システム最適化に関するシンポジウム講演論文集　1989年11月

【特別講演】

離散化モデルによる構造のシンセシス

STRUCTUAL SYNTHESIS USING DISCRETIZED MODELS OF STRUCTURES

中　桐　　滋*

A method of structural synthesis is presented, which is based on a new notion of minimum design change. The notion of minimum design change is represented by the minimization of the squared sum of design variables. A functional is constituted by the squared sum of design variables and equality constraint conditions of the first-order approach of structural responses to their desired values incorporated by Lagrange multipliers. The stationary condition of the functional gives rise to the governing equation of the design variables. The validity of the present method is exemplified by numerical examples of eigenpair shift, stress reduction, compliance transfer function fitting by use of finite elements and boundary elements.

Key Words: Structural Synthesis, Minimum Design Change, Eigenpair Shift,
Stress Reduction, System Identification

1　緒言

古典的な Darwin の適者生存仮説に従えば生物の現形態は最適なものであるか、最適なものへの変化の途上にある。人が物を認知するのは視覚による形態の認識が第一であろう。一つの構造物が造られるとその形態の良し悪しはすぐ人の口の端にのぼる。一方、工業の分野では構造物はその機能が設定されているので、機能が十分発揮されてるいか否かが批評の対象となる。格好がよくない、もしくは機能が十分満足すべきものでなければ、その構造物は使用されないか、または改善されることとなる。したがって、構造設計では昔から最適化ということが暗々裡に図られていた。構造最適設計問題が長い歴史を有しているのは故なきことではない。

近代においては 1950 年代に構造最適化がトピックスの一つであったと思われる。この当時は、構造設計は材料力学の知識を用いて行なわれ、構造応答は閉じた形で求められており、設計はパラメトリックに行なわれていた。この時代の構造最適化は最小重量設計を目指しており、用いられた手法は線形計画法である[1),2)]。その後、電子計算機と数値構造解析技法が発達し、現在では Computer Aided Design の概念が工業界に定着し、構造解析と設計において有限要素法・境界要素法が多用されている。このように離散化モデルが構造解析に用いられている現状の下では、構造最適化の概念自体もある程度変質せざるを得ない[3),4),5)]。その原因は、構造応答が閉じた形で求められていない、梁の深さのようなパラメータではな

*　工博　東京大学生産技術研究所　教授

く節点座標のようなノンパラメトリックな量が設計上用いられている、従って設計変数、目標値、制約条件の個数が過去に較べて飛躍的に増加している、よって実用上の価値が再認識されるようになったためと考えられる。

本講では構造最適化に用いられている各種技法の詳細を論じることを目的としていない。構造の重量を最小化する、または剛性を最大化するとの”最”的な概念に変えて、与えられた構造応答目標値を達成するための構造諸元の決定という構造のシンセシス（synthesis）について述べる。構造諸元を与えてそれに対応する構造応答をもとめることは構造のアナリシス（analysis）である。これを順問題といえば、構造応答を与えて構造諸元を定めるとのシンセシスは逆問題となる。諸元を与えれば、確定論の世界では線形構造の応答は唯一に定められる。一つの応答を達成する諸元は線形構造においても唯一ではない。シンセシスの難しさの一つは解の唯一性の欠如にある。

2　最小化手法のシンセシスへの応用

従来は存在していないものを全く新しく設計する場合には、設計者は独創性を発揮して数多くの試設計をおこない、順次種々の制約条件の下で候補を絞りこんで行くのであろう。普通の設計ではなんらかの意味で手本となる設計が存在する。本講ではなんらかの試設計（baseline design, prototype design）の存在を前提とする。また構造応答の目標値が設定されていて、試設計による構造応答が目標値と一致していない場合を想定する。試設計の構造応答と構造応答の目標値との差を偏差と呼べば、構造最適化の観点から見ると構造のシンセシスとは偏差を最小（できれば零）とすることとなる。無減衰振動固有値問題に関して、固有対を目標値に変更する構造変更を従来の偏差最小の概念に基づき、有限要素法による定式化を行なうと以下の様にまとめられる。

試設計における剛性マトリックス $[\overline{K}]$ 、質量マトリックス $[\overline{M}]$ が既知で式(1)の固有値問題の解として固有値 $\overline{\lambda}$ 、固有ベクトル $\{\overline{\phi}\}$ が得られているとする。

$$([\overline{K}] - \lambda[\overline{M}])\ \{\overline{\phi}\} = \{0\} \tag{1}$$

上付き棒記号は試設計を示す。この固有対が目標固有値 λ，目標固有ベクトル $\{\phi\}$ と異なっているとし、N個の独立な構造諸元ｘｎを用いて目標値達成のための構造変更を行なうこととする。構造諸元の変化を設計変数 α_n を用いて式(2)で表わす。

$$x_n = \overline{x}_n(1 + \alpha_n) \tag{2}$$

諸元と剛性・質量マトリックスの関係は既知であるので式(2)に対する剛性・質量マトリックスの変化は α_n に関する Taylor 級数展開により評価することは可能であり、その一次近似をとれば式(3)、(4)となる。ここで α_n のみが未知量である。

$$[K] = [\overline{K}] + \sum_{n=1}^{N} [K_n]\ \alpha_n \tag{3}$$

$$[M] = [\overline{M}] + \sum_{n=1}^{N} [M_n]\ \alpha_n \tag{4}$$

この構造変更により目標固有対が得られるとすれば式(5)が成立する。さらに、未知量 α_n についてまとめると式(6)が得られる。

$$([K] - \lambda[M])\{\phi\} = ([\bar{K}] + \sum_{n=1}^{N} [K_n]\alpha_n$$

$$- \lambda([\bar{M}] + \sum_{n=1}^{N} [M_n]\alpha_n))\{\phi\} = \{0\} \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{N} ([K_n] - \lambda[M_n])\{\phi\}\alpha_n + ([\bar{K}] - \lambda[\bar{M}])\{\phi\} = \{0\} \tag{6}$$

これをさらに変形してマトリックス形にまとめれば式(7)となる。

$$\{\varepsilon\} = [f]\{\alpha_n\} - \{g\} = \{0\} \tag{7}$$

式(7)の $\{\varepsilon\}$ は一種の偏差であり、これを零とする様に未知量 αn を定めるのが本節での問題となる。しかし、式(3)、(4)が近似式であるので零とはならない。また [f] は式(6)からわかるように非正方マトリックスであるので、式(7)を連立一次方程式として解くことは不可能である。そこで、構造最適化で用いられる常套手段の一つである最小自乗近似の意味で偏差を最小化させる方法をとれば、式(8)の汎関数Πを経て αn を決定する連立一次方程式(9)が求められる。

$$\Pi = \{\varepsilon\}^T\{\varepsilon\} = \{\alpha_n\}^T[f]^T[f]\{\alpha_n\} - 2\{\alpha_n\}^T[f]^T\{g\} + \{g\}^T\{g\} \tag{8}$$

$$\partial\Pi/\partial\{\alpha_n\}^T = [F]\{\alpha_n\} - [G] = \{0\} \tag{9}$$

上式で [F] は対称正方マトリックスとなっているが、非特異である保証はない。式(3)、(4)の一次近似の限界を取り除くためには、式(8)による設計変数の決定を試設計の更新を行いながら反復すればよいことになる。

しかしながら、この方法を試みたところ、上記の反復解が飛び跳ねる、収束しない、または [F] が特異に近い等、その結果は決して思わしいものではなかった。その主な原因は、シンセシスにおいては解の唯一性が成立していないことから、探索すべき解空間が広く、その中を解がさまようためと考えられる。

3　設計変更最小の概念に基づくシンセシス手法

その応答は目標値とは一致していないが、試設計そのものは存在することを前提とすれば、応答が目標値と一致する設計を試設計のなるべく近傍で探索する、すなわち、設計変更を最小にするとの方策も考えられる。この設計変更最小の概念を式(2)の設計パラメータにあてはめれば、その一つの数式表現は α_n の自乗和を最小にすることになる。 α_n の自乗和を α_n に関して無制約条件の下で最小とすると、 $\alpha_n=0$ 、すなわち設計変更せずとの解しか得られない。今、例えば摂動法に基づく確率有限要素法の手法を流用して、J 個の任意の構造応答 z_j の設計変数に関する変動が Taylor 級数展開の形で表わされているとする。級数展開を α_n の一次項で打切れば式(10)が得られる。

$$z_j = \bar{z}_j + \sum_{n=1}^{N} z_{jn}{}^{I}\alpha_n \tag{10}$$

肩符は一次変動率を示し、応答の変動率 $z_{jn}{}^{I}$ は剛性・質量マトリックスの変動率が既知であれば摂動法によっても容易に求められる[6]。

いま、構造の目標値を $z_j{}^*$ とする。式(10)の一次近似式により目標値に到達するとの条件とし、Lagrange 乗数 μ_j を用いて汎関数(11)を構成する。

$$\Pi = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n{}^2 + \sum_{j=1}^{J} \mu_j (z_j{}^* - \bar{z}_j - \sum_{n=1}^{N} z_{jn}{}^{I} \alpha_n) \tag{11}$$

式(11)の右辺第一項は設計変更最小の概念に対応し、第二項は目標値への一次近似到達に対応している。α_n と μ_j についての汎関数の停留条件をマトリックス形にまとめれば式(12)が得られる。

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 2 & & & & -z_{11}{}^{I} & \cdots & -z_{J1}{}^{I} \\ & 2 & & & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & 2 & -z_{1N}{}^{I} & \cdots & -z_{JN}{}^{I} \\ \hline & & & & & & \\ & & & & & 0 & \\ \mathrm{SYM.} & & & & & & \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \\ \hline \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_J \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \bar{z}_1 - z_1{}^* \\ \vdots \\ \bar{z}_J - z_J{}^* \end{array}\right\} \tag{12}$$

式(12)により設計変数は定められるが、式(10)が一次近似であるので、それはあくまでも近似解である。従って、試設計を更新しつつ、式(12)による設計変数決定の過程を目標値が満足し得る精度で達成されるまで反復する必要がある。このとき、更新された試設計について応答の一次変動率を求めておく必要がある。

本定式は目標設計を試設計の近傍で探索するとの単純な発想に基づくものである。なんらかの数学的に厳密な原理から導き出されたものではない。従って、その適用には工学的に健全な判断が必要である。第一に、目標応答は物理的に実現可能なものが設定されていなければならない。例えば、構造応答として応力を取り上げるとき、目標応力は応力の釣合条件を満たしていなければならない。第二に設定する目標応答は独立で、その個数Ｊは設計変数の個数Ｎ以下でなければならない。それは、Ｎ個の独立変数からＮより多い独立な変数を導き出せないからである。目標応答間の従属性が高いと式(12)の解が求められなくなる。

前述の諸条件が満たされていると試設計の更新が容易に行なわれる。試設計の応答が目標応答に一致し、$z_j = z_j{}^*$ が得られると、式(12)は $\alpha_n = 0$ の解を与えるので、反復収束の判定は容易である。一方、設計変数に関する応答の一次変動率が全て零、$z_{jn}{}^{I} = 0$ 、となると $z_j \neq z_j{}^*$ でも $\alpha_n = 0$ となるので、この試設計更新は停止し、目標応答に到達し得ないこともある。また、始めの試設計の応答と目標応答の差が大きいと、設計変数が設計許容範囲から逸脱することもある。本定式の基はあくまでも設計変更最小の概念によるので、最適問題でいう大局的最適と局所的最小の問題により敏感であると考えられる。上述の事態においては試設計を大胆に変えるか、目標応答を多段に設定・変更する必要があろう。

4　数値計算例

本節においては３節所論の定式による構造シンセシスの例について述べる。

4・1　無減衰振動問題の固有対の変更

図1の上部はトラック・シャーシーの有限要素モデルと重量分布を示す。このとき、要素節点の断面二次モーメントを設計変数にとって固有対の変更を図る[7]。図1はシャーシーA、B点の1次固有ベクトルのたわみ成分を 80 %に減少させることを目標としたときの、固有ベクトル・ノルムの試設計変更に応ずる収束状況を示す。6回の反復で解が収束している。図2は、上述の目標に固有値を20 %だけ増大させるとの条件を加えた場合の、固有モードと断面二次モーメント分布を示している。なお、図中の破線は始めの試設計を示している。固有振動モードは高次といえどもそれなりに滑らかな形をしている。固有ベクトル成分に目標応答をとるときには、この滑らかさを満たしている必要がある。例えば、屈曲の多い蛇行形を1次モードに設定すると構造変更そのものが不可能となることは十分予想される。

4・2　応力低減のための構造形状変更

構造応答として応力を、設計変数として構造輪郭線上の節点座標を選ぶことにより、応力変化を意図する構造変更を行なう事が可能となる。目標応力を試設計の応力より小さい値にとれば、とくに応力集中部の応力低減が達成される。インボリュート平歯車の歯形変更を応力低減の観点からのみ有限要素を用いて行なった例を図3、4に示す[8]。図3は始めの試設計における形状、要素分割、表面近傍の Mises 相当応力分布（単位はＭＰａ）を示す。図3の矢印で示す水平負荷は中心線に関して非対称であるが、歯車の性質上から歯形は対称でなければならないとの制約条件を加えて、図4に示す低応力分布の実現を図る。本例では7回の反復で目標値への収束解が得られた。節点最大移動量は図4 E点近傍の水平移動約 3.5 mm である。歯車設計論の立場からは輪郭線がインボリュート曲線となっているという制約を常に加えねばならないが、この程度に小さい形状変更で相当応力は約 20 %低減し得ることが認められた。

有限要素法を用いて形状変更を行なうときは、有限要素解析の精度維持のため、輪郭線上の節点座標と共に内部節点座標の変更も行なわねばならない。この弊は境界要素法では除かれる。図5は大きい開口部を有する平板の応力集中部Bの形状変更を境界要素法により行なった例を示す[9]。前例と同じく、初期形状の最大相当応力 275 ＭＰａを 199.5 ＭＰａ以下にするとの低減がごく僅かの形状変更により達成されている。本定式においても、試設計の応答と目標応答の偏差が式(12)に現われている。負荷の確率的変動による発生応力の不確かさと目標応答の設定における確信の欠如のいずれも、この偏差に不確かさを生じさせる。この不確かさを考慮した不確定な構造変更のシンセシスも可能である[10]。その一例として、目標応力の標準偏差が変動係数ｃ＝３％に相当にして変動する場合のＡＢ区間の節点ｙ座標の標準偏差の分布を示す。また、平板右端の分布引張荷重が確率的に変動していても目標形状についても図6と似た標準偏差分布が得られる。ただし、この標準偏差の空間分布の相関については何の情報も得られていない。従って、ｙ座標の最も内側（開口に対して）の限界線をこの標準偏差分布を勘案して定めれば安全側の設計となる。

4・3　コンプライアンス伝達関数によるシステム同定

振動に関するシステム同定の一つにコンプライアンス伝達関数（以下ＣＴＦと略記する）を用いるものがある。固有値問題とは異なり、ＣＴＦでは式(13)に示すように減衰と励振の影響が考慮されている。

$$G_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_{ir}\phi_{jr}/\{m_r(-\omega^2+\omega_r{}^2+2\sqrt{-1}\xi_r\omega_r\omega)\} \tag{13}$$

上式はｉ点における調和外力によるｊ点での変位応答に関するＣＴＦを示す。m_r 、ξ_r 、ω_r、ϕ_{ir} はそれぞれｒ次のモード質量、減衰比、固有円振動数、固有ベクトルの第ｉ成分である。ＣＴＦは広い振動数範囲にわたり、またその値域も広い。１０の数乗にわたるＣＴＦの変化を、設計変更最小の概念と応

答の一次近似に基づく本定式により追随可能であるかをシステム同定の観点から検討した結果を図7に示す11)。

同定対象は図7の下部に示す簡単な片持梁であり、振動数　f_1= 34.0 HzのCTFをG_1= 0.291 mm／N、f_2= 48.5 HzのCTFをG_2= 0.0542 mm／Nから 0.0918 mm／Nへと変更するものである。設計変数には有限要素各節点の断面二次モーメントIと断面積Aのみをとり、減衰比は固定している。図8はCTFの収束状況を、図9は構造変更後のIとAの分布を示す。図8からCTFの約　1／3倍、2倍の変化は応答一次近似によっても6回の反復で収束解の得られることが読み取れる。しかしながら、ピーク間の一区画に多数の目標CTFを設定する場合、目標応答の独立性が損なわれる。このとき、設計変数決定の連立一次方程式が解けないという事態が出来するので目標応答設定には注意を要する。

5　結論

本講においては、従来の最適化技法で用いられている偏差最小の概念にかえて、明確に設定された目標応答の達成を等式制約条件に用いた設計変更最小の概念に基づく構造シンセシスの定式を示した。固有対のシフト、応力の低減、CTFの曲線適合を例にとり、定式の妥当性を検証する計算例を示した。最適問題と同様、またはそれ以上に目標応答の設定と設計変数の選択が適切に為されていることが、本定式による構造シンセシスを成功させる鍵である。

本講で述べた定式は、目標応答への一次近似到達を等式制約条件に用いている。等式制約条件というものは不等式制約条件に比較して厳しい条件である。また、実際の設計においては不等式制約条件の方が実用的であろう。従って、今後は不等式制約条件付きの構造シンセシス手法の開発が望まれる。末尾に本講で呈示した計算例は鈴木敬子、野口裕久、谷周一、高畑秀行の諸氏の御協力の賜物であることを記し、謝意を表わす。

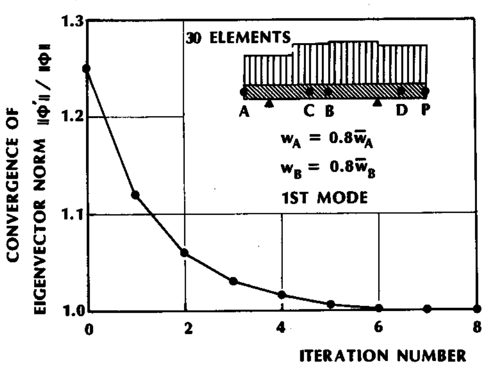

図1　固有ベクトル・ノルムの収束状況

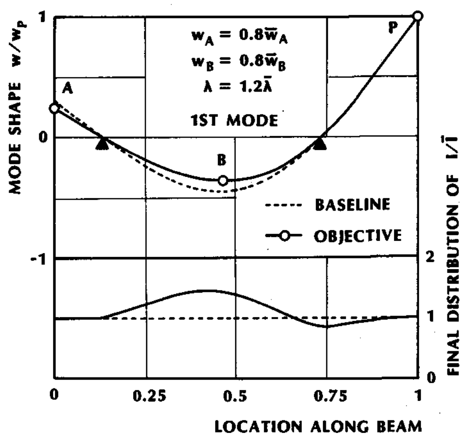

図2　固有値と固有ベクトルの同時変更

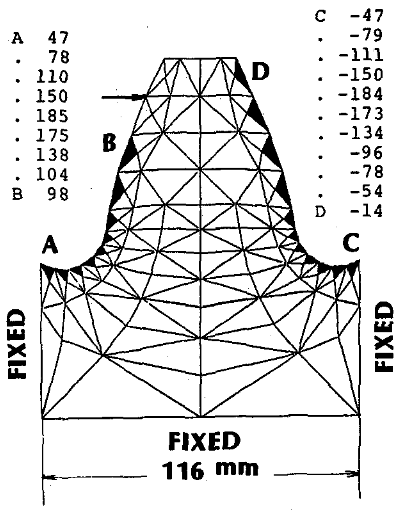

図３　平歯車の初期形状と相当応力分布

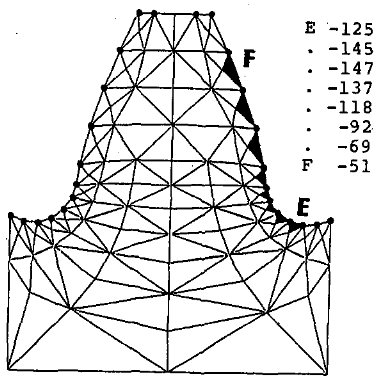

図４　歯形変更の相当応力目標値と座標変更節点

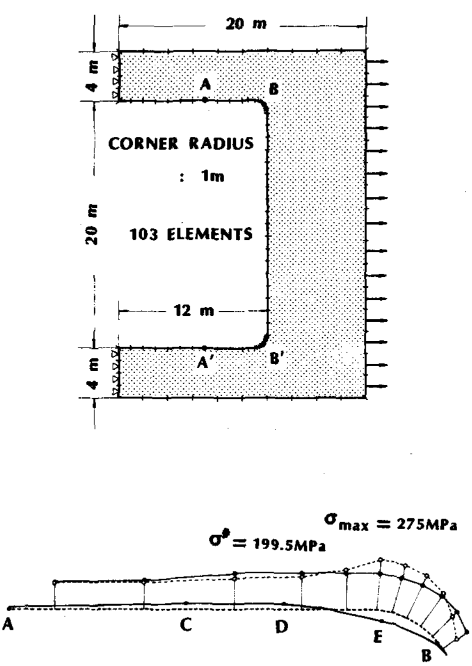

図５　一様引張りを受け開口を有する平板解析モデルと　開口部の形状および応力分布

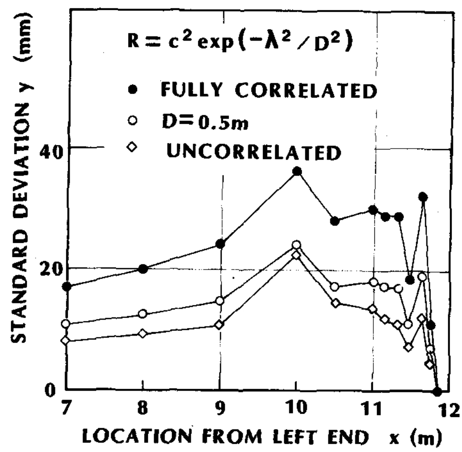

図６　不確定目標応力に対するｙ座標変更量の標準偏差

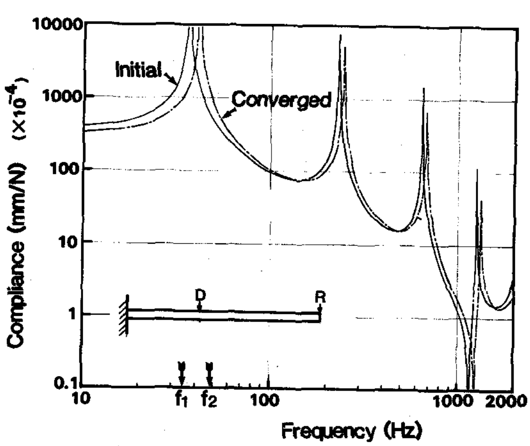

図７　変更前後のコンプライアンスの比較

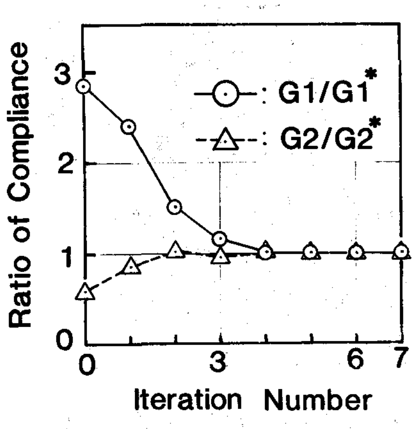

図８　２点のコンプライアンスの収束状況

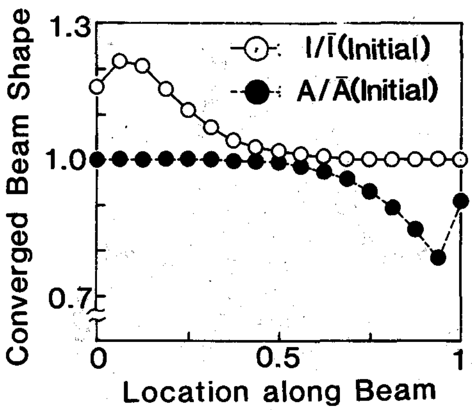

図９　コンプライアンス収束後のはり形状

参考文献

1）田中尚；建築構造物の自動設計と最適設計、培風館、1970.

2）Vanderplaats, G. N.; Structural Optimization - Post, Present, and Future, AIAA J., Vol. 20, No. 7, pp. 992-1000, 1982.

3）Vanderplaats, G. N.; Numerical Optimization Techniques for Engineering Design, McGraw-Hill, 1984.

4）Haftka, R. T.; Element of Structural Optimization, Martinus Nijhoff Publisher, 1985.

5）Bennett, J. A. and Botkin M. E.; The Optimum Shape, Plenum Press, 1986.

6）中桐滋、久田俊明；確率有限要素法入門、培風館、1980.

7）中桐滋、鈴木敬子；実固有値問題の有限要素法によるシフト・シンセシス、日本機械学会論文集（Ｃ編）、53巻、496号、pp. 2439-2444, 1987.

8）中桐滋、野口裕久、谷周一；応力規準による構造形状の有限要素シンセシス、日本機械学会論文集（Ａ編）、54巻、505号、pp. 1786-1790, 1988.

9）中桐滋、鈴木敬子；境界要素法による構造形状の不確定変更シンセシス、日本機械学会論文集（Ａ編）、55巻、509号、pp. 106-111, 1989.

１０）中桐滋、鈴木敬子；振動固有値・固有ベクトルの有限要素法による不確定シフト・シンセシス、日本機械学会論文集（Ｃ編）、54巻、499号、pp. 523-528, 1988.

１１）中桐滋、高畑秀行；コンプライアンス伝達関数変更の有限要素法によるシンセシス、日本機械学会論文集（Ｃ編）、54巻、507号、pp. 2530-2535, 1988.