システム最適化に関するシンポジウム講演論文集　1989年11月

(26) 構造システムの最適設計と最適制御の混合問題に関する研究

A Study on Simultaneous Optimization Problem of Structural and Control Systems

山川　宏*
Hiroshi Yamakawa

A unified optimization method for the simultaneous optimization in control and structural systems is presented in this paper. The method consists of the step-by-step integration technique and sensitivity analysis utilizing the step-by-step integration scheme. The calculation method is shown for the sensitivities in control problem. Numerical example for the position control problems of the flexible robot arms was demonstrated where both parameters of the control and structural systems are optimized. Then from those results it turned out that the method was also applicable to nonlinear systems and effective for the simultaneous optimization of control and structural systems.

KEY WORDS Simultaneous Optimization, Optimal Control, Structural Optimization, Nonlinear System, Sensitivity Analysis

1.緒言

動的な荷重を受ける構造物の設計に際しては，従来，構造技術者がまず構造系の設計を行ない，しかる後制御系の設計が必要な場合は制御系の設計を行なうという形が多く採られてきている．すなわち制御技術者は構造系は既知として与えられた動特性を満足する制御系の設計を行なってきた．ところが近年，宇宙構造やメカトロニクス機器などの中に，構造系の設計だけでは所与の設計条件を満足することが困難となる場合や制御系の設計のみでは所望の動特性が得られない場合などが起こり，構造系と制御系の同時最適化の問題，すなわち最適設計と最適制御の混合問題に関する関心が高まってきている．構造系と制御系の同時最適化（混合問題）の研究は新しい分野のために研究数も数少なく，そのほとんどは線形系を対象としたものである．[1]~[4]したがって，非線形系を対象とした混合問題の研究は現在のところ行なわれていない．

筆者らは構造物の動的応答問題に対する最適設計方法として，非線形系にも適用できる逐次積分法と感度解析法を組み合わせた手法を提案してきた．[5][6]この手法は構造系と制御系の同時最適化問題の解法として拡張することができ，従来の枠に捕われない広い最適設計と最適制御の混合問題に適用できるものと考えられる．以下に提示する手法の簡単な説明と簡単な数値計算例を示すことにする．

*工博　早稲田大学教授　理工学部機械工学科

2.最適設計と最適制御の混合問題（同時最適化問題）とその解法

2.1従来の研究で対象とされた混合問題

(a)状態方程式

最適設計と最適制御の混合問題に対する研究例は現在のところ少ないが，そのほとんどの研究は線形の構造系と制御系を対象に，最適制御問題の一つである最適レギュレータ問題と構造物の最適設計問題の一つである最小重量設計問題を同時に取り扱ったものである．すなわち対象系が離散化され，次の系の運動方程式で表記されることを出発点とする．

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\mathbf{q}=\mathbf{U}\mathbf{u}+\mathbf{F}\mathbf{f} \tag{1}$$

ここに，M,C,Kは構造の質点，減衰，剛性の各マトリクスで，$\ddot{q}$,$\dot{q}$,qは加速度，速度，変位の各ベクトルを示す．またu,fは制御力ベクトルと外力ベクトルを示し，U,Fはその係数マトリクスを表す式(1)は次の形の状態方程式に書き直すことができる．

$$\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{A}\mathbf{y}+\mathbf{B}\mathbf{u}+\mathbf{D}\mathbf{f} \tag{2}$$

ここに$\mathbf{y}=\{\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\}^T$なる状態ベクトルで，A,B,Dは次のようなマトリクスである．

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{c|c} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{array}\right] \qquad \mathbf{B}=\left[\begin{array}{c} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U} \\ \hline \mathbf{O} \end{array}\right] \qquad \mathbf{D}=\left[\begin{array}{c} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} \\ \hline \mathbf{O} \end{array}\right] \tag{3}$$

(b)評価関数(目的関数)

制御系単独の場合は次のような２次形式の評価関数Jcの問題(最適レギュレータ問題)を設定して，例えばフィードバック系では制御力u=-Gyとして，初期条件の下で，

$$J_C=\int_0^{t_F}(\mathbf{y}^T\mathbf{Q}\mathbf{y}+\mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u})dt \tag{4}$$

を最小とするゲインマトリクスGを決定することが多い．また構造系の最適設計問題では，質量，減衰，剛性の各マトリクスが設計変数$\mathbf{x}=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}^T$の関数と考え，設計変数xで表される構造物の重量W(x)を評価関数(目的関数)

$$J_S=\mathbf{W}(\mathbf{x}) \tag{5}$$

として，制約条件や初期条件の下でその最小化を与える設計変数xを求めることが多い．そこで従来の混合問題のほとんどの研究は式(4)(5)の両方を考慮した

$$J=J_C+J_S=\int_0^{t_F}(\mathbf{y}^T\mathbf{Q}\mathbf{y}+\mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u})dt+\mathbf{W}(\mathbf{x}) \tag{6}$$

を評価関数としている．

(c)最適化手法

式(6)の同時最適化手法として，まず式(6)で設計変数xを既知とすると，構造系は既知となり，式(6)の最適化は単なる制御系の最適化となる．この最適化には，$t_F\rightarrow\infty$とすると下記のRicatti方程式の解が用いられる．

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{A}-\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{-1}+\mathbf{Q}=0 \tag{7}$$

このPにより最適フィードバックは$\mathbf{u}=-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{y}$と与えられる．設計変数xを動かすと，今度はuとxの両方を考えて最適化をする必要がある詳しくは文献(7)を参照されたい．

2.2混合問題の新しい手法

(a)対象系と最適化問題

ここでは非線形系をも対象として広い意味での最適設計と最適制御の混合問題を考える．すなわち表1にしめすような最適化問題を一例として考えている．すなわち2.1で取り扱っている積分形式の２次形式の評価関数を必ずしも必要とせず，また必ずしも状態方程式の形に直す必要もない．また応答の制御対象の時間も有限でも可とすることを考える．

表1　最適設計と最適制御の混合問題

design variables	structural parameters cross sectional area, length, width, thickness, mass etc	control parameters feed back gain phase conpensation constant etc
constraints	side constraints of members allowable stress frequency allowable displacement etc	
objective function	displacement of vibration energy for control structural weight etc	

(b)最適化手法

1)最適化ではまず非線形系を微小時間間隔内で区分線形化して，式(1)で示される系とする．次に逐次積分法を適用して運動方程式(1)の解である変位$\mathbf{q}$，速度$\dot{\mathbf{q}}$，加速度$\ddot{\mathbf{q}}$の応答ベクトルを求める．

2)ここで構造系の設計変数$\mathbf{x}=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}^T$と制御系の設計パラメータ（例えはフィードバック制御系のゲイン等）をまとめて，設計のパラメータ$\mathbf{b}=\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}^T$とする．(a)で前述したように最適化問題としては広い意味のものが考えられるが，以下の説明を理解しやすくするためにで示される評価関数(目的関数)を考えよう．

3)最適化手法として傾斜(または感度；sensitivities)に基づく手法を採用する．このためには目的関数や制約条件の設計のパラメータ$\mathbf{b}=\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}^T$に関する感度の計算が必要となる．この感度の計算には基礎式を設計変数のパラメータで微分した式と逐次積分法を活用する．例えば式(6)の評価関数Jの感度は

$$\frac{\partial J}{\partial b_j}=\frac{\partial J_c}{\partial b_j}+\frac{\partial J_s}{\partial b_j} \tag{8}$$

となる．右辺の第2項の$\partial J_s/\partial b_j$の感度の計算は容易にできが第1項の$\partial J_c/\partial b_j$の感度の計算には工夫を要する．まず$\partial J_c/\partial b_j$の微分計算を行なう$\mathbf{u}_c=-\mathbf{G}\mathbf{y}$のフィードバック制御を考えると

$$\frac{\partial J_c}{\partial b_j}=\int_0^{tF}\left\langle\frac{\partial \mathbf{y}^T}{\partial b_j}\left(\mathbf{Q}+\mathbf{G}^T\mathbf{R}\mathbf{G}\right)\mathbf{y}+\mathbf{y}^T\left(\mathbf{Q}+\mathbf{G}^T\mathbf{R}\mathbf{G}\right)\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial b_j}+\mathbf{y}^T\left(\frac{\partial \mathbf{G}^T}{\partial b_j}\mathbf{R}\mathbf{G}+\mathbf{G}^T\mathbf{R}\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial b_j}\right)\mathbf{y}\right\rangle dt$$

となる．$\partial \mathbf{G}/\partial b_j$は通常容易に計算できるが，$\partial \mathbf{y}/\partial b_j$の計算は次のようにして行なう．運動方程式(1)を微分して整理すると

$$\mathbf{M}\frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}}{\partial b_j}+\mathbf{C}\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial b_j}+\mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial b_j}=-\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_j}\ddot{\mathbf{q}}-\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial b_j}\dot{\mathbf{q}}-\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b_j}\mathbf{q}-\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial b_j}\mathbf{y} \tag{9}$$

となり，この式の右辺は全て動的応答計算後は既知と考えられ，再度この式に逐次積分法を適用すれば$\partial \mathbf{q}/\partial b_j, \partial \dot{\mathbf{q}}/\partial b_j, \partial \ddot{\mathbf{q}}/\partial b_j$等の計算が可能となり，結局$\partial \mathbf{y}/\partial b_j=\{\partial \mathbf{q}/\partial b_j, \partial \dot{\mathbf{q}}/\partial b_j\}$が計算できることになる．図1に最適化計算の流れ図を示す．

3数値計算例

提示した方法を非線形生を有するフレキシブルなロボットアーム系の位置決め制御問題に適用して得られた計算例の中で，紙面の都合上2例飲みを以下に示す．ロボットアームは可変断面積を有する弾性はりモデルとして，制御系である電気系部の非線形性を考慮した．そして，位置決め後の残留振動を最小とするようにはりの各断面積の質量比と実験も行ない，計算結果との比較も試みた．いずれの例でも同時最適化の効果が現われている．

［例１］フレキシブルロボットアームの位置決め制御における最適設計と最適制御混合問題(I)

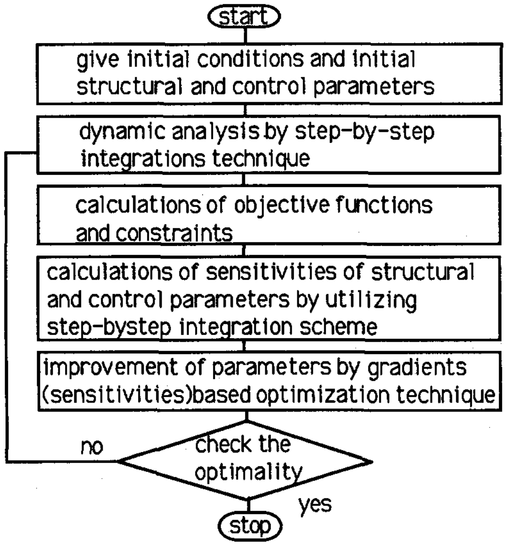

図1　混合問題の最適化の流れ

表2　最適設計問題

	optimal control	combined problem
design variables	feedback gain	feedback gain mass ratio of beam
constraint		constant tatal mass
objective function	$J=\int_0^3 (\mathbf{q}^T\mathbf{W}\mathbf{q}+\rho u^2)dt$ where $\mathbf{W}$=diag{1.0,0.01,0.01,···,0.01,10.0}　ρ=0.1	

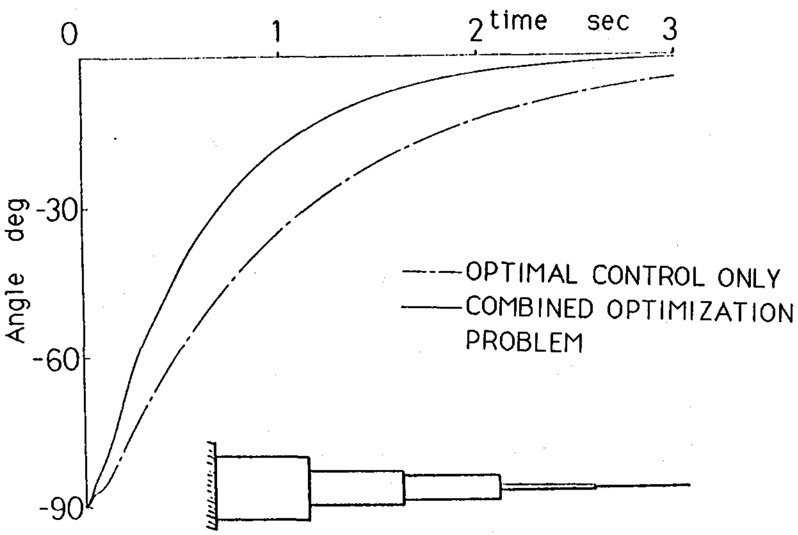

図2　フレキシブルロボットアームの位置決め制御における最適設計と最適制御の混合問題(I)

表3　最適設計と最適制御の混合問題

			Initial Value
design variable	mass ratio of arm	x_1,x_2,x_3,x_4	(1/4,1/4,1/4,1/4)
	feedback gain	$f_\theta,f_\phi,f_\varepsilon$	(1,1,1)
	phase conpensation constant	T,α	(0.05,1.5)
	voltage amplifying gain	g	(5)
objective function	$J=\int_0^3 (\mathbf{y}^T\mathbf{Q}\mathbf{y}+\rho\mathbf{u}^2)dt+\nu\sum_{i=1}^{4}x_i$ vibration control / input energy / reduction of weight $\mathbf{y}=\{\dot w_1,\dot\phi_1,\dot w_2,\dot\phi_2,\dot w_3,\dot\phi_3,\dot w_4,\dot\phi_4,\theta,w_1,\phi_1,w_2,\phi_2,w_3,\phi_3,w_4,\phi_4,\theta\}$		
constraint	side constraint minimum breadth of beam $g_1=b_j-b_{min}\ge 0 \quad b_j=\frac{x_j}{nb}$ stress constraint at fixed part of arm $g_2=\sigma_{mean}-\sigma_{max}\le 0 \quad \sigma_{mean}=\sqrt{\int_0^{ta}\sigma^2(t)dt}$		

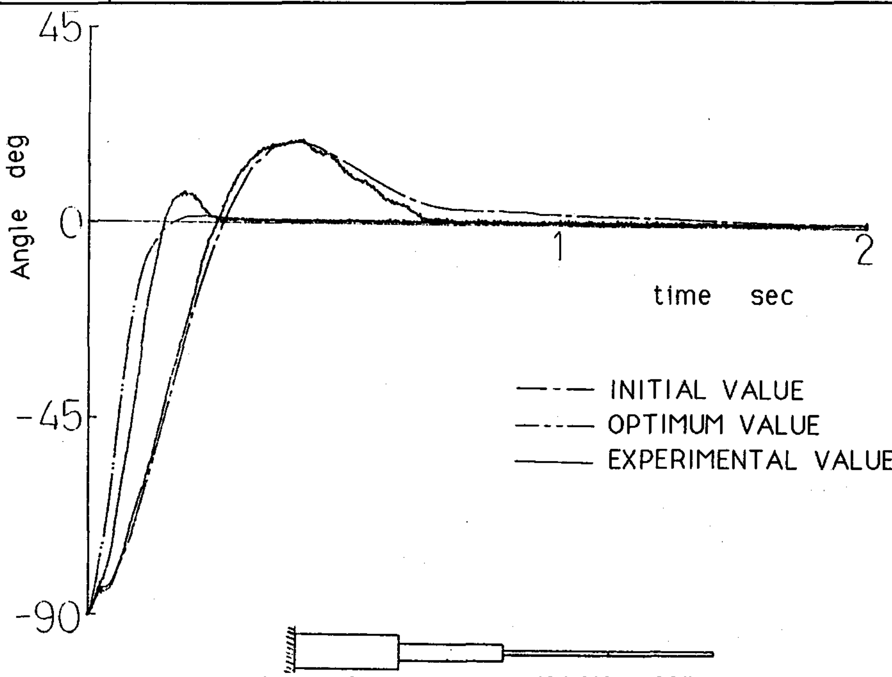

図3 フレキシブルロボットアームの位置決め制御における最適設計と最適制御の混合問題(II)

4 結言

構造系と制御系の両系を同時に最適に設計する方法を提示した．提示した方法は逐次積分法と感度解析法を活用した手法で，任意の形式の評価関数を扱うことができ，数理計画法の中で感度を基とする手法で直接的に最適な設計パラメータを決定することが可能である．また，計算例でも明らかなように，この方法は逐次積分法を動的解析の手法としているので非線形系も数値的に取り扱うことができる．ここでは割愛したが混合問題の最適解の存在や最適問題の設定方法など今後検討すべき問題も多いものと考えられる．

末筆ながら，本論文の数値計算を昨年度の修士論文で行なってくれた河田一実氏に感謝致します．

参考文献

1)Miller,D.F. & Shim,J., :Combined Structural and Control Optimization for Flexible System Using Gradient Based Search,Proc. of AIAA 24th Aerospace Sciences Meeting , PP1-15,1986

2)Onoda,J. & Hafka,R.T.,:An Approach to Structure / Control Simultaneous Optimization for Large Flexible Spacecraft, AIAA Journal , Vol 25,No.8,PP1133-1138,1987

3)Khot,N.S.,:Structural and Control Optimization with Weight and Frobinius Norm as Performance Function, Structral Optimzation, Kluwer Academic Publisher,PP151-158,1988

4)Rao,S.S:Combined Structural and Control Optimization of Flexible Structure, Engineering Optimization, Vol 13,PP1-16,1988

5)山川　宏:構造物の動適応答における最適設計（第1報）,機械学会論文集,第48巻,435号,PP1735-1749,1983

6)Yamakawa,H.,:Optimum Structural Design for Dynamic Response,New Direction of Optimum Structural Design,John Wiley & Sons,PP249-266,1984

7)山川　宏:構造系と制御系の同時最適化問題,機械学会講習会教材"これからの制振・制御技術",No.89(掲載予定),1989