

(20) 最適化手法を用いた 骨組構造物の材料非線形解析法

MATERIAL NONLINEAR ANALYSIS OF PLANE FRAME STRUCTURES
BY USING MATHEMATICAL MINIMIZATION TECHNIQUES

大久保 禎二* 和多田 康男** 藤脇 敏夫*** 牧野 耕司****
Sadaji OHKUBO, Yasuo WATADA, Toshio FUJIWAKI, Koji MAKINO

In this paper new and powerful analysis methods for plane frame structures subject to material nonlinearity are described. The methods are developed on the basis of the principle of stationary total complementary energy with the aid of mathematical programming techniques. The analysis problems are formulated as the total complementary energy minimization problems subject to linear equilibrium equations in terms of the unknown member end forces and the member end forces are determined by utilizing modified sequential quadratic programming algorithms. The attractive features of the analysis methods proposed, such as generality, accuracy, efficiency, small core size requirement etc. are demonstrated by comparing the numerical results with those of the finite element methods.

Key Words; Material nonlinear analysis, Frame structures, Total complementary energy minimization, Sequential quadratic programming

1. まえがき

材料の非線形性を考慮した骨組構造物の解析法に関する研究は、初期の極限解析法^{1)・2)}の研究に始まり、この理論に基づくLPなどの数理計画法の手法を用いた解析法の研究³⁾、また、変位法に基づき骨組構造物の各有限要素の応力状態に応じて剛性マトリックスを修正し解析する種々の方法^{4)~8)}などが研究され多くの成果が発表されている。一方、Bognerらは最小ポテンシャルエネルギーの原理に基づき、軸力、曲げモーメントおよび剪断力の影響をも考慮した骨組構造物の非線形解析法の定式化を試みている。⁹⁾ また、Pietrzak はケーブルはり構造の材料非線形解析を最小ポテンシャルエネルギー原理に基づき定式化し、Huang の reverse algorithm を用いて解く方法について研究を行っている。¹⁰⁾

一方、大久保らは、力のつり合い条件のもとで構造物の全コンプリメンタリーエネルギーを逐次二次計画法およびLPなどの数理計画法の手法を用いて最小化することにより、トラス、はり、ラーメンなどの材料非線形解析を行う方法について種々の研究を行っている。^{11)~13)} ここではこの全コンプリメンタリーエネルギー最小化による骨組構造物の材料非線形解析法の概要をのべるとともに、従来、構造物の最適設計に用いられてきた数理計画法の手法により、骨組構造物の材料非線形解析が統一的に、かつ、きわめて効率的に行えることを明らかにするものである。

* 工博 愛媛大学教授 工学部土木工学科 ** (株)宇部興産 *** フジタ工業(株) **** 観音寺市役所

2. 材料非線形解析問題の定式化

最小コンプリメンタリーエネルギーの原理によれば、構造物の境界条件および力のつり合い条件を満足する種々の応力分布のなかで、構造物の全コンプリメンタリーエネルギー Π_c が最小となる応力分布が真の応力分布となる。^{たとえ 14)} ところで、骨組構造物の各部材要素の応力状態は、図-1に示すごとく各部材を各節点で切断した静定基本系を仮定することにより、各部材端に作用する部材力および部材内に作用する外力を用いて表わすことができる。そこで本研究では、上記の最小コンプリメンタリーエネルギー原理にもとづき、図-1に示す基本静定系の各部材端力 X を未知力とし、各自由節点における力のつり合い条件式を考慮して、骨組構造物の材料非線形解析問題を次のような非線形エネルギー最小化問題として定式化し、この最小化問題を数値計画法の手法を用いて解くことにより、真の部材端力を求めることとした。

$$\begin{aligned} \text{find} \quad & X = [X_1, \dots, X_n]^T, \text{ such that} \\ \text{minimize} \quad & \Pi_c(X) = \sum_{i=1}^n \beta_i(X_i) \quad (1) \\ \text{subject to} \quad & g = P - CX = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

ここに、 X ：未知部材端力のベクトル、 $\beta_i(X_i)$ ：部材要素 i のコンプリメンタリーエネルギー、 $g = [g_1(X), \dots, g_m(X)]^T$ ：自由節点における力のつり合い方程式、 P ：外力ベクトル、 C ：変換マトリックス、 m ：自由変位成分の数

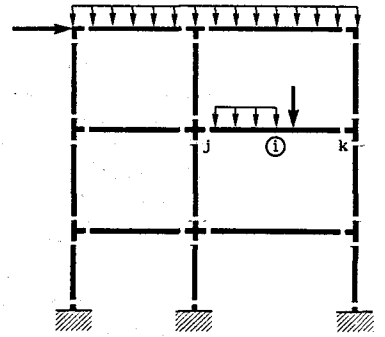


図-1 骨組構造物の静定基本系

3. エネルギー最小化の方法

3-1 近似二次形式問題の導入

式(1)の全コンプリメンタリーエネルギー Π_c は一般に未知部材端力 X の非線形関数で表わされ、また、式(2)の力のつり合い条件式は X の線形等号条件式となる。そこで、本研究では式(1)のエネルギー関数 Π_c を X の変化量 ΔX の二次形式で近似し、原最小化問題を ΔX に関する次のような二次形式の問題に近似し、逐次二次計画法(SQP)を用いて解いている。

$$\begin{aligned} \text{find} \quad & \Delta X^k = [\Delta X_1^k, \dots, \Delta X_n^k]^T, \text{ such that} \\ \text{minimize} \quad & Q_c^k = \nabla \Pi_c^T \Delta X^k + 1/2 \Delta X^{kT} H_c \Delta X^k \quad (3) \\ \text{subject to} \quad & g_j^k = g_j(X^k) - C_j \Delta X^k = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (4) \end{aligned}$$

ここに、 $\nabla \Pi_c^k = [\frac{\partial \Pi_c}{\partial X_1^k}, \dots, \frac{\partial \Pi_c}{\partial X_n^k}]^T$

$C_j = [C_{j1}, \dots, C_{jn}]$ ($j=1, \dots, m$)、 H_c は正定行列でありBFGS公式により改良する。

3-2 初期許容解 ΔX^0 の決定

式(4)の制約条件がすべて等号の線形制約条件であることから、その初期許容解を決定するため、式(3)の近似の目的関数 Q_c をさらに ΔX^k に関する一次の項のみで近似し、次のLP問題を導入する。

$$\begin{aligned} \text{find} \quad & \Delta X^k = [\Delta X_1^k, \dots, \Delta X_n^k]^T, \text{ such that} \\ \text{minimize} \quad & \nabla \Pi_c^T \Delta X^k \quad (5) \end{aligned}$$

$$\text{subject to} \quad g_j^k = g_j(X^k) - C_j \Delta X^k = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (6)$$

このLP問題に対して ΔX ($j=1, \dots, n$)を次のように定義し、

$$\Delta X_i = \Delta X_i' - \Delta X_i'', \quad \Delta X_i' \geq 0, \Delta X_i'' \geq 0 \quad (7)$$

各等号制約条件に対して、スラック変数を用いず実変数 $\Delta X_i'$ および $\Delta X_i''$ のみを考慮し、違反度の大きな制約条件から順次制約条件を満足するとともに目的関数 $\nabla \Pi_c^k \Delta X$ を最大に減少あるいは最小に増加させるように、次の規準にしたがいピボット要素の行 r および列 s を決定しピボット操作を行う。

$$\text{行 } r \text{ の決定} \quad g_r = \max. \{ |g_j| \mid j=1, \dots, m \} \quad (8)$$

$$\text{列 } s \text{ の決定} \quad \begin{array}{ll} \text{if } g_r > 0 & \text{if } g_r < 0 \end{array}$$

$$\frac{\partial \Pi_c}{\partial X_s} = \min. \left\{ \frac{\partial \Pi_c}{\partial X_i} \left| \frac{C_{ri}}{C_{rs}} \right| C_{ri} > 0, i=1, \dots, 2n \right\}, \quad \frac{\partial \Pi_c}{\partial X_s} = \max. \left\{ \frac{\partial \Pi_c}{\partial X_i} \left| \frac{C_{ri}}{C_{rs}} \right| C_{ri} < 0, i=1, \dots, 2n \right\} \quad (9)$$

違反しているすべての制約条件について上記のピボット操作を行うことにより、すべての等号制約条件を満足する初期許容解 ΔX_0^k を決定することができる。なお、式(2)および(4)は真の制約条件であり、近似の制約条件ではないので、式(5)～(9)により一度許容解を求めれば、理論的には以後式(3)、(4)により求められる改良解はすべて制約条件を満足する解となる。したがって式(3)、(4)により求められる改良解が計算誤差を伴わず制約条件を厳密に満足している場合には、式(5)～(9)の改良過程を省略することができる。

3-3 改良のための変化量 ΔX^k の決定

3-2で述べたLP問題を解くことによりすべての制約条件を満足する初期許容解 ΔX_0^k が決定されると、式(4)の等号制約条件面上での改良方向 d^k 、および d^k にそつての改良幅 α^k は、 $-\nabla \Pi_c$ の等号制約条件面上への射影、および Q_c の最小点の条件より、それぞれ次式により解析的に求められる。

$$d^k = -P_r \cdot \nabla \Pi_c^k, \quad P_r = I - C^T(C C^T)^{-1} C \quad (10)$$

$$\alpha^k = -\frac{\nabla \Pi_c^k T d^k}{d^{kT} \Pi_c^k d^k} \quad (11)$$

ここに、 $I (n \times n)$ は単位行列である。

式(10)において、変換マトリックス C が一定であり、かつ、すべての制約条件がつねにactiveであるので、 P_r は X の反復改良の各stageにおいて修正する必要はない。

未知部材力 X^k の改良値 X^{k+1} は、 ΔX_0^k および $\alpha^k \cdot d^k$ を用いて次式より求められる。

$$X^{k+1} = X^k + \Delta X_0^k + \alpha^k \cdot d^k \quad (12)$$

3-4 近似二次計画問題の修正

式(12)で求めた X^{k+1} を未知部材力の新たな初期値として、式(3)、(4)によりそれぞれ $g_j(X)$ および $\nabla \Pi_c$ を修正し、 X^{k+1} に対する新たな近似二次計画問題を作成する。この場合、式(3)の二次の係数行列 H_c は次のBFGS公式を用いて修正する。

$$H_c^{k+1} = H_c^k - \frac{H_c^k \Delta X^k \Delta X^{kT} H_c^k}{\Delta X^{kT} H_c^k \Delta X^k} + \frac{\eta \eta^T}{\Delta X^{kT} \eta} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに、} \quad \Delta X^k &= X^{k+1} - X^k \\ \eta &= \nabla \Pi_c(X^{k+1}) - \nabla \Pi_c(X^k) \end{aligned}$$

このようにして X を改良する毎に新たな近似二次計画問題を作成し、 X の改良を繰り返すことにより、 X は一定値に収束し真の部材端力 X^* を決定することができる。

4. 各部材要素のコンプリメンタリーエネルギーの算定式

3. のべた方法により骨組構造物の全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題を定式化し解く場合には、骨組構造物の各部材断面のコンプリメンタリーエネルギーおよびこれを集計した各部材のコンプリメンタリーエネルギーを計算しなければならない。軸力 N および曲げモーメント M を受ける部材断面の軸方向ひずみによる単位長さ当たりのコンプリメンタリーエネルギーはそれぞれ下に示す式で計算することができる。なお、本研究ではせん断力によるコンプリメンタリーエネルギーを無視し、かつ部材断面のひずみ ε が比較的小さい範囲では部材断面は平面保持の仮定を満足することが知られているので、すべての部材断面のコンプリメンタリーエネルギーをこの仮定に基づき算定している。

(a) 軸力 N のみを受ける部材の単位長さ当たりのコンプリメンタリーエネルギー： $\beta(N)$

$$\beta(N) = \int_0^N \varepsilon(N) A dN \quad (14)$$

ここに、 $\varepsilon(N)$ ： N により生ずる部材断面のひずみ、 A ：部材断面積

(b) 曲げモーメント M のみを受ける部材の単位長さ当たりのコンプリメンタリーエネルギー： π_c

$$\pi_c = \int_A \beta_y dA \quad (15)$$

ここに、 $\beta_y = \int_0^{\sigma_y} \varepsilon(\sigma) d\sigma$

ただし、断面の応力（ひずみ）分布は、作用曲げモーメント M とつり合うように決定されなければならない。

$$M = \int_A \sigma_y \cdot y dA \quad (16)$$

(c) 軸力 N および曲げモーメント M を受ける部材 軸力 N および曲げモーメント M を受ける部材断面のひずみ分布は、断面における内力と作用力のつり合い条件より断面の上縁および下縁のひずみ量 ε_u および ε_l に関する次の連立方程式を解くことにより求められる。

$$\begin{aligned} f_N(\varepsilon_u, \varepsilon_l) &= N \\ f_M(\varepsilon_u, \varepsilon_l) &= M - N y_a \end{aligned} \quad (17)$$

本研究では、この連立非線形方程式を Newton-Raphson 法を用いて解いている。収束判定規準としては解の変化率が 1.0×10^{-6} 以下となった時点で一定値に収束したものと判定した。

$\varepsilon_u, \varepsilon_l$ が求められれば断面内の応力分布が決定され、部材断面の単位長さ当たりのコンプリメンタリーエネルギー π_c は次式により計算される。

$$\pi_c = \int_A \beta_y dA, \quad \text{ここに、} \beta_y = \int_0^{\sigma_y} \varepsilon(\sigma) d\sigma \quad (18)$$

5. 解析例

これまで、2～4で述べたエネルギー原理および逐次二次計画法による骨組構造物の材料非線形解析法により、数多くのトラス、連続はりおよびラーメン構造物を図-3に示すA, B, C3種類の非線形材料について解析を行い、変位法による解との比較を行った。ここではその結果について述べる。

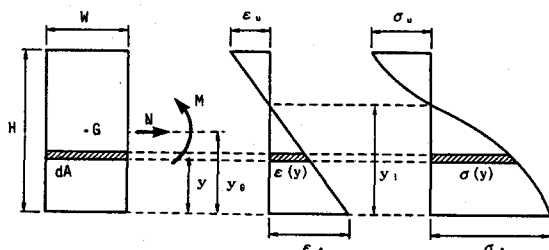


図-2 部材断面のひずみおよび応力度分布

(a) トラスの解析例^{11), 12)}

トラス構造物では各部材の未知端力は軸力のみであり、かつ両端の軸力は等しくなる。また、全コンプリメンタリーエネルギー Π_c を最小化する過程で必要となる Π_c の部材力に関する偏微係数 $\partial \Pi_c / \partial N_i$ は次式により解析的に簡単に計算することができる。このことは解を決定する上で大きな長所となる。

$$\frac{\partial \Pi_c}{\partial N_i} = \varepsilon_i \ell_i \quad (19)$$

図-4に示す21部材を有する2径間連続トラスの部材力(N)、反復計算回数(I TE)および計算時間(CPU)について、変位法(荷重増分法(I LM))による結果との比較を表-1に示す。この解析モデルの部材の断面積はすべて100.0 cm²としている。また表-1において、近似二次計画問題を作成した回数をI TEとし、収束判定規準としては、トラス構造物の全コンプリメンタリーエネルギー Π_c 及び部材力Nの変化量が1/10000以下となった時点で解が収束したものと判定した。コンプリメンタリーエネルギー最小化による方法では、最終的な解を得るまでに要したI TEは、材料Aで23回、材料Bで30回、材料Cで17回と若干のばらつきはあるが、I LMの25回、60回、26回ほどには大きな差はない。得られた解はI LMによる解と比較して最大0.8%、最小0.0%、平均0.2%の誤差であり、全く一致した解が得られている。また、計算時間はI LMと比較して材料Aでは0.93倍と同程度の計算時間を要しているが、材料B、Cでは、それぞれ0.56倍、0.80倍と効率的に最終解を決定している。

(b) 連続桁の解析例¹³⁾

連続桁の各部材端には曲げモーメントとせん断力が作用するが、各静定基本部材に

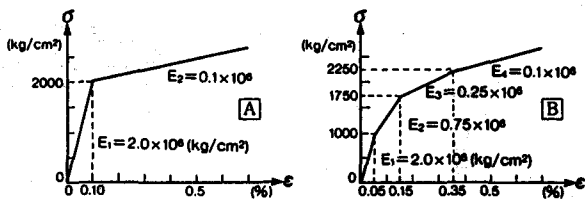


図-3 3種類の非線形材料の応力度-ひずみ関係

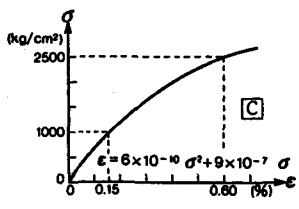


図-4 21部材2径間連続トラス

表-1 本解析法と変位法との解析結果の比較 (21部材2径間連続トラス)

材種	A		B		C	
	N (10 ³ ×kg)		N (10 ³ ×kg)		N (10 ³ ×kg)	
部材番号	本解析法	I. L. M.	本解析法	I. L. M.	本解析法	I. L. M.
1	171.3	171.2	168.7	168.6	158.2	158.2
2	153.3	153.4	146.5	146.4	123.7	123.7
6	-242.2	-242.1	-238.5	-238.5	-223.7	-223.7
7	303.3	303.4	298.7	298.7	288.5	288.5
8	353.0	353.2	355.4	355.3	357.6	357.5
9	328.7	328.5	330.1	330.2	337.2	337.3
11	-205.7	-204.8	-192.2	-192.2	-216.4	-216.4
18	-214.6	-214.5	-211.7	-211.7	-204.0	-204.0
19	-204.1	-203.7	-193.2	-193.2	-162.7	-162.8
21	2.9	2.8	3.8	3.7	13.3	13.2
ITE	23	25	30	60	17	26
CPU ¹⁾	1.09	1.17	1.46	2.60	0.97	1.21

1) FACOM M-180 IIADによる計算時間(秒)

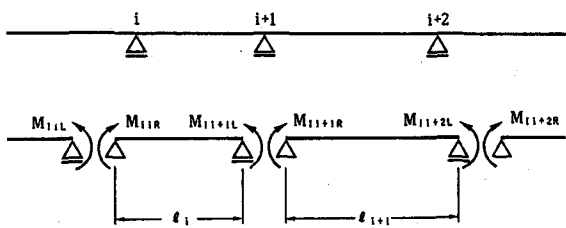


図-5 はり構造物の静定基本系および未知曲げモーメント

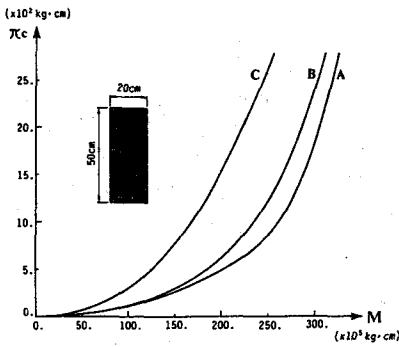
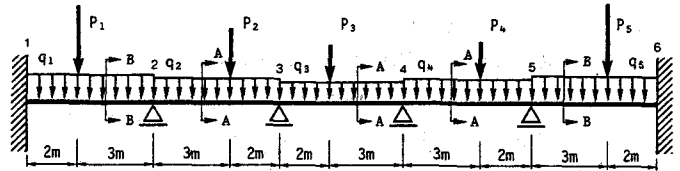
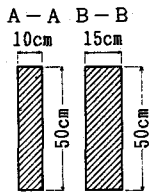


図-6 M- π_c 関係曲線の例



載荷状態Ⅰ $P_1=110\text{ton}$, $P_2=80\text{ton}$, $P_3=60\text{ton}$,
 $q_1=20\text{ton/m}$, $q_2=10\text{ton/m}$, $q_3=5\text{ton/m}$,
 $P_4=60\text{ton}$, $P_5=120\text{ton}$
 $q_4=10\text{ton/m}$, $q_5=20\text{ton/m}$

載荷状態Ⅱ $P_1=220\text{ton}$, $P_2=160\text{ton}$, $P_3=120\text{ton}$,
 $q_1=30\text{ton/m}$, $q_2=20\text{ton/m}$, $q_3=10\text{ton/m}$,
 $P_4=120\text{ton}$, $P_5=230\text{ton}$
 $q_4=20\text{ton/m}$, $q_5=30\text{ton/m}$



部材断面

図-7 五径間連続両端固定ばり

表-2 本解析法と変位法との解析結果の比較
(五径間連続両端固定ばり)

材 種		材 料 A ¹⁾			材 料 B			材 料 C		
解析方法		本解析法	変 位 法	誤 差 ²⁾	本解析法	変 位 法	誤 差 ²⁾	本解析法	変 位 法	誤 差 ²⁾
載 荷 状 態 Ⅰ	M_{11} ³⁾	-129.928	-129.852	0.059 %	-125.114	-125.092	0.018 %	-126.023	-125.992	0.025 %
	M_{12}	-76.472	-76.492	0.026 %	-76.071	-76.080	0.012 %	-76.358	-76.362	0.005 %
	M_{13}	-61.913	-61.892	0.034 %	-61.629	-61.613	0.026 %	-61.091	-61.076	0.025 %
	M_{14}	-38.491	-38.489	0.005 %	-38.660	-38.655	0.013 %	-38.774	-38.767	0.018 %
	M_{15}	-79.487	-79.502	0.019 %	-78.869	-78.875	0.008 %	-78.375	-78.378	0.004 %
	M_{16}	-137.904	-137.908	0.003 %	-132.544	-132.529	0.011 %	-134.198	-134.189	0.007 %
	E_{max} ⁴⁾	0.111 %			0.159 %			0.385 %		
	$\bar{\sigma}_{max}$ ⁵⁾	2010.6 kg/cm ²			1773.5 kg/cm ²			1891.5 kg/cm ²		
	CPU ⁶⁾	6.45	4.26	1.514	5.65	7.14	0.791	5.83	7.10	0.821
	ITE ⁷⁾	14	3		11	7		10	7	
載 荷 状 態 Ⅱ	M_{11} ³⁾	-212.234	-212.242	0.004 %	-214.027	-214.048	0.010 %	-223.714	-223.766	0.023 %
	M_{12}	-140.687	-140.699	0.009 %	-142.988	-142.977	0.008 %	-145.507	-145.483	0.016 %
	M_{13}	-124.263	-124.267	0.003 %	-122.266	-122.266	0.000 %	-122.868	-122.868	0.000 %
	M_{14}	-80.686	-80.688	0.003 %	-80.806	-80.810	0.005 %	-79.921	-79.923	0.003 %
	M_{15}	-142.771	-142.771	0.000 %	-142.653	-142.648	0.004 %	-146.457	-146.440	0.012 %
	M_{16}	-217.585	-217.583	0.001 %	-221.710	-221.720	0.005 %	-232.326	-232.374	0.021 %
	E_{max} ⁴⁾	0.620 %			0.737 %			0.906 %		
	$\bar{\sigma}_{max}$ ⁵⁾	2519.6 kg/cm ²			2636.8 kg/cm ²			3208.2 kg/cm ²		
	CPU ⁶⁾	7.43	12.68	0.586	8.50	12.22	0.696	8.90	8.61	1.034
	ITE ⁷⁾	10	14		10	10		10	8	

1): 非線形材料の種類(図-3 参照) 2): 変位法による解との相対誤差、ただし計算時間は変位法との比
3): 不静定曲げモーメント(ton-m) 4): 最大ひずみ 5): 最大応力(kg/cm²) 6): FACOM M-360AP による計算時間(sec)
7): 反復計算回数

における $\sum V=0$, $\sum M=0$ の2個のつり合い条件式を利用して、図-5に示すように未知部材端力を両端に作用する曲げモーメント2個に減少させることができる。さらに、支点到作用する左右の曲げモーメントが等しいこと($M_{1i}=M_{1r}$)を利用して式(2)のつり合い条件式を消去することができ、連続桁の全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題は各支点上の曲げモーメントのみを未知力とする無制約最小化問題とすることができる。

連続桁の解析においては、各微小桁要素のコンプリメンタリーエネルギーの算定において、作用曲げモーメントにつり合う断面要素のひずみ(応力)分布を決定するため反復計算が必要となるが、この繰り返し計算を避け、任意の曲げモーメントに対するはり断面のコンプリメンタリーエネルギーを能率的に求めるため、前もって図-6に示すような与えられたはり断面に対する曲げモーメントMとはりの単位長さ当たりのコンプリメンタリーエネルギー π_c の関係を導入した。このM- π_c 関係の導入により、任意のMにおける π_c の算定および差分法により求める全コンプリメンタリーエネルギー Π_c のMに関する偏微係数

$\partial \Pi_c / \partial M$ の計算を能率的に行うことが可能となった。また、はりの各断面に作用する曲げモーメントが位置により異なるので、はり全体としてのコンプリメンタリーエネルギーの計算は数値積分の台形公式を用いて行い、その分割幅 ΔX は解の精度および計算時間等を考慮して 2.0 cm とした。変位法においても要素長 l が短いほどより正確な解が得られるが、その解の精度を検討し変位法においても要素長を 2.0 cm とした。

未知支点曲げモーメントの数が 6 個である図-7 に示す五径間連続両端固定はりについて、図-3 に示す A, B, C の三種類の非線形材料について解析した結果および変位法により得られた解との比較を表-2 に示す。なお、解の収束判定規準としては、はり構造物の全コンプリメンタリーエネルギー Π_c の変化量が $1/1,000,000$ 以下となった時点で曲げモーメントの変化量も $1/10,000$ 程度となり、解が最終解に収束したものと判定した。 載荷状態 I では、変位法との相対誤差は 0.005~0.059 % であり、両解法による解は全く一致している。また、材料 A でははりの最大ひずみが 0.111 % であり、はり全体がほぼ弾性域内の応力（ひずみ）分布をしているので、エネルギー法による計算時間が変位法に対して 1.514 倍の計算時間を要している。しかし非線形性の大きな材料 B および C ではエネルギー法が 20 % 程度少ない計算時間で最終解を得ている。また、載荷状態 I より 2 倍程度大きな載荷状態 II でも変位法との誤差は 0.000~0.023 % であり、全く一致した解が得られている。変位法との計算時間の比は材料 A, B, C においてそれぞれ 0.586, 0.696, 1.034 倍であり、一般的に変位法より短い計算時間で最終解を得ている。

(c) ラーメン構造物

ラーメン構造物では各部材端に軸力、曲げモーメントおよびせん断力の 3 個の部材端力が作用し、一部材につき 6 個の部材端力を有する。しかし各静定基本部材における $\Sigma H = 0, \Sigma V = 0, \Sigma M = 0$ の 3 個の力のつり合い条件式を利用することにより未知部材端力を 3 個に減少させることができる。本研究では図-8 に示す H_{ij}, M_{ij}, M_{ik} を各部材における未知部材端力とし、各部材のコンプリメンタリーエネルギーをこれらの未知部材端力の関数として表わしている。また、各静定基本部材のコンプリメンタリーエネルギーはシンプソンの公式により算定している。 Π_c の収束判定規準としては Π_c の変化率が 1.0×10^{-6}

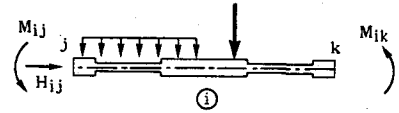


図-8 ラーメン部材の未知部材端力

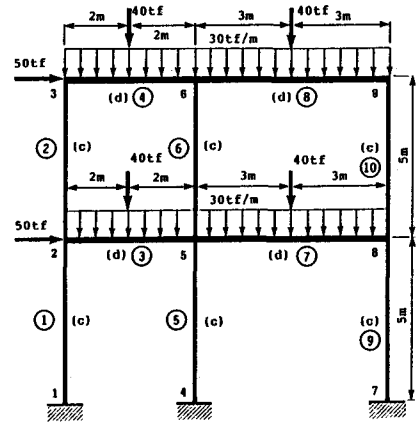


図-9 2層2径間ラーメン

表-3 本解析法と変位法との解析結果の比較 (2層2径間ラーメン, 材料C)

解析方法	材 料 C			
	本解析法	変 位 法	誤 差	ϵ_0, ϵ_s
$H_{1,1}$	65.71	65.01	1.065%	0.760%
$M_{1,1}$	91.00	90.96	0.044%	-0.848%
$H_{5,5}$	-23.45	-23.58	0.554%	0.993%
$M_{3,5}$	-156.77	-157.60	0.529%	-1.016%
$H_{4,6}$	-45.04	-44.85	0.422%	0.714%
$M_{4,6}$	-128.99	-129.72	0.566%	-0.753%
$H_{5,4}$	457.64	458.75	0.243%	0.495%
$M_{5,4}$	84.27	84.15	0.142%	-1.116%
$H_{6,5}$	228.29	228.79	0.219%	0.075%
$M_{6,5}$	27.73	27.60	0.469%	-0.254%
$H_{7,8}$	-4.15	-4.27	2.892%	1.050%
$M_{7,8}$	-161.24	-160.71	0.329%	-1.054%
$H_{9,7}$	236.66	236.24	0.177%	0.756%
$M_{9,7}$	97.62	97.49	0.133%	-1.094%
$H_{10,8}$	109.53	109.34	0.173%	0.488%
$M_{10,8}$	71.30	70.86	0.617%	-0.615%
$H_{10,9}$	-109.53	-109.34	0.173%	-0.949%
$M_{10,9}$	95.49	95.11	0.398%	0.796%
CPU (ITE)	1.211 (25)	3.599 (9)		

- 1) 部材端軸力 (ton) 2) 部材端曲げモーメント (ton·m)
3) FACOM M-360AP による計算時間 (分)
(ただし、() 内の数値は反復計算回数を表わす)
4) けたの最大上下繰ひずみ

以下で未知部材端力の変化率も 1.0×10^{-4} 程度になることより、この値を採用している。

変位法では各桁要素に作用する N , M による上下縁ひずみ $\varepsilon_u, \varepsilon_l$ を用いて仮想軸剛性 EA 及び曲げ剛性 EI を求め、 EA , EI が一定値に収束するまで反復解析を行い最終解を決定した。また、部材要素長を 10 cm としている。

図-9 に示す 2 層 2 径間ラーメンの計算結果および変位法による結果との比較を表-3 に示す。両解析法の最終解の相対誤差は、極めて小さな部材端力において例外的に 2.9% 程度の誤差があるが、ほとんどすべての部材端力において $0.00 \sim 1.00\%$ の範囲であり、両解析法の最終解はきわめてよく一致している。また、解の収束性については、すべての未知部材端力の初期値の絶対値を $100.0(t f \text{ または } t f \cdot m)$ としても 10 回程度の反復改良でほぼ最終解の近傍に達し、その後 15 回の改良により微修正を行い最終解に収束している。計算時間は変位法と比較して 0.34 倍と極めて効率的に最終解を決定している。

6. 結 論

本論文において、最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づき、構造物の全コンプリメンタリーエネルギーを各可動接点におけるつり合い条件のもとで SQP により反復して最小化することにより、骨組構造物の材料非線形解析を行う方法について述べ、トラス、はり、ラーメン構造物の解析例および変位法による結果との比較を示した。本研究により得られた結論は次のとおりである。

- ① 骨組構造物の材料の非線形性を考慮した解析問題は、各部材端力を未知変数とし、最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づき式 (1), (2) に示す非常に単純な全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題として定式化することができる。この材料非線形解析法はいかなる応力度-ひずみ関係を有する材料からなる骨組構造物に対しても適用することができ、同一の解析アルゴリズムで統一的に解くことが可能で、きわめて汎用性のある解析法である。
- ② 本論文でのべた解析法により、確実に精度の高い解が得られる。また、最終解への収束状況も極めて良好である。
- ③ 本論文でのべた解析法では、従来の有限要素法における増分法や反復法などによる解析のように、荷重を分割したり仮想荷重を考慮したりする必要がない。さらに、構造物の各有限要素の応力状態に合わせて各要素の剛性マトリックスを修正する必要もなく、作用荷重および各部材要素の材料の応力度-ひずみ関係をそのまま用いて解を直接求めることができる。
- ④ 本論文でのべた骨組構造物の非線形解析法における未知変数の数は、最も多い剛接部材でも一部材につき 3 個であり、有限要素法と比較して極めてわずかの計算機の記憶容量で解くことが可能である。また、解の精度を上げるためには各断面におけるひずみおよび全コンプリメンタリーエネルギーの収束過程における収束判定基準値を小さくするのみでよく、有限要素法におけるように、要素の分割を小さくし、そのために必要とする計算機の記憶容量や計算時間、入力データなどが指数関数的に増加するようなことがない。このことも本論文で述べた解析法の大きな長所の一つである。
- ⑤ 解析に必要な計算時間は、材料 A のような単純な応力-ひずみ関係を有する材料で、構造物の応力やひずみが初期の線形比例範囲にとどまるような場合には変位法が能率的となるが、それ以外では本論文の解析法が能率的となり、多くの解析例より変位法の $1/3 \sim 1/1$ 程度の計算時間で最終解が得られている。また、本論文でのべた解析法の計算効率は、変位法の場合と異なり、材料の非線形性の特性により影響を受けることが極めて少なく、いかなる応力-ひずみ関係を有する材料についてもほぼ同一の計算時間で最終解を決定することができる。
- ⑥ 本論文の解析法では、構造物の全コンプリメンタリーエネルギー Π_c の最小化の過程で、 Π_c の未知部

材端力 X に関する偏微係数 $\partial \Pi_c / \partial X$ の計算が必要となる。この偏微係数は、 X の変化による X の属する部材内のコンプリメンタリーエネルギーの変化のみを考慮して差分法により容易に求められる。このことも本論文の解析法の大きな長所の一つである。

以上の結論より、本論文でのべた非線形解析法においては、解析に必要な計算機容量や入力データが変位法と比較して極端に少なくてすみ、解析アルゴリズムも単純で、非線形性の大きな解析モデルでは計算時間も変位法と比較して $1/3 \sim 1/1$ 程度であり、材料の非線形性を考慮した骨組構造物の解析が非常に高い精度で、統一的に、確実かつ能率的に行え、きわめて信頼性の高い解析法であることが明らかとなった。

参 考 文 献

1. Van den Broek: Theory of Limit Design, John Wiley and Sons Inc., 1948.
2. Prager, W. and Hodge, P.G. Jr.: Theory of Perfectly Plastic Solids, John Wiley and Sons Inc., 1951.
3. Cohn M.Z. and Maier G. eds.: Engineering Plasticity by Mathematical Programming, Pergamon Press, 1979.
4. 鷺津・宮本・山田・山本・川井 共編: 有限要素法ハンドブック I 基礎編, II 応用編, 培風館, 1981, 1983.
5. 成岡・服部・加藤・後藤・上田 共著: 骨組構造解析、コンピュータによる構造工学講座 II-1-B, 日本鋼構造協会編、培風館、pp.223-289, 1971.
6. 太田俊昭: 構造物の非弾性解析、新体系土木工学 8、土木学会編、技報堂、pp.61-131, 1979.
7. Klaus-Jurgen Bathe: Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, pp.301-406, 1982.
8. Owen, D.R.J. and Hinton, E.: Finite Elements in Plasticity -Theory and Practice-, Pineridge Press Ltd., Swansea, pp.13-153, 1980.
9. Bogner, F.K. et al.: Development and Evaluation of Energy Search Methods of Nonlinear Structural Analysis, Tech. Rep. AFFDL-TR-65-113, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
10. Pietrzak, J.: Analiza Statyczna Nieliniowych Układow Dyskretnych, Politechnika Poznanska, Rozprawy Nr 132, Poznan, 1982.
11. 大久保禎二・和多田康男: エネルギー原理およびSQPによるトラス構造物の材料非線形解析法に関する研究, 土木学会論文集, 第374号/1-6, pp.427-436, 1986.
12. Ohkubo, S. et al.: Nonlinear Analysis of Truss by Energy Minimization, Computer and Structures, Vol.27, pp.129-145, 1987.
13. 大久保禎二・藤脇敏夫: コンプリメンタリーエネルギー最小化によるはり構造物の材料非線形解析法 土木学会論文集, 第398号/1-10, pp.227-236, 1988.
14. Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 2nd ed., Pergamon Press, Oxford, 1975.
15. Powell, M.J.D.: A Fast Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations, Lecture Notes in Mathematics, No.630, G.A.Watson ed., Springer-Verlag, pp.144-157, 1978.
16. 今野 浩・山下 浩: 非線形計画法, 日科技連, 1978.