

(15) 線形多自由度系同定問題における
改良 S L P の開発

DEVELOPMENT OF MODIFIED SLP FOR IDENTIFICATION
OF A LINEAR CHAIN OSCILLATOR

辻原 治* 沢田 勉**

Osamu TSUJIHARA, Tsutomu SAWADA

The development of dynamic models is necessary for predicting the response of structural systems during earthquakes. Identification of existing structures excited by earthquake ground motions must help the development. In order to solve identification problems, some optimization technique is necessary. Successive Linear Programming (SLP) is often applied to solve nonlinear optimization problems for the simplicity of its algorithm. But, it has a defect on the speed of convergence in the vicinity of optimum solution. The authors have proposed modified SLP to overcome the defect. In this paper, first we introduce its algorithm for identification of a linear chain oscillator. Secondly, we show through numerical analysis that the speed of convergence is dramatically improved by applying modified SLP.

Key words : Identification, Linear chain oscillator,
Speed of convergence, Modified SLP

1. まえがき

本研究は、周波数領域で定式化された線形多自由度系の同定問題に、反復線形計画法 (SLP) を適用した際の、解の収束性を改善するための一手法を提案するものである。

各種振動系の同定問題に関しては、これまでに数多くの研究がなされており、解析手法についても種々提案されている^{たとえば1) - 5)}。振動系の同定問題は、一般に、観測記録より得られるある種の物理量とモデルの残差平方和を評価関数として、それを最小化するという最適化問題として定式化される。そのような最適化問題を解くにあたり、従来、最急降下法⁶⁾、DFP法⁷⁾、Gauss-Newton法⁸⁾、SLP⁹⁾等が用いられている。これらの手法のうちSLPは、アルゴリズムが簡単であるので、手軽に使えるという利点がある。とくに、振動系の同定問題のように、制約条件をもたない最小化問題では、各段階の解がLP (線形計画法) を用いなくとも容易に得られるので、非常に簡単である (後述)。また、著者らの経験によると、振動系の同定問題に限れば、初期値の影響を受けにくく、大域的な解が得られる可能性が高いという長所がある。一方、SLPは、他の方法に比べ、最適解近傍での収束性が悪いという欠点をもっている。

本研究では、せん断型線形多自由度系の剛性および減衰係数を直接同定する問題を対象として、改良SLPのアルゴリズムを示すとともに、数値計算により従来のSLPと比較する。

* 工修 和歌山工業高等専門学校講師 土木工学科 ** 工博 徳島大学助教授 工学部建設工学科

2. 同定問題の定式化

Fig. 1 に示すせん断型線形多自由度系において、基礎の変位を $x_0(t)$ 、質点の絶対変位を $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}^T$ とすると、系の運動方程式は次式で与えられる。

$$M \ddot{x}(t) + C \dot{x}(t) + K x(t) = f(t) \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 M 、 C および K はそれぞれ質量行列、減衰行列および剛性行列を表す。また、 $f(t)$ は次式で表される外力項のベクトルである。

$$f(t) = \{0, \dots, 0, c_1 \dot{x}_0(t) + k_1 x_0(t)\}^T \quad \dots\dots\dots (2)$$

式(1)の両辺をフーリエ変換し、角振動数 ω の入力に対する系の周波数応答 $X(\omega)$ を求めると次式ようになる。

$$X(\omega) = A(\omega)^{-1} F(\omega) \cdot X_0(\omega) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、

$$A(\omega) = [-\omega^2 M + i \omega C + K] \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$F(\omega) = \{0, \dots, 0, i \omega c_1 + k_1\}^T \quad \dots\dots\dots (5)$$

上式において、 $X_0(\omega)$ は $x_0(t)$ のフーリエ変換であり、 i は虚数単位である。

いま、基礎および任意の質点 r で観測記録が得られるものとする。これらの記録のフーリエ変換を $\tilde{X}_0(\omega)$ 、 $\tilde{X}_r(\omega)$ とすると、基礎に対する質点 r の周波数応答倍率 $\tilde{H}(\omega)$ が次式のように得られる。

$$\tilde{H}(\omega) = |\tilde{X}_r(\omega) / \tilde{X}_0(\omega)| \quad \dots\dots\dots (6)$$

これに対し、モデルの周波数応答倍率は系のパラメータ α の関数 $H(\omega; \alpha)$ として次式により求められる。

$$H(\omega; \alpha) = |\{A(\omega)^{-1}\}_r^T F(\omega)| \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $\{A(\omega)^{-1}\}_r$ は $A(\omega)$ の逆行列の第 r 行よりなるベクトルを表す。

したがって、同定問題は、式(6)と(7)の周波数応答倍率の残差平方和を最小化するような最適パラメータを決定する問題に置き換えられる¹⁰⁾。これを式で表せばつぎようになる。

$$S(\alpha) = \sum_{i=1}^{Nf} [H(\omega_i; \alpha) - \tilde{H}(\omega_i)]^2 \rightarrow \min \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 ω_i は離散点で与えた角振動数を表し、 Nf はその個数である。ただし、ここでは、同定すべきパラメータは剛性および減衰係数 ($k_j, c_j; j=1, 2, \dots, n$) とし、質点の質量 ($m_j; j=1, 2, \dots, n$) については既知量として扱う。

3. 改良SLPのアルゴリズム

評価関数をパラメータ $\alpha^{(r)}$ (反復過程の第 r 段階におけるパラメータの値) のまわりでテーラー展開し、2次の項まで考慮すると次式が得られる。

$$S^{(r+1)} \approx S^{(r)} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial S^{(r)}}{\partial \alpha_j} \Delta \alpha_j^{(r)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 S^{(r)}}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} \Delta \alpha_j^{(r)} \Delta \alpha_k^{(r)} \quad \dots\dots\dots (9)$$

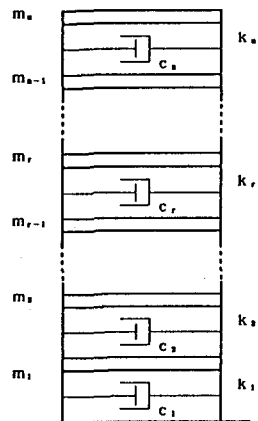


Fig. 1 System Model

ここに、 $N = 2n$ は同定すべきパラメータの数、 $S^{(r+1)}$ 、 $S^{(r)}$ はそれぞれ $S(\alpha^{(r+1)})$ 、 $S(\alpha^{(r)})$ であり、偏微分係数 $(\partial S / \partial \alpha_j)$ 、 $(\partial S / \partial \alpha_j \partial \alpha_k)$ は次式で計算できる。

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = 2 \sum_{i=1}^{N_I} [H(\omega_i; \alpha) - \tilde{H}(\omega_i)] \frac{\partial H(\omega_i; \alpha)}{\partial \alpha_j} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} = 2 \sum_{i=1}^{N_I} \frac{\partial H(\omega_i; \alpha)}{\partial \alpha_j} \frac{\partial H(\omega_i; \alpha)}{\partial \alpha_k} + 2 \sum_{i=1}^{N_I} [H(\omega_i; \alpha) - \tilde{H}(\omega_i)] \frac{\partial^2 H(\omega_i; \alpha)}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} \quad \dots\dots\dots (11)$$

従来の SLP では、式(9)の右辺第2項により、第 r 段階におけるパラメータ $\alpha^{(r)}$ の増分量 $\Delta \alpha^{(r)}$ を、move limit の制約もとに、LP を用いて決定する。ここに提案する改良 SLP は、式(9)が $\Delta \alpha$ の2次関数の形になっていることに着目し、これを SLP により解こうとするものである。以下に、改良 SLP のアルゴリズムを示す。説明の便宜上、式(9)をつぎのように示す。なお、定数項 $S^{(r)}$ は最小化とは無関係であるのでこれを省略する。

$$T = \sum_{j=1}^N D_j \beta_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N E_{jk} \beta_j \beta_k \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 $D_j = (\partial S / \partial \alpha_j)^{(r)}$ 、 $E_{jk} = (\partial^2 S / \partial \alpha_j \partial \alpha_k)^{(r)}$ 、 $\beta_j = \Delta \alpha_j$ 、 $\beta_k = \Delta \alpha_k$ である。上式における係数 D_j および E_{jk} は反復過程の第 r 段階において一度だけ計算しておけばよい。式(12)をテーラー展開して線形化すると

$$T^{(2)} \simeq T^{(1)} + \sum_{j=1}^N (\partial T / \partial \beta_j)^{(1)} \Delta \beta_j^{(1)} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで、偏微分係数 $\partial T / \partial \beta_j$ は次式で与えられる。

$$\partial T / \partial \beta_j = D_j + \sum_{k=1}^N E_{jk} \beta_k^{(1)} \quad \dots\dots\dots (14)$$

式(13)は、次の move limit の制約下に、LP により解くことができる。

$$-\zeta \beta_k^{(1)} \leq \Delta \beta_k^{(1)} \leq \zeta \beta_k^{(1)} \quad ; (k=1 \sim N) \quad \dots\dots\dots (15)$$

このとき、 β の初期値 $\beta^{(1)}$ は 0、 ζ は 0.001~0.02 程度の値とし、反復回数にともなって ζ を小さくすることが考えられる。

ところで、上述の LP 問題を解く際に、制約条件が式(15)の move limit のみであることを考慮すると、増分量 $\Delta \beta_k$ は以下のように簡単に求められる。

$$\begin{cases} (\partial T / \partial \beta_k)^{(1)} \geq 0 & \text{のとき} \quad \Delta \beta_k^{(1)} = -\zeta \beta_k^{(1)} \\ (\partial T / \partial \beta_k)^{(1)} < 0 & \text{のとき} \quad \Delta \beta_k^{(1)} = \zeta \beta_k^{(1)} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (16)$$

これは、式(13)の線形関数を最小にするには、偏微分係数 $(\partial T / \partial \beta_k)^{(1)}$ の符号と反対方向に $\Delta \beta_k$ を move limit の制約まで動かせばよいことを意味する。したがって、LP を用いることなく、 β_k の増分量 $\Delta \beta_k$ が求められるので、問題は非常に簡単になる。このようにして得られた β の最適値 β^* を、 $\alpha^{(r)}$ における最適な変化量 $\Delta \alpha^*$ として α がつぎのように修正される。

$$\alpha^{(r+1)} = \alpha^{(r)} + \beta^* \quad \dots\dots\dots (17)$$

上述の改良 SLP のアルゴリズムをフローチャートで示せば、Fig. 2 のようになる。

ここに、 j_{max} は $\Delta\alpha$ の最適値 $\Delta\alpha^*$ を求めるためのローカルな繰り返しの上限であり、式(15)の α^* の値によって決められる。

4. 数値計算および考察

5自由度系を対象として、SLPおよび改良SLPを用い、系の剛性係数と減衰係数を同定する。ただし、ここでは実際の観測記録は用いず、設定したモデルの周波数応答倍率を式(3)により計算し、これを式(8)の $H(\omega)$ として用いることとする。モデルの諸元をTable 1に示す。以後、これに示す値をパラメータの真値とよぶこととする。Fig. 3に、基礎の振動加速度に対する質点1（最下の質点）の絶対加速度の周波数応答倍率を、0.1~10Hzの間を100等分した振動数点について計算したものを示す。同定に際しては、これを目標関数とした。

以下に解析結果を示す。

(1) SLPのみ用いた場合

SLPのみ用いた場合の同定結果をFig. 4、5に示す。剛性および減衰係数の初期値はともに真値の1.5倍の値とした。また、誤差基準 ϵ は 10^{-4} とし、反復計算は100回までとした。反復過程において、解が振動する場合には、move limit が徐々に小さくなるような操作をしている。Fig. 4には、剛性および減衰係数の収束状況を示す。図において、横軸は反復計算の回数であり、図中の細線はパラメータの真値に対応している。図より、剛性係数については40回程度の反復計算でほぼ真値に収束しているものの、減衰係数については、100回の反復計算でもまだかなりの誤差があることがわかる。Fig. 5は、反復過程における評価関数値を示したものである。横軸は反復計算の回数であり、縦軸は評価関数値（対数）である。100回の反復計算でも、評価関数値（周波数応答倍率の残差平方和）は 10^{-2} 程度で、いまだ小さい値になっていない。とくに、誤差がある程度小さくなってからの収束速度が遅くなっている。このように、SLPは最適解近傍における解の収束性に問題があることがわかる。

(2) SLPと改良SLPを併用した場合

反復過程の初期の段階（はじめの15回）でSLPを用い、その後改良SLPを用いることにより、前述の5自由度系の同定を行う。初期値や誤差基準等の条件は同様である。Fig. 6にパラメータの収束状況を示す。剛性および減衰の各パラメータが30回程度の反復計算でほぼ真値に収束している。このときの評価関数値も誤差基準を満足していることが、Fig. 7よりわかる。

以上の数値計算から、改良SLPを用いることにより、解の収束速度が大幅に改善されることがわかった。

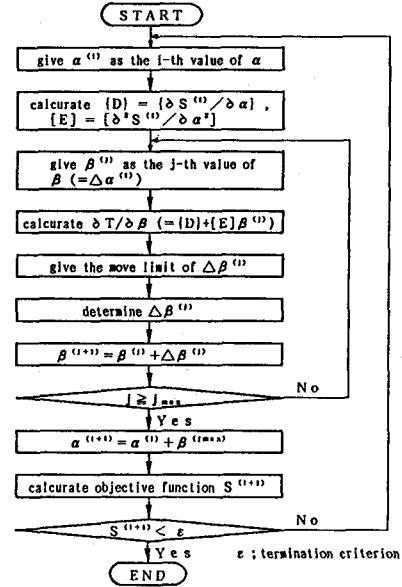


Fig. 2 Flow Chart of Modified SLP

Table 1 System Parameters

i	m_i [t·s ² /cm]	k_i [t/cm]	c_i [t·s/cm]
1	0.50	500.0	2.50
2	0.50	450.0	2.25
3	0.50	400.0	2.00
4	0.50	350.0	1.75
5	0.50	300.0	1.50

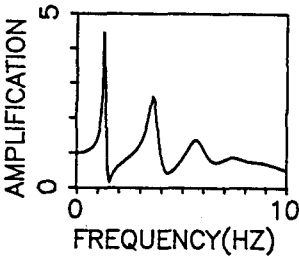


Fig. 3 Transfer Function

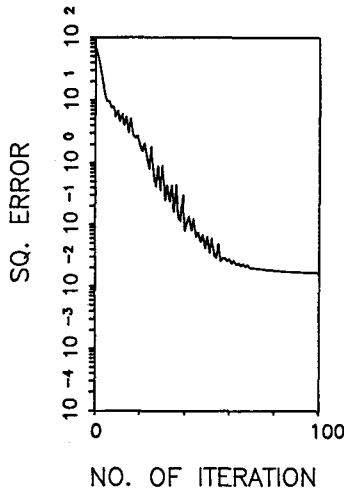


Fig. 5 Value of Objective Function (by SLP)

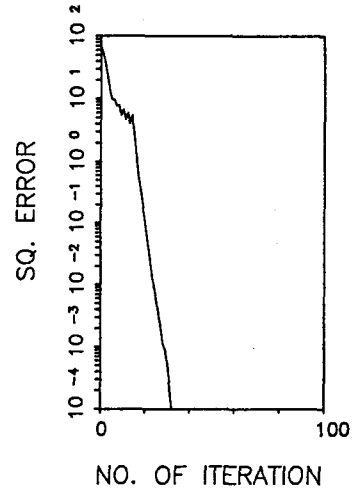


Fig. 7 Value of Objective Function (by Modified SLP)

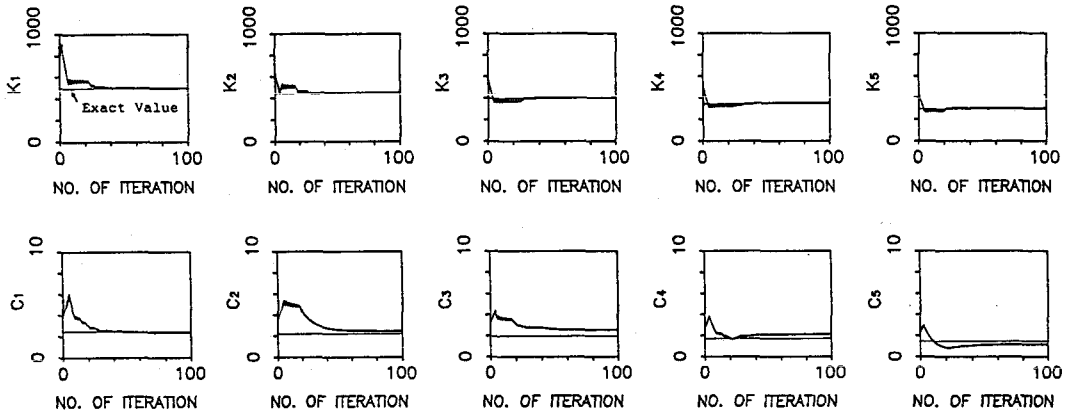


Fig. 4 Convergence Process of Spring Constants and Damping Coefficients (by SLP)

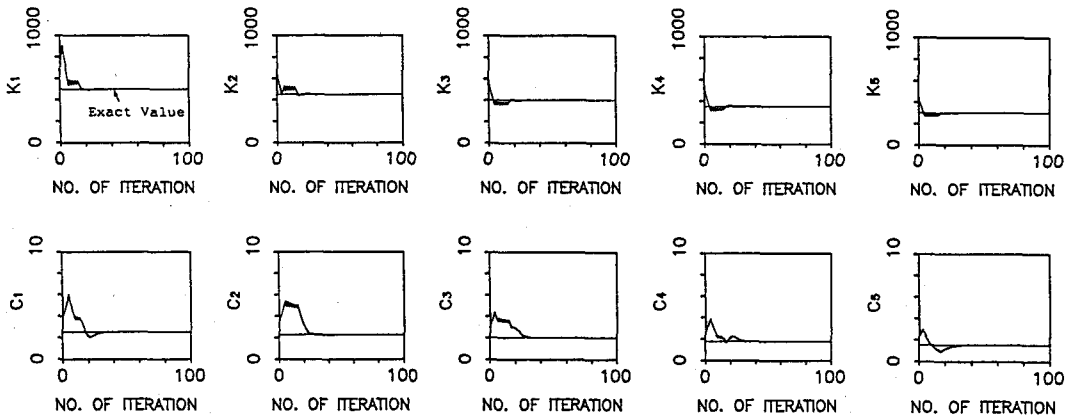


Fig. 6 Convergence Process of Spring Constants and Damping Coefficients (by Modified SLP)

5. 結論

本研究では、周波数領域で定式化された線形多自由度系の同定問題に、反復線形計画法 (S L P) を適用した際の、解の収束性を改善するための一手法、改良 S L P を提案した。この手法は、評価関数を 2 次形式で近似し、その最小点を S L P により求めようとするものである。

本研究で得られた結果を要約すると以下ようになる。

(1) S L P および改良 S L P では、最小化すべき評価関数の 1 次と 2 次の偏微分係数のみが必要であり、とくに線形多自由度系の同定問題のように制約条件をもたない最適化問題では、L P を用いる必要がなく、アルゴリズムが非常に簡単になる。

(2) 数値計算より、S L P と改良 S L P を併用することで、解の収束速度が大幅に向上することを示した。

参考文献

- 1) Udwadia, F. E. and Shah, P. C.: Identification of Structures Through Records Obtained During Strong Earthquake Ground Motion, ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 98, No. 4, PP. 1347-1362, 1976
- 2) 土岐・佐藤・生木: 自己回帰・移動平均法による構造物の動的パラメータの推定, 京都大学防災研究所年報, 第 21 号, B-2, pp. 1-12, 1978 年
- 3) Beck, J. L. and Jennings, P. C.: Structural Identification Using Linear Models and Earthquake Records, EESD, Vol. 8, pp. 145-160, 1980
- 4) Mcverry, G. H.: Structural Identification in the Frequency Domain from Earthquake Records, EESD, Vol. 8, pp. 161-180, 1980
- 5) 星谷・斉藤: 拡張カルマン・フィルターを用いた同定問題の各種振動系への応用, 土木学会論文報告集, 第 339 号, pp. 59-67, 1983 年
- 6) 太田: 地震工学への最適化法の適用, 日本建築学会論文報告集, 第 229 号, pp. 35-41, 1975 年
- 7) 辻原・沢田・谷: 鉛直アレー観測記録による地盤振動特性値の同定, 構造工学論文集, Vol. 36A, pp. 747-756, 1990 年
- 8) Matsui, K. and Kurita, T.: Sensitivities of Parameters due to Model Errors and Measurement Noises in Structural Identification Problems, Proc. of JSCE, No. 422/I-14, pp. 145-157, 1990
- 9) 辻原・沢田・神谷・阿世賀: セン断型線形多自由度系の同定問題における解の収束性と精度について, 第 7 回地震工学シンポジウム, pp. 1555-1560, 1986 年
- 10) 沢田・辻原・阿世賀・神谷: セン断型線形多自由度系の同定問題の周波数領域における解析法に関する一考察, 構造工学論文集, Vol. 32A, pp. 739-748, 1986 年