システム最適化に関するシンポジウム講演論文集　1989年11月

(21) 構造信頼性指標向上を図る構造変更のシンセシス

SHAPE MODIFICATION SYNTHESIS FOR ENHANCEMENT OF STRUCTURAL RELIABILITY INDEX

中　桐　　滋　＊

This paper deals with the shape modification of structures aiming at the enhancement of structural safety and reliability. The reliability index of the Advanced First-order Second-Moment method is taken as a measure of structural reliability. The Young's modulus is taken as spatial stochastic process, and the limit state equation is constituted by displacement and stress criteria corresponding to elastic limit. The method of Lagrange multipliers is applied both to the estimation of the reliability index and the shape modification. The validity of the proposed method is verified by the numerical example concerned with a finite element model of one-storyed portal frame.

Key Words: Structural Synthesis, Reliability Index,
Method of Lagrange Multiplier, Portal Frame

1　緒言

構造系に含まれる不確定要因に対する不確定な構造応答の解析が確率有限要素法により可能となって来ている[1),2),3),4)]。不確定な構造応答を前提とする構造安全性・信頼性工学も発展の途上にあり、構造物の破壊確率または構造信頼性が定量的に論じられつつある。構造信頼性の尺度の一つとして構造信頼性指標があげられる[5)]。確率密度関数による表示では密度関数の裾野すなわち小確率の部分の精度に疑問を生ずるとして、比較的信頼のおける確率変数の２次モーメントまでを用いて推定されるのが構造信頼性指標である[6)]。破損確率にせよ構造信頼性指標にせよ、その絶対値自体に大きな意義と信頼が託されることはあまりなく、その有用性は構造物の安全性・信頼性の相対的な評価にあると考える。

構造最適化はこれまで確定論的に行なわれて来たが、構造系には不確定要因が含まれていることを前提として、最近では確率論的な最適化も試みられている[7),8),9)]。今、一つの試設計による構造物の構造信頼性指標がそれに含まれる不確定要因となんらかの安全判定基準に対して推定されたとする。このようにして得られた構造信頼性指標の精度はその推定方法、想定する不確定要因、設定する安全判定規準に依存する。この精度を度外視すれば、構造信頼性指標は試設計で定められた構造諸元により基本的に支配されている。従って、同一の不確定要因、安全判定規準、推定方法に対して、設計変更により構造諸元を変えて構造信頼性指標を試設計の値から向上させることは可能なはずである。

本稿は、上述の観点から構造最適化の一環として、構造信頼性指標の向上を図る構造変更の有限要素法に

＊　工博　東京大学生産技術研究所　教授

基づくシンセシスの手法について述べるものである。構造信頼性の向上については構造重量との関連において少なくとも次の二つの方策をとり得る。第一は構造重量を一定に保って構造信頼性指標を向上させるものであり、第二は構造信頼性指標を同一に保って構造重量を低減させるというものである。本稿では前者の方策をとり、材料の縦弾性係数が空間確率過程である場合に、変位および曲げ表皮応力より構成された安全判定規準を設定し、一層門形ラーメンの部材断面二次モーメントを設計変数として、有限要素法による構造信頼性指標を向上させる構造シンセシスの手法について述べる。構造変更に関しては設計変更最小の概念に基づく定式を用い、構造信頼性指標の推定には Lagrange 乗数法を用いている。

2 構造信頼性指標の推定

構造信頼性指標としては、破壊基準関数の表現方法に関する不変性の欠如がないとされている Advanced First-Order Second-Moment (AFOSM) 法による指標を用いる[5),6)]。M個の構造パラメータ z_m が不確定であるとき、その不確定性をM個の微小確率変数 ε_m を用いて式(1)と表わす。ただし、ε_m の期待値は全て零とし、ε_m の分散・共分散は共分散マトリックスにより与えられているものとする。上付き棒記号は以後確定成分を表わすものとする。

$$z_m = \bar{z}_m \left(1 + \varepsilon_m \right) \tag{1}$$

構造パラメータ z_m の不確定変動に起因するJ個の任意の構造応答 σ_j の不確定変動は、摂動法による確率有限要素解析によれば、式(2)の形に表わされる[1)]。

$$\sigma_j = \bar{\sigma}_j + \sum_{m=1}^{M-1} \sigma_{jm}{}^{I} \varepsilon_m \tag{2}$$

上式ではM－1個の構造パラメータが構造応答に関与するとしている。最後の一個の確率変数は安全判定規準に関与するものとする。肩符Ｉは一次変動率であることを示すものである。応答 σ_j が σ_{jc} 以下であると構造は安全であるとして、破壊基準関数Ｇの一次近似式を式(3)として構成する。

$$\begin{aligned} G(y_m) &= \bar{\sigma}_{jc}(1+\varepsilon_M) - \bar{\sigma}_j - \sum_{m=1}^{M-1} \sigma_{jm}{}^{I} \varepsilon_m \\ &= \bar{G} + \sum_{m=1}^{M} G_m{}^{I} y_m \geq 0 \qquad \text{safe} \end{aligned} \tag{3}$$

ここで y_m は、M個の基本確率変数 ε_m から単位分散を有するように正規化変換された後の、標準化確率変数である。破壊基準関数Ｇ上の”設計点” $y_m{}^*$ は y_m 座標系の原点から最短距離にある点として探索することも可能である。この最短距離にある”設計点”は原点を中心として破壊基準関数の定める破損曲面に内接する超球を求めることにより探索する手法が提案されている[10)]。本稿ではこの手法を反復に関する修正を加えて用いることとする。式(3)の破壊基準関数は確率変数の一次項で打切りを行なった近似式であるので、この一次近似の欠点を克服するためなんらかの逐次反復法を導入しなければならない。求めるべきは原点から最短距離にある”設計点”であるので、微小未知変数 Δy_m を導入し、ℓ 回目の反復における”設計点”座標を式(4)として表わす。肩符 ℓ は ℓ 回目の反復をしめし、$y_m{}^{\ell-1}$ はその反復時の推定値である。

$$\{y_m{}^{\ell}\} = \{y_m{}^{\ell-1}\} + \{\Delta y_m{}^{\ell}\} \tag{4}$$

Lagrange 乗数μをもちいて式(5)の汎関数を構成し、その停留条件により破損曲面の内接超球の半径を定めることができるので、微小未知変数 $\Delta y_m{}^{\ell}$ の決定方程式が式(6)として得られる。

$$\Pi = \sum_{m=1}^{M} (y_m{}^{\ell})^2 + \mu(\bar{G}^{\ell} + \sum_{m=1}^{M} G_m{}^{I\ell} y_m{}^{\ell}) \tag{5}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & & & -G_1{}^{I(\ell-1)} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 2 & -G_M{}^{I(\ell-1)} \\ \hline \mathrm{SYM.} & & & 0 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \Delta y_1{}^{\ell} \\ \vdots \\ \Delta y_M{}^{\ell} \\ \hline \mu \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} -2y_1{}^{\ell-1} \\ \vdots \\ -2y_M{}^{\ell-1} \\ \hline -\bar{G}^{\ell-1} \end{array}\right\} \tag{6}$$

この反復においては、確率変数 $y_m{}^{\ell}$ の展開点を変更して $\bar{G}^{\ell}$ 、 $G_m{}^{I\ell}$ を評価する必要がある。 $\Delta y_m{}^{\ell}=0$ の収束解が得られれば、そのときの y_mが" 設計点" 座標 $y_m{}^*$をあたえることとなり、AFOSM 法の構造信頼性指標 β^* は $y_m{}^*$ を用いて式(7)より推定される

$$\beta^* = \sqrt{\{y_m{}^*\}^T \{y_m{}^*\}} \tag{7}$$

3　構造信頼性指標向上のための構造変更

ある試設計について2節の方法で推定された構造信頼性指標が最大のものであるという保証はない。また、その値が小さくて設計者に構造信頼性に関する危惧の念を引き起こす場合があり得る。このとき、確率過程の方は人為的制御が殆ど不可能であるから、構造変更により信頼性を向上させることが試みられる。この向上のために、設計者の得心のいく構造信頼性指標が設定されたとする。このとき、問題はN個の適切に選択された設計パラメータ x_n により、構造信頼性指標を試設計における値 $\beta_B{}^*$ からその目標値 $\beta_0{}^*$ に変更すること、として記述される。設計パラメータ x_n は微小設計変数 α_n により式(8)として表わされるものとする。下式の上付き棒記号は試設計を意味する。

$$x_n = \bar{x}_n \ (1 + \alpha_n) \tag{8}$$

設計パラメータ変更により、不確定要因を含む構造の応答期待値と分散は変化し、応答変化に対応して構造信頼性指標も変化する。再び摂動法に基づく確率有限要素解析を介せば、この変化は設計変数 α_n に関する Taylor 級数展開の形にまとめられる。この級数展開を再び α_n の一次項までで打切り、この一次近似により目標値に到達させるとすれば式(9)が得られる。

$$\beta^*_0 = \beta^*_B + \sum_{n=1}^{N} \beta_n{}^I \alpha_n \tag{9}$$

構造変更における設計変更最小の概念は α_n の自乗和を最小にするとして定式化できる。しかし、無制約条件の下でこの最小化を行なえば、 $\alpha_n=0$ 、すなわち設計変更せずとの trivial な解しか得られない。そこで、式(9)の構造信頼性指標の目標値への一次近似到達を α_n についての等式制約条件として用い、Lagrange 乗数 μ を用いて式(10)の汎関数を構成する。

$$\Pi = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^2 + \mu(\beta^*_0 - \beta^*_B - \sum_{n=1}^{N} \beta_n{}^I \alpha_n) \tag{10}$$

この汎関数の α_n と μ に関する停留条件より設計変数の決定方程式(11)が得られる[11]。

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & & & & -\beta_1{}^I \\ & \cdot & & & \cdot \\ & & \cdot & & \cdot \\ & & & 2 & -\beta_N{}^I \\ \hline \mathrm{SYM.} & & & & 0 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_N \\ \hline \mu \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \hline \beta^*_B - \beta^*_0 \end{array}\right\} \tag{11}$$

式(11)は構造シンセシスのために別途導き出されたものであるが、構造信頼性指標推定のための式(6)と同形である。

式(9)は構造信頼性指標目標値への到達の一次近似式であるので、目標値に到達するには試設計の更新を反復することが必要である。試設計更新を反復するたびに、本定式によれば構造信頼性指標とその設計変数に関する一階感度 $\beta_n{}^I$ を求めておかねばならない。前者は２節所論の手法により推定し得るが、設計変数に関する一階感度 $\beta_n{}^I$ は２節所論の手法では推定できない。そこで、試設計更新を反復することを前提とし、この一階感度は式(12)で与えられる構造信頼性指標の一次近似値をもとに算出する近似値を用いることとする。

$$\beta = \bar{G} \Big/ \sqrt{\Sigma (G_m{}^I)^2} \tag{12}$$

式(12)において $\bar{G}$ と $G_m{}^I$ は摂動法に基づく確率有限要素解析により定式化されているので、 $\beta_n{}^I$ をもとめることは式(12)の α_n に関する偏微分をとることにより評価し得る。実際の演算上では確率有限要素解析により求められた注目応答の確率変数と設計変数に関する２階偏微分を用いて算出する。

4　数値計算例

簡単な数値計算例として高さ１ｍ、幅１ｍの一層門形ラーメンを取り上げる。初期設計としては各部材の断面積を 100 ｍｍ²で一様とし、断面を正方形とする。水平部材には 0.196 Ｎ／ｍｍの確定等分布鉛直荷重が作用し、水平部材と垂直部材の結合部に不確定集中水平力が作用するものとする。この水平力の期待値を 67.6 Ｎとする。材料の縦弾性係数は空間確率過程であるとし、その期待値を 206 ＧＰａとする。この一層門形ラーメン全体を２７個の等長有限要素に分割し、有限要素については曲げと軸方向伸縮を考慮する。空間確率過程である縦弾性係数の離散化としては、一要素内で平均化されたものとして一要素に一個の確率変数を割付る方法を採用した。構造変更としては構造重量を一定とする場合を想定するので部材断面積を設計パラメータにはとらず、各要素の長方形断面の断面２次モーメントのみを設計パラメータにとる。従って、設計変数の総数は２７である。確率変数の共分散マトリックスは、その自己相関関数を単調減少形であるとして式(13)の形で表わすことにより入力する。

$$R(\tau) = c^2 \exp(-\tau^2/L^2) \tag{13}$$

ここでｃは縦弾性係数の標準偏差、Ｌは相関減衰の尺度であり、τ は要素中点間距離にとるものとする。不

確定な縦弾性係数と水平力は互いに無相関であるとし、全ての確率量の標準偏差は変動係数で５％相当とする。

図１は、水平力負荷点の反対側の水平－垂直部材結合点で水平変位 26 mm を安全判定規準とする場合の、構造信頼性指標の反復探索過程を示す。反復探索の収束状況は単調であり、また３回の反復で収束値が得られている。本図の約 2.1 の値は構造信頼性指標の一次近似値であり、式(12)の近似解の精度はほぼ満足し得ることが読み取れる。

図２は、図１の数値計算例で推定された構造信頼性指標の 50 ％向上を図る構造変更の設計更新に対する構造信頼性指標の目標値への収束状況を示す。向上目標が初期値の 50 ％とわずかであり、また入力した確率過程に関しては構造信頼性指標の一次近似の精度が比較的高いので、収束までに要する設計更新回数は３回と少なく、また収束状況は単調である。これにより、式(11)による構造変更のシンセシス手法は定式が簡単であるにもかかわらず、構造物の信頼性を向上させる設計変更に対して有効なものであることが示される。図３はこのようにして収束が得られた後の各要素の断面二次モーメントの分布を示している。構造信頼性指標を 50 ％増加させるに要する断面二次モーメントの所要増加量は高々 10 ％であることが読み取れる。

図４は、図中に矢印で示す集中水平力の期待値を 118 Ｎ、図中Ａ、Ｂ両点における曲げ表皮応力 206 ＭＰａを安全判定規準として構造信頼性指標の前例と同じ 50 ％向上を図った場合の各要素断面二次モーメントの分布を示す。図３、４において破線は初期設計の断面二次モーメントの分布を示している。本例においても断面二次モーメントの最大所要変更量は約 13 ％であり、僅かの構造変更により構造信頼性指標は大きく増加させ得ることがわかる。構造信頼性指標の向上目標量と所要構造変更量の関係は向上目標量が 50 ％以下であればほぼ比例的であった。構造信頼性指標が如何なる値であれば設計者はその構造が安全であると確信が持てるかには確たる目安はない。仮に、構造信頼性指標が６以上であれば設計変更不要との確信を持てるとし、指標が２以下であれば設計変更の必要を感ずるとする。このときでも、構造信頼性指標の目標向上量は 200 ％にとどまる。この程度に大きい構造信頼性の向上については、想定する確率過程にも依存するが設計変更によって達成し得ない場合もあろう。達成し得る程度の確率過程が想定される場合に、所要設計変更量は構造信頼性指標の向上目標量がかなり大きくなるとそれとの比例関係は成立しなくなり、所要設計変更量はある値に漸近するものと予想される。

5　確率変数の変換に関する考察

AFOSM 法においては、構造信頼性指標の”不変性の欠如”をさけるため、基本確率変数ではなく期待値零、単位分散を有する標準化確率変数 y_m により破壊基準関数を記述している。一方、応答の確率的変動を評価するためには本稿では摂動法に基づく確率有限要素解を用いている。すなわち、式(2)の応答１次変動率 σ_m^{I} は基本確率変数 ε_m に関するものとして記述されている。従って、式(3)の標準化確率変数に関する破壊基準関数の変動率 G_m^{I} を評価するには、確率変数の変換が必要となる。この変数変換に際しては、想定する確率過程と使用する有限要素分割により数値的な問題が生ずるのでこの問題についての考察を以下に述べる。

式(14)として基本確率変数 ε_m を標準化確率変数 y_m に線形変換するマトリックス［Ａ］の定め方は唯一ではない。

$$\{y_m\} = [A]\{\varepsilon_m\}$$

$$\{\varepsilon_m\} = [A]^{-1}\{y_m\} = [B]\{y_m\} \tag{14}$$

［Ａ］はその共分散マトリックス［Ｃ］が与えられている基本確率変数 ε_m を共分散マトリックスが単位マトリックスである標準化確率変数 y_m に変換しさえすればよいのである。ここで［Ｃ］は非負定値性を有するも

のとする。数値的な問題を生ずるのは［C］が零に近い固有値を有している場合である。いま、［C］のＬＵ分解が可能であるとすると、［I］を単位マトリックスとして［A］の決定は式(15)によってなされる。

$$[I] = [A][L][U][A]^T \tag{15}$$

［A］が左辺ではなく、右辺にあるのがその決定が唯一でない所以である。しかし、［A］が下三角マトリックス、上三角マトリックス、帯状マトリックス、正方マトリックスのいずれかを設定すれば［A］の成分の決定は可能となる。

一方、構造信頼性指標を本稿の手法により評価するにあたって直接必要となるのは、式(16)に示される様に［A］ではなく、その逆マトリックス［B］である。

$$\{\sigma_m{}^I\}^T\{\varepsilon_m\} = \{\sigma_m{}^I\}[B]\{y_m\} = \{G_m{}^I\}^T\{y_m\} \tag{16}$$

いま、基本確率変数の共分散マトリックス［C］が式(17)の形にスペクトル分解されていれば、その固有ベクトルϕ_m、固有値λ_mを用いて、［B］は式(18)より定められる。［Φ］はモーダル・マトリックスである。

$$[C] = [\Phi]^T \mathrm{diag}[\lambda_m][\Phi] \tag{17}$$

$$[B] = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m\{\phi_m\}\{\phi_m\}^T \tag{18}$$

確率過程を基本確率変数の相関関数で入力し、また基本確率変数一個を有限要素一個に割付る場合を想定する。このとき、有限要素分割を細かくすると同一の相関関数について共分散マトリックスの条件数（最大固有値／最小固有値）は大きくなる場合が大概発生する。［C］の最小固有値が小さく、条件数が大きいとき、［C］のＬＵ分解は不可能となるか、信用できない結果を算出するかであり、計算機による演算は停止する。このような状況下では、［A］の逆マトリックスとして［B］を求めて、式(16)の $G_m{}^I$ を算出すると構造信頼性指標の推定は大きな誤差を伴うことになる。この様な状況下でも［C］のスペクトル分解により［B］を直接求める方法では推定には大きな誤差は含まれない。［C］の零に近い固有ペアを除外するとのモード打切りを行なっても［B］の精度は低下しないからである。従って、多数の固有値計算のコストをいとわねば、構造信頼性指標の推定には［C］のＬＵ分解による方法よりもスペクトル分解による方法が汎用性に富むと考えられる[12)]。

ただし、モード打ち切りを伴うスペクトル分解により［B］を求め、その逆変換により定める場合の［A］の精度は当然著しく低い。その様にしてえられた［A］をもちいてy_mの共分散マトリックスをもとめると、ランクは下がっているし、単位マトリックスとなっていない。このような数値的問題を生ずるのは、一要素に一変数の割付を細分割について行なうときに発生する。従って、この問題を避けるためには、今後は確率過程の離散化に注意をすべきであろう[13)]。

6　結論

本稿では、設計変更最小の概念に基づいて開発された有限要素法を利用する構造シンセシスの手法を構造信頼性指標向上の問題に応用し、その定式を示した。材料の縦弾性係数が不確かである一層門形ラーメンについて断面二次モーメントを設計パラメータに用い、 50 ％程度の構造信頼性指標の向上は 10 ％程度の設計変更により可能であることを数値計算例により示し、定式の妥当性を検証した。他の最適化手法と同様に、本定式においても目標値の設定と設計変数の選択が適切であることが肝要である。本定式には確率過程の離

散化が含まれているので確率変数の変換について考察を付記した。末尾に、本稿の数値計算例は元大学院学生村上哲君の努力によるものであることを記して、謝意を表わす。

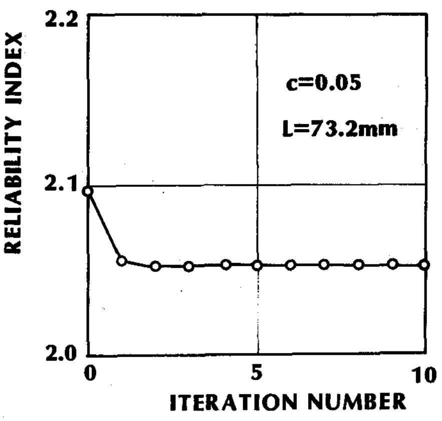

図1　β^*の反復探索の収束状況

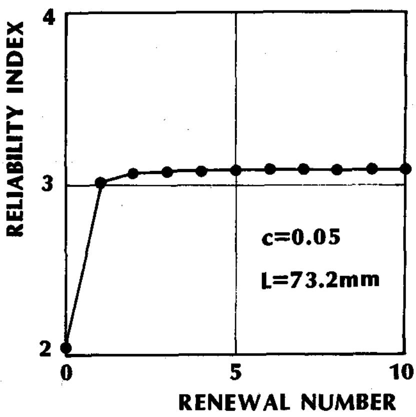

図2　β^*の設計更新の収束状況

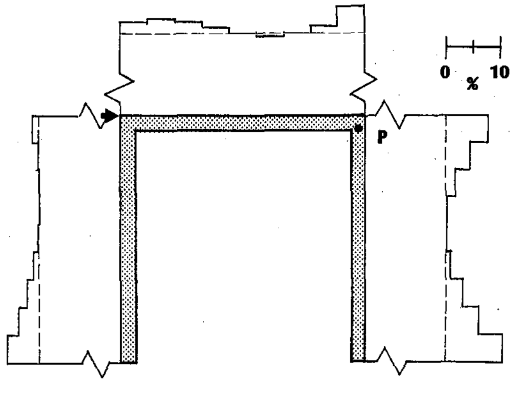

図3　設計変更された構造の断面二次モーメント分布（変位規準）

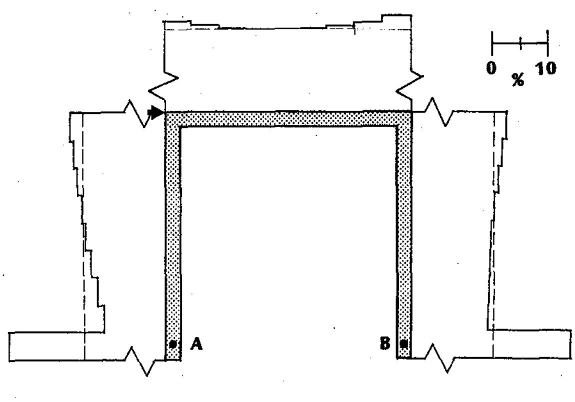

図4　設計変更された構造の断面二次モーメント分布（応力規準）

参考文献

1）中桐滋、久田俊明；確率有限要素法入門、培風館、1985。

2) Liu,W.K., Belytschko,T. and Mani,A.; Applications of Probabilistic Finite Element Methods in Elastic/Plastic Dynamics. Trans. ASME, J. of Engineering for Industry, Vol.109, No.1, pp.2-8, 1987.

3) Der Kiureghian,A. and Ke,J-B.; The Stochastic Finite Element Method in Structural Reliability, Probabilistic Engineering Mechanics, Vol.3, No.2, pp.83-91, 1988.

4) Hisada,H. and Noguchi,H.; Sensitivity Analysis for Nonlinear Stochastic FEM in 3D Elasto-Plastic Problems, ASME Pressure Vessels and Piping Conference-JSME Co-sponsorship, PVP-Vol.177, pp.175-179, 1989.

5) 長尚；安全性指標に関する若干の考察、土木学会論文報告集、No.324、pp.41-50, 1982。

6) Hasofer,A.M. and Lind,N.C.; Exact and Invariant Second-Moment Code Format, Proc. ASCE, Vol.100, No.EM1, pp.111-121, 1974.

7) Frangopol,D.M.; Multicriteria Reliability-Based Structural Optimization, Structural Safety, Vol.3, No.1, pp.23-28, 1985.

8) Murotsu,Y.; Development in Structural Systems Reliability Theory, Nuclear Engineering and Design, Vol.94, pp.101-114, 1986.

9) Liu,W.K., Mani,A. and Belytschko,T.; Kuhn Tucker Optimization Based Reliability Analysis for Probabilistic Finite Elements, Computational Probabilistic Methods, ASME, AMD-Vol.93, pp.135-149, 1988.

10) Shinozuka,M.; Basic Analysis of Structural Safety, Proc.ASCE, Vol.109, No.ST3, pp.721-740, 1983.

11) 中桐滋、鈴木敬子；振動固有値・固有ベクトルの有限要素法による不確定シフト・シンセシス、日本機械学会論文集（C編）、54巻、499号、pp.523-528, 1988.

12) Nakagiri,S. and Suzuki,K.; Reliability Index Estimation Based on Covariance Matrix and Finite Element Discretization of Stochastic Processes, Trans. 9th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, Vol.M, pp.191-196, 1989.

13) 高田毅士；局所積分の概念を用いた確率有限要素法、日本建築学会構造系論文報告集、第399号、pp.49-57、1989。