

(7) 感度解析による構造系と制御系の最適設計

OPTIMUM DESIGN OF STRUCTURE AND CONTROL SYSTEMS

梶原逸朗*

長松昭男**

Itsuron KAJIWARA, Akio NAGAMATSU

The authors show an approach of optimal design for simultaneous optimization of structure and control systems, firstly. The dynamic characteristics of the regulator system is optimized against given disturbances. Modification is performed by the sensitivity analysis in which the sensitivities with respect to both structural and control parameters are used simultaneously. The proposed method is applied to a multi-degrees of freedom system model. Next, the authors show a method to design the optimum control system toward flexible structural systems. The mechanical structural system can be modelled by identifying the spatial matrices from frequency response functions experimentally measured. This report proposes an optimization method of the control system which guarantees the stability to the actual system which is also identified system with large degrees of freedom. The characteristics of both identified and actual system are simultaneously optimized by the proposed method based on sensitivity analysis and nonlinear programming.

Key Words: Optimum design, Vibration, Control, System Identification

1. 緒言

本論文では、感度解析を用いることにより、制御系と構造系の設計変数を同時に最適化する方法¹⁾を示す。すなわち、従来の評価関数を用いた時刻歴応答の最適化と、希望する周波数特性を実現させるための最適化の両方を、感度解析^{2)~8)}により行う方法を示す。本手法により、構造系と制御系を同時に記述した統合システムに対して最適レギュレータ理論を適用し、感度解析を用いて、統合システムの周波数特性を支配する周波数応答関数 (Frequency Response Function, 以下FRF) のゲイン、極および零点の変更を行い、希望する動特性を実現させることを試みる。本手法の特徴は、最適制御理論における評価関数を最小にするという性質を保ちつつ、統合システムの動特性の最適化を行うことである。

そして、本論文では構造物の振動制御を対象とし、構造物の振動特性を支配する特性行列 (質量行列、減衰行列および剛性行列) を実験データに基づいて同定⁹⁾することにより、状態方程式を記述し、制御系を設計する方法を示す。すなわち、まず構造物の周波数応答関数 (FRF) を実験により求め、そのデータをもとに、採用固有モードで構成される小自由度のモデルとして、構造系を記述する。そして、このモデルをもとにして最適制御理論により制御系を設計する。このように、実験により構造物のFRFデータを測定しさえすれば、柔軟構造物の物理特性を意識せずに、設計者の要求する自由度を有するモデルの数学的記述が可能となり、これを用いて制御系を設計できることが本手法の特徴である。さらに、本論文では小自由度で設計した最適制御則を大自由度として同定した実システムに適用し、その極配置を参照しながら、感度解析による最適設計法を用いて、高次の固有モードでの安定性をも保証する最適状態フィードバック則を実現する方法を提案する。

* 工修 東京工業大学助手 工学部機械工学科

** 工博 東京工業大学教授 工学部機械工学科

2. 構造系と制御系の同時最適設計法

2.1 感度解析に基づく同時最適設計¹⁾

n 自由度振動系の運動方程式は次式で示される。

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = B_s u + D_s f \quad (1)$$

ここで、 x は n 次元の変位ベクトル、 M 、 C 、 K はそれぞれ $(n \times n)$ の質量行列、減衰行列および剛性行列である。制御入力と外乱の数をそれぞれ n_u 、 n_f とする。 u と f は、それぞれ n_u 次元の制御入力と n_f 次元の外乱ベクトルであり、 B_s 、 D_s はそれぞれ $(n \times n_u)$ の制御入力行列、外乱に関する $(n \times n_f)$ の入力行列である。(1) 式を状態変数方程式で表すと次式になる。

$$\dot{q} = Aq + Bu + Df \quad (2)$$

ここで、

$$q = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B_s \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}D_s \end{bmatrix}$$

ここでは、次の状態フィードバックを行うことにより制御系を構成する。

$$u = -Fq \quad (4)$$

外乱 f として、次式に示す白色雑音が作用する場合を想定する。

$$E[f(t)f(t-t_0)^T] = \delta(t_0)V \quad (5)$$

ここで、 V はこの白色雑音のインテンシティ行列である。次式に示す状態変数と制御入力に関する 2 次形式評価関数を考える。

$$J_q = E[q^T Q q] \quad (6)$$

$$J_u = E[u^T R u] \quad (7)$$

(6)、(7) 式に含まれる Q 、 R はそれぞれ状態変数と制御入力に関する重み行列である。両評価関数の和 $J = J_q + J_u$ を最小にする最適レギュレータ問題を解くことにより、(4) 式におけるフィードバックゲイン F を計算する¹⁾¹⁰⁾。

感度解析を最適レギュレータに適用し、最適レギュレータのもつ特徴を維持したまま、その動特性を最適にすることを試みる。すなわち、構造系の設計変数と制御系の設計変数に関する感度を計算し、閉ループ系の動特性が最適になるように、両設計変数を同時に最適化する。ここで、動特性としては上述の 2 次形式評価関数および閉ループ系の周波数応答関数、極および零点を用いており、最適設計ではこれらの感度を利用している。これらの感度の計算法と最適設計法については、著者らの文献(1)を参照されたい。

2.2 適用例

図 1 に示す 3 自由度系モデルについて考える。質点 3 に制御入力作用し、質点 2 に外乱励振力が作用する。まず、質点 2 に白色雑音の外乱が作用する場合を考える。評価関数として質点 3 の変位応答の自乗平均値と制御入力の自乗平均値

$$J_q = E[x_3^2] \quad (8)$$

$$J_u = E[u^2] \quad (9)$$

を考える。 J_q を低減する目的で最適化を行った例を図 2 に示す。同図 (a) は制御系のパラメータ (2 次形式評価関数に含まれる重み行列の成分) のみを設計変数としたときの J_q 、 J_u の収束過程である。制御系の設計変数の

み採用する場合、 J_q 、 J_u は trade-off の関係にあり、前者を低減させたとき後者の増大は避けられない。しかし、同図(b)は制御系の設計変数に加えて構造系の設計変数(この場合は図1の各質量、各剛性とす)をも同時に変更したときの結果で、 J_u の大幅な低減が実現されている。このときの質点3の変位応答の変化を図3に示し、外乱と質点3の変位の間の周波数応答関数を図4に示す。破線が変更前、実線が変更後の特性であるが、後者の特性の応答レベルが低減していることがわかる。さらに J_u の低減を試みた結果、 J_q 、 J_u の両方を低減させるためには、制御系の設計変数の変更よりも構造系の設計変数の変更が優先されるという結果が得られた。

次に、質点2に正弦波状の外乱が作用する場合を考える。図4から28Hz付近に極が存在し、この周波数成分をもつ外乱が作用するとシステムの安定性が悪化する可能性がある。そこで、28Hz付近の極を高周波数領域に移動し、同時に23Hz付近に存在する零点を外乱周波数に近づける変更を試みる。構造系と制御系の同時最適設計を行った後の周波数応答関数を図5の実線で示す。また、28.5Hzの正弦波状の外乱が作用したときの質点3の時刻歴応答の変化を図6に示すが、外乱に対する安定性が改善されていることがわかる。

3. 特性行列同定法に基づく最適制御系設計法^{11)~13)}

3.1 本手法の概念

提案する方法の概念を図7に流れ図として示す。本手法のアプローチは、構造物のFRFを振動試験により測定し、それに基づいて特性行列の同定を行い、システムのモデル化を行う。そして、この同定システムに最適レギュレータ理論を適用し、最適状態フィードバック則を求める。しかし、同定モデルは高次のモード成分

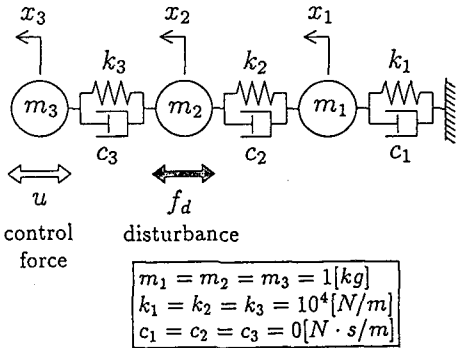


図1 3自由度系モデル

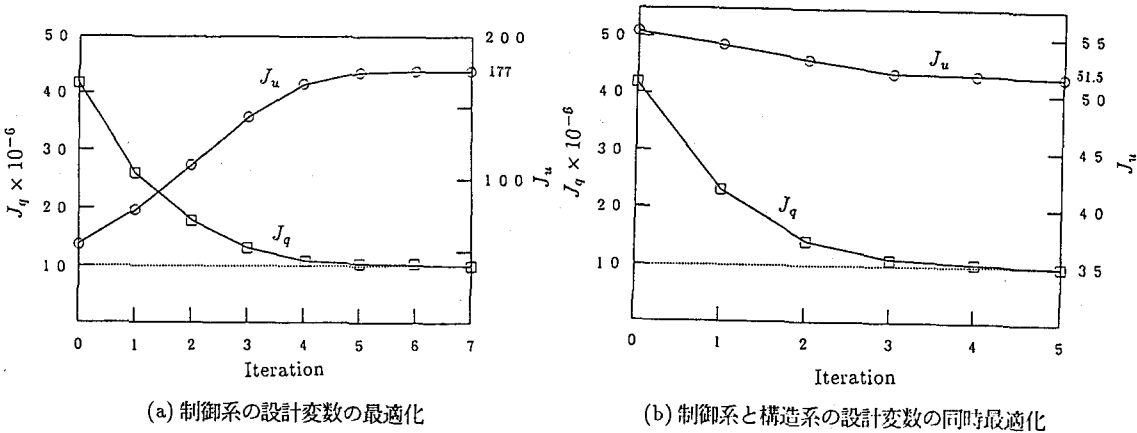


図2 J_q 、 J_u の収束過程

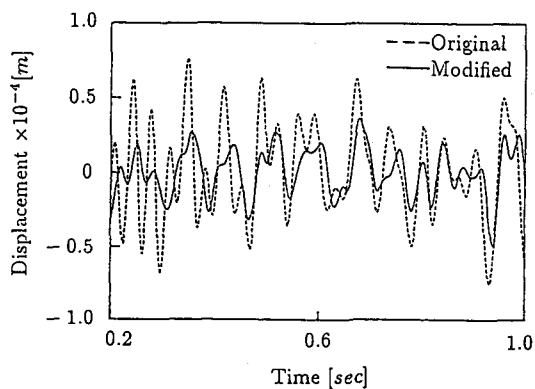


図3 質点3の変位応答の変化

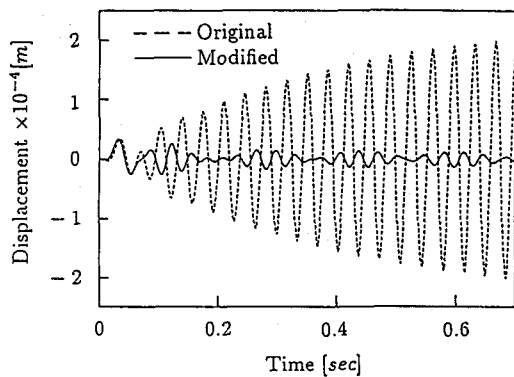


図6 質点3の変位応答の変化

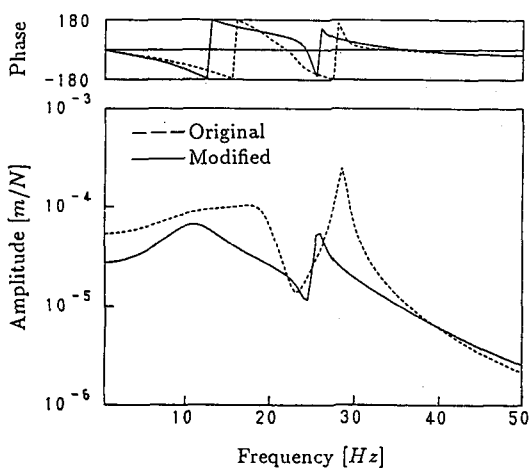


図4 質点3のFRF

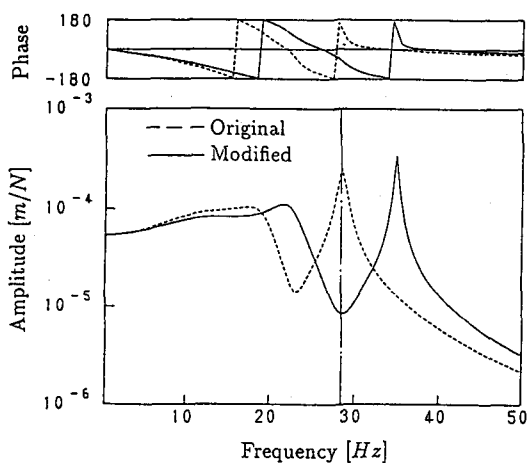


図5 質点3のFRF

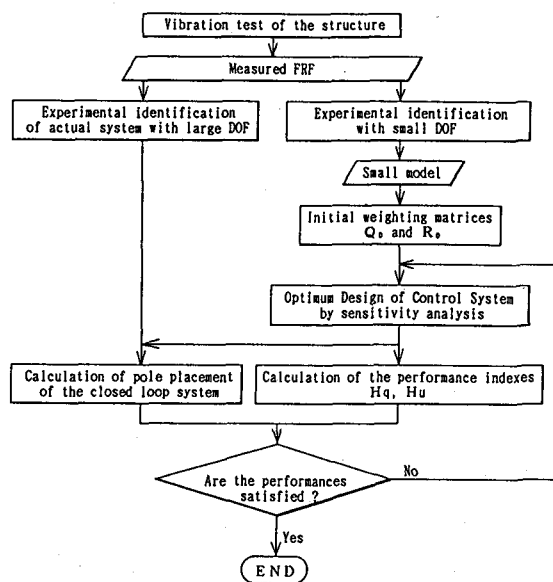


図7 本研究の流れ図

を無視しており、この制御則を実構造物に適用する際には、システムの安定性は保証できない。そこで、最適制御系を設計するために同定したシステムの自由度よりも十分大きい自由度で同定したシステムを実システムとして作成する。そして、小自由度システムで設計した制御則を大自由度の実システムに適用し、閉ループシステムの極配置を参照することによりシステムの安定性、最適性を評価し、設計指標を満たすように制御則の最適化を行う。ここで、最適化すべき目的関数としては、状態変数および制御入力に関する2次形式評価関数、実システムにおける極配置とし、設計変数としては、2次形式評価関数に含まれる重み行列 Q 、 R とする。本手法の詳細については、著者らの文献(11)を参照されたい。

3.2 感度解析による最適設計法

システムの動特性と安定性を最適化するための状態フィードバック則を決定する方法について考える。ここでは、同定されたシステムと実システムの動特性の設計変数に関する感度を用いることにより、最適化を行う方法を示す。動特性としては、同定システムにおける、状態変数および制御入力に関する自乗平均値を考える。そして、安定性を保証するために実システムの極配置についても考慮する。設計変数としては、(6)、(7)式に含まれる評価関数の重み行列 Q 、 R の成分を考える。しかし、 Q 、 R の成分を任意に変更してしまうと、 Q および R が正定でない場合の最適解の存在が問題となるので、ここでは両重み行列を

$$Q = L^T L \quad (10)$$

$$R = U^T U \quad (11)$$

とおき、 L 、 U の成分を実際の設計変数とする。このようにすれば、 Q および R の(半)正定値性は最低限保証されることになる¹⁴⁾。

最適化を行うための動特性としては、前述のように同定されたシステムの状態変数と制御入力に関する自乗平均値 H_q 、 H_u とする。

$$H_q = E[q_e^T \Gamma q_e] \quad (12)$$

$$H_u = E[u^T \Pi u] \quad (13)$$

ここで、 Γ および Π は重み行列である。

実システムの安定性を保証するために、閉ループ系の極(固有値) $s_i (i = 1, \dots, 2N: N$ は実システムの自由度)の配置も考慮する。

すなわち、最適化問題としては、応答性を向上させるために H_q の最小化を目的とする。そして、 H_q とtrade-offの関係にある H_u に関しては、その上限値の制約を与え、さらに実システムの安定性を保証するために実システムにおけるすべての極の実部が負になる制約を与える。すなわち、 $\alpha > 0$ 、 $\beta_i < 0 (i = 1, \dots, 2N)$ として、制約付き最適化問題として記述すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \min \quad & H_q \\ \text{Subj.} \quad & \begin{cases} H_u - \alpha < 0 \\ \text{Re}(s_i) - \beta_i < 0 \quad (i = 1 \sim 2N) \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

このとき、(10)、(11)式の L 、 U の最適解を、準ニュートン法と乗数法との組合せによる非線形最適化法を用いて探索する¹⁵⁾。本手法の適用の際には、2.の場合と同様に目的関数に含まれる H_q 、 H_u および s_i の設計変数に関する1次微係数(感度)を用いる。また、2次の感度行列(ヘッセ行列)の近似行列としてBFGS公式を採用する。これらの感度は、最適レギュレータを構成した状態での微係数を採用している。

3.3 適用例

図8に示される平板を制御対象とする。長さ450mm、幅120mm、厚さ4mmのステンレス鋼板で一端固定である。ここでは、5次のモードまで制御することを目的とし、参照点を図8に示したように5カ所を選ぶ。この平板の X 方向の振動を、点1と点5に制御入力を加えることによって振動制御を行う。また、最適レギュレータ

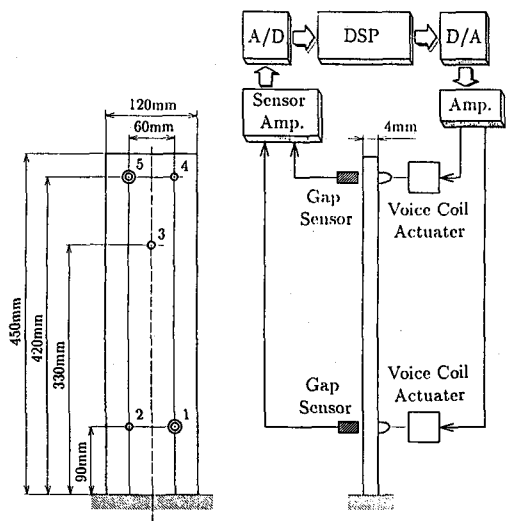


図 8 制御対象と実験装置の構成

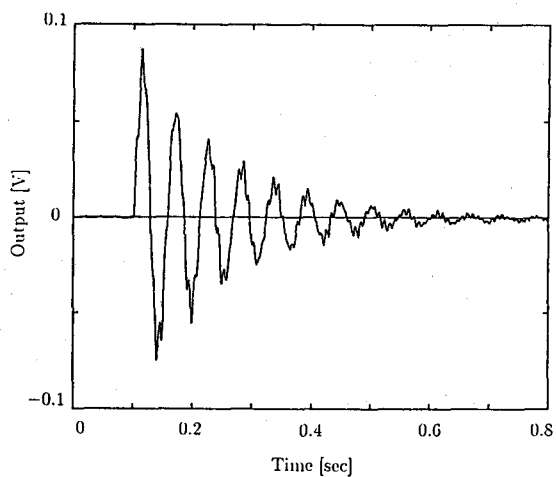


図 9 非制御時の点 5 における衝撃応答

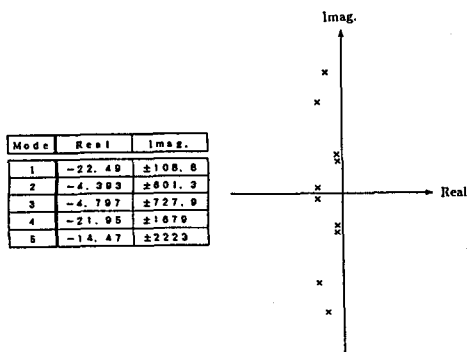


図 10 初期制御による閉ループ系の極配置

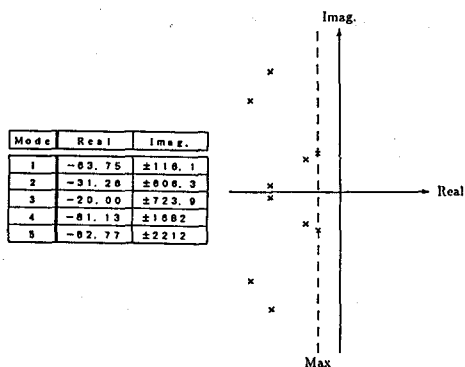


図 12 最適制御による閉ループ系の極配置

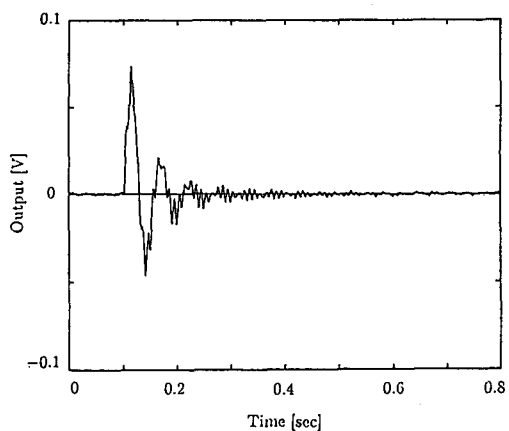


図 11 初期制御による点 5 の衝撃応答

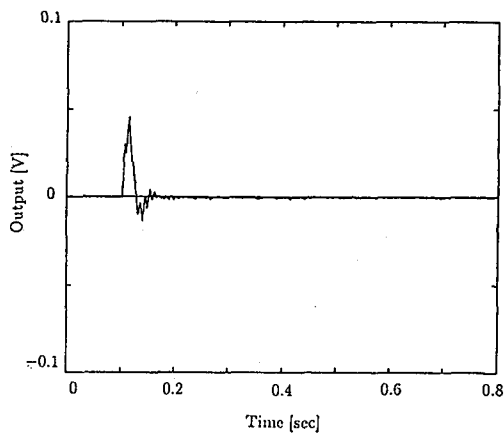


図 13 最適制御による点 5 の衝撃応答

を構成するための自由度は2とし、点1、5を参照点とする。すなわち、点1、5の状態量については、ギャップセンサーを用いて変位を測定することになる。そして、DSP内部でサンプリング周波数が20kHzの高速演算が行われ、ボイスコイルアクチュエータに加える制御入力 u が得られる。

制御なしで、点5に衝撃力を加えたときの点5の変位センサー出力を図9に示す。まず、最適制御系を設計するための2自由度システムと、実システムとして5自由度のシステムを同定する。評価関数 H_q 、 H_u はそれぞれ節点1と節点5の変位応答と制御入力の自乗和の平均値とする。

$$H_q = E[x_1^2 + x_5^2] \quad (15)$$

$$H_u = E[u_1^2 + u_5^2] \quad (16)$$

これにより、重み行列の初期値を与え、最適制御系を構成したときの両評価関数の初期値 H_q^0 、 H_u^0 は次式のようにになった。

$$H_q^0 = 70.22 \quad (17)$$

$$H_u^0 = 11.86 \quad (18)$$

このときの制御則を、5自由度の実システムに適用したときの極配置を図10に示す。同図から、システムの極の実部は全て負で安定となっているが、2次と3次のモードに関しては、極が虚軸付近に存在し、安定性が低いことがわかる。このときの、点5における衝撃応答を図11に示す。非制御時における応答に比べ振動の収束は速いが、高次モードの成分の収束はあまり良くないことがわかる。

ここでは、システムの制御性能と安定性をさらに向上させることを目的とし、 H_u の上限値 H_u^{max} と極の実部の最大値 S_i^{max} ($i = 1, \dots, 10$) を以下のように与え、 H_q を最小にするような最適化を実行する。

$$H_u^{max} = 80.0 \quad (19)$$

$$S_i^{max} = -20.0 \quad (i = 1, \dots, 10) \quad (20)$$

先の初期値をもとに重み行列の最適化を行う。本手法により最適化された重み行列を用いて、最適制御系を構成したときの両評価関数 H_q^{opt} 、 H_u^{opt} は次式の値となる。

$$H_q^{opt} = 16.88 \quad (21)$$

$$H_u^{opt} = 80.00 \quad (22)$$

このときの実システムの極配置を図12に示すが、制約を満足していることがわかる。最適設計以後の制御を行ったときの、点5の衝撃応答を図13に示す。同図から、振動の収束性と高次モードの安定性が改善されていることがわかる。

4. 結言

本論文では、まず感度解析を用いた構造系と制御系の同時最適化方法を示し、以下の結論を得た。

- (1) 制御系と構造系の設計変数の同時に変更することにより、システムの動特性を支配する2次形式評価関数、周波数応答関数のゲイン、極および零点の最適化を可能にした。
- (2) 白色雑音の外乱が作用するときの状態変数に関する2次形式評価関数の低減を行った。その結果、制御系の設計変数に加えて構造系の設計変数をも同時に変更することにより、制御入力に関する評価関数を、制御系だけの最適化よりも著しく低く抑えることができることを明らかにした。
- (3) 周期的な外乱に対しては、システムの周波数応答関数のゲインと極を変更することにより、応答を改善で

きることを示し、さらに零点を変更することにより効果的な応答レベルの低減が実現できることを明らかにした。

つぎに、特性行列同定法を用いた実験に基づくシステムのモデル化と、最適制御系の設計法を示し、以下の結論を得た。

(4) 特性行列同定法により、希望する自由度を有するシステムの記述を可能にし、同定システムに対し制御系を設計する方法を示した。

(5) システムを同定する際に、無視した高次モードの安定性を保証するために、同定システムと実システムの動特性の両方を参照しながら、感度解析と非線形最適化法の適用により、最適な制御系を設計する方法を示した。

(6) 本手法により、実験データに基づいて最適制御系を設計した結果、良好な制振特性が確認された。

参考文献

- (1) 梶原, 長松, 計測自動制御学会論文集, 26-10, 1140(1990)
- (2) 大熊, 南平, 朴, 長松, 機論, 54-504C, 1753(1988)
- (3) 梶原, 大熊, 長松, 背戸, 機論, 54-505C, 2084(1988)
- (4) 梶原, 長松, 機論, 56-522C, 391(1990)
- (5) 朴, 石井, 本多, 長松, 機論, 56-524C, 872(1990)
- (6) 背戸, 梶原, 長松, 森藤, 機論, 55-516C, 2029(1989)
- (7) 梶原, 背戸, 長松, 機論, 55-516C, 2037(1989)
- (8) 梶原, 背戸, 長松, 森藤, 中江, 機論, 55-516C, 2045(1989)
- (9) 大熊, 長松, 機論, 54-507C, 2557(1988)
- (10) 榎木, 添田, 中溝, 確率システム制御の基礎, 日新出版 (1975)
- (11) 梶原, 長松, 大熊, 稲垣, 日本機械学会, 第2回運動と振動の制御シンポジウム講演論文集, 130(1991)
- (12) 梶原, 長松, 稲垣, 機論, 投稿中
- (13) 梶原, 長松, 稲垣, 計測自動制御学会論文集, 投稿中
- (14) 佐伯, 李, 安藤, 計測自動制御学会論文集, 22-4, 383(1986)
- (15) 今野, 山下, 非線形計画法, 日科技連 (1982)