式(2)をテーラー展開し、1次の項まで採用すると、

$$v_i = f(X_i, Y_i, C^*) \cong f(X_i, Y_i, C^0) + \sum_{j=1}^m a_{ij} d_j, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4)$$

ただし、 $a_{ij} = (\partial f_i / \partial c_j)$ は、 $c_j = c_j^0$ における値とする。

今、 $V = \{v_i\}$, $F = \{f_i\}$, $D = \{d_i\}$, $A = [a_{ij}]$, ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$)と書くと、式(4)は、

$$V = F + A D \quad (5)$$

n 個の観測点の分散 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ が異なるとき、未知の単位重みの分散 σ_0^2 と重み p_i を用いて、 $\sigma_i^2 = \sigma_0^2 / p_i$ と置く。式(4)の両辺に $\sqrt{p_i}$ を掛ければ、

$$v_i^0 = \sqrt{p_i} f_i + \sum_{j=1}^m \sqrt{p_i} a_{ij} d_j \quad (6)$$

ただし、 $v_i^0 = \sqrt{p_i} v_i$ 。重み行列 P は $p_i = p_{ii}$ とする対角行列、また $P^{1/2}$ もまた $\sqrt{p_{ii}}$ を対角要素とする対角行列になる。式(5)の両辺に $P^{1/2}$ を掛けると、

$$P^{1/2} A D + P^{1/2} F = P^{1/2} V = V_0 \quad (7)$$

誤差の2乗和は、

$$V_0^T V_0 = D^T N D + 2 D^T U + F^T P F \quad (8)$$

ただし、 $N = A^T P A$, $U = A^T P F$ 。

$V_0^T V_0$ を最小とするための必要条件は、D で偏微分して、

$$N D + U = 0. \quad (9)$$

式(9) が正規方程式と呼ばれている。Dの最確値を D^* とすると、

$$D^* = - N^{-1} U = - (A^T P A)^{-1} A^T P F \quad (10)$$

観測値に対する補正値のうち、 $V_0^T V_0$ を最小とする値 V^* は、

$$V^* = F + A D^* = F - A^0 F \quad (11)$$

ただし、 $A^0 = A (A^T P A)^{-1} A^T P$ 。式(11)は、 $A^T P V^* = 0$ となる関係があるのは明かである。

3. 形状方程式の分散

未知パラメータD の代わりに、正しい値G が分かっているものとし、形状方程式の持つ真の誤差を $U = \{u_i\}$ とすると、

$$U = F + A G \quad (12)$$

誤差ベクトル Uの各要素の間に相関がないとすると、各要素の期待値は、 $\text{Exp.}[u_i] = 0$, $\text{Exp.}[u_i u_j] = 0$, ($i \neq j$),そして、 $\text{Exp.}[u_i^2] = \sigma^2 / p_i$ である。したがって、 $\text{Exp.}[U U^T] = \sigma^2 P^{-1}$ 。式(12)の両辺に A^T をかけて整理すると、

$$G = (A^T P A)^{-1} A^T P (U - F) \quad (13)$$

両式の両辺にA をかけ、式(12)よりG を消去すると、

$$U - A^0 U = F - A^0 F \quad (14)$$

$(A^0)^T A^0 = A^0$ の関係を考慮して式(14)より、

$$\begin{aligned} (U - A^0 U)^T P (U - A^0 U) &= (F - A^0 F)^T P (F - A^0 F) \\ \therefore U^T P U - U^T P A^0 U &= F^T P F - F^T P A^0 F \end{aligned} \quad (15)$$

また、 $\text{Exp.}[U^T P U] = \sum \text{Exp.}[p_i u_i^2] = n \sigma^2$ 、 $\text{Exp.}[U^T P A^0 U] = \sigma^2 \sum A_{ii}^0$ であるから、

$$\begin{aligned} \text{Exp.}[U^T P U - U^T P A^0 U] &= \sigma^2 \text{tr}(I - A^0) = \sigma^2 (n - m) \\ \therefore \sigma^2 &= \text{Exp.}[F^T P F - F^T P A^0 F] / (n - m) \end{aligned} \quad (16)$$

式(11)より、

$$V^{*T} P V^* = (F^T - F^T A^0) P (F - A^0 F) = F^T P F - F^T P A^0 F \quad (17)$$

今、 m_0 を、

$$m_0^2 = (F^T P F - F^T P A^0 F) / \text{tr.} (I - A^0) = V^{*T} P V^* / (n - m) \quad (18)$$

と置くと、上式と式(16)より

$$\text{Exp.} [m_0^2] = \sigma^2 \quad (19)$$

m_0^2 は分散 σ^2 の不偏推定量である。

4. 未知パラメータの最確値の分散

式(10)より、

$$D^* = - (A^T P A)^{-1} A^T P F$$

今F がU なる誤差を持つとき、 D^* の誤差を U_0 とすると、

$$U_0 = - (A^T P A)^{-1} A^T P U \quad (20)$$

したがって、

$$U_0 U_0^T = (A^T P A)^{-1} A^T P U U^T P A (A^T P A)^{-1} \quad (21)$$

$\text{Exp.} [U U^T] = \sigma^2 P^{-1}$ であるから、

$$\text{Exp.} [U_0 U_0^T] = \sigma^2 (A^T P A)^{-1} \quad (22)$$

今、 $\text{Exp.} [u_{0i}^2] = \sigma_{0i}^2$ 、 $\text{Exp.} [u_{0i} u_{0j}] = \sigma_{0i0j}$ とかくと、 σ_{0i}^2 は d_j^* の分散であり、 σ_{0i0j} は d_i^* と d_j^* の共分散である。行列 Σ_0 を D^* の共分散行列とすると、式(22)より、

$$\Sigma_0 = \sigma^2 N^{-1} \quad (23)$$

したがって d_j の標準偏差 m_{aj} は、 m_0 を用いて

$$m_{aj}^2 = m_0^2 N_{jj}^{-1} = \left(\sum_{i=1}^n p_i \sigma_i^2 \right) N_{jj}^{-1} / (n - m) \quad (24)$$

また、式(2)より、 $f_{,x_i} = (\partial f / \partial X_i)$ 、 $f_{,y_i} = (\partial f / \partial Y_i)$ とすると、

$$\sigma_i^2 = (f_{,x_i})^2 \sigma_{x_i}^2 + (f_{,y_i})^2 \sigma_{y_i}^2 \quad (25)$$

ここに、 σ_{x_i} と σ_{y_i} は、測点*i*におけるX座標とY座標の標準偏差である。

5. 例題

例題として、円形断面を対象に前述の理論を適用する。
円の方程式は次式で与えられる(図-1参照)。

$$f = (X - a)^2 + (Y - b)^2 - r^2 \quad (26)$$

ここに、*a*, *b*は円の中心を表す座標であり、*r*はその半径である。ここでは、円周上に測点を設定し、その各測点における測定値の平均値と標準偏差より*a*, *b*, *r*の値とその標準偏差を求める。

今、測点*i*におけるXおよびYの測定値をそれぞれ*X_i*, *Y_i*とする。このときの式(26)を便宜上*f_i*と記す。

また、 $(\partial f_i / \partial a) = -2(X_i - a)$, $(\partial f_i / \partial b) = -2(Y_i - b)$, $(\partial f_i / \partial r) = -2r$ より、

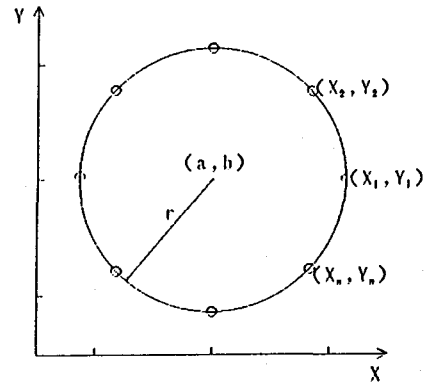


図-1 対象とした円形断面

$$A = \begin{bmatrix} -2(X_1 - a) & -2(Y_1 - b) & -2r \\ -2(X_2 - a) & -2(Y_2 - b) & -2r \\ \dots & \dots & \dots \\ -2(X_n - a) & -2(Y_n - b) & -2r \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

未知のパラメータ*a*, *b*, *r*の設計値をそれぞれ 5.000 m, 5.000 m, 5.000 m とし、*n* 個の測定値の標準偏差をすべて一定、 $\sigma_{x_i} = 0.001$ m, $\sigma_{y_i} = 0.001$ m とする。この値を基準値として、正規乱数を発生させ、測定値の代用とした。

表-1 測点を全円に等間隔で配置

n*	a		b		r	
	最確値(m)	標準偏差(m)	最確値(m)	標準偏差(m)	最確値(m)	標準偏差(m)
4	5.0004	7.07E-4	4.9994	7.07E-4	4.9994	5.00E-4
6	4.9994	3.33E-4	4.9987	3.33E-4	4.9999	2.36E-4
8	4.9990	2.24E-4	5.0000	2.24E-4	4.9999	1.58E-4
10	4.9991	1.69E-4	4.9998	1.69E-4	5.0002	1.20E-4

*nは測点数

表-2 測点を三分の一円に等間隔で配置

n*	a		b		r	
	最確値(m)	標準偏差(m)	最確値(m)	標準偏差(m)	最確値(m)	標準偏差(m)
4	4.9956	2.81E-3	4.9963	2.81E-3	5.0045	3.27E-3
6	4.9989	1.12E-3	4.9990	1.30E-3	5.0009	1.40E-3
8	4.9989	6.99E-4	4.9993	8.78E-4	5.0008	9.13E-4
10	4.9990	5.08E-4	4.9991	6.67E-4	5.0008	6.81E-4

*nは測点数

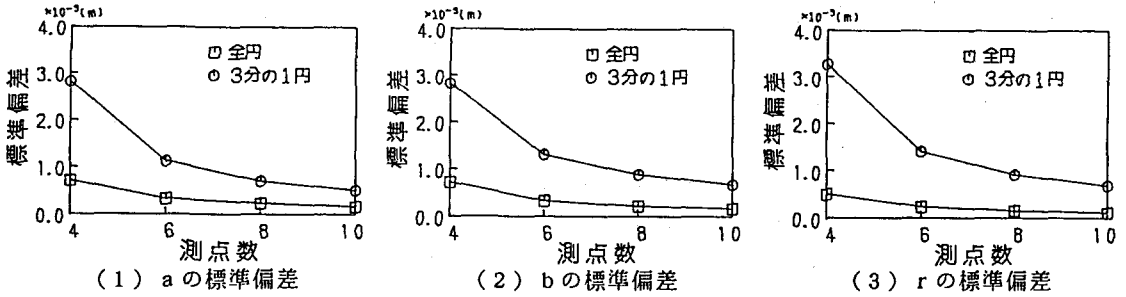


図-2 同定パラメータの標準偏差と測点数の関係

例題として2ケース考えることにする。ケース1は、全円に均等に測点を設けた場合あり、測点位置の個数は、4、6、8、10の4種類とする。また、ケース2として、三分の一円を対象に測点数を等間隔に4、6、8、10の4種類設けた。ケース1の結果を表-1に、また、ケース2の結果を表-2に示した。どちらの場合も、測点数が増加するにつれ、同定パラメータの標準偏差が減少していく傾向を示している。更に、ケース1とケース2の結果を比較するため、表-1、2を図-2に整理した。測点数が同じであるとき、ケース2の結果はケース1と比べて劣っている。このことは、また全円を対象とすると、測点を局所的に配置すると同定パラメータの精度が悪くなることを指摘している。

6. おわりに

形状関数が、測定パラメータと同定パラメータの陰関数として与えられる場合、ばらつきのあるデータから同定パラメータとその標準偏差を計算する式を誘導し、円形断面の形状確認に適用した。例題に関して、測定精度、測定位置と測点数と同定パラメータとの関係を明かにした。本論文を準備するに当たり、計算および図表の作成は、東京電機大学卒研究生、潮田和司君によるものである。ここにあらためて付記して感謝の意を表します。

参考文献

田島 稔、小牧和雄：最小2乗法の理論とその応用、東洋書店、昭和62年2月。