

(18) 入力地震動の周波数特性と動作遅延時間を考慮した動的応答の最適アクティブコントロール

Phase Delayed Optimal Active Control of Structures under Stochastic

Base Excitation with a Predominant Frequency

山田 善一* ○ 家村 浩和*
Yoshikazu Yamada, Hirokazu Iemura
五十嵐 晃** 岩崎 好寿***
Akira Igarashi, Yoshihisa Iwasaki

Phase delayed active control of structures under stochastic base excitation is investigated. The synthesis of an active control system discussed in the study is based on the use of stochastic control theory, where an energy-based stochastic criterion is employed for optimal control. As a result, an optimal control law for input with a predominant frequency is developed, which consists of a response feedback portion and a ground-input feedforward portion. The effectiveness of the phase delayed active control law is demonstrated with a numerical simulation, which shows that the proposed control law brings considerable control force (RMS) reduction, compared with the feedback control, when the two have the same level of response reduction. However, if phase lag becomes more than one-third of the natural period of structures, efficiency of the control force decreases rapidly.

Key words : Active Control, Optimal Control Law, Earthquake Excitation, Predominant Frequency, Phase Delay, Kalman Filtering

1. 概説

最近における構造材料、設計・施工技術の進歩にともなって構造物は長大化、軽量化する傾向にあり、それらの新しい限界状態として、変形や振動問題が取り上げられている。特に軽減衰の構造系では、共振による動的応答倍率が大きくなることから、これを積極的に制御しようとするアクティブコントロールが注目され始めている。本研究では、まず確率過程としてモデル化した地震動入力に対して、確率論的なエネルギー規範で最適なアクティブコントロールの手法について考察した。特に地震動が地盤特性の影響を受けて卓越周波数を有する場合には、より合理的なフィードフォワードコントロールを従来のフィードバックコントロールに追加できることを示した。しかしアクティブコントロールを実施する際の問題点として、制御力を加える際の加力装置の動作時間遅れが存在することが指摘されている。構造物の応答や地動の状態をセンサーで感知してから制御力を計算するまでの時間、加力装置へ指令が出されてから実際に制御力が作用するまでの時間等によって、動作時間の遅れは取り除くことができないものである。この時間遅れが大きくなると、制御力によって構造物が加振され、安定性が失われることがある。本研究の後半では、時間遅れの影響を軽減する数理的方法を提案し、シミュレーションを行った。

* 京都大学工学部土木工学教室, ** Dept. of Applied Mech. and Eng. Science, U. C. San Diego, *** 神戸市

2. 最適制御の定式化

2.1 振動エネルギー期待値の最小化

地動 $z(t)$ のもとで、制御力 $U(t)$ (m 次元ベクトル) を受ける n 自由度系の運動方程式

$$M\ddot{Y} + C\dot{Y} + KY = -m\ddot{z} + DU \quad (D: n \times m \text{ 行列})$$

は次のような状態方程式で表現することができる。

$$\dot{X} = AX + BU + G\ddot{z}$$

ただし、 $X^T = (Y^T \quad \dot{Y}^T)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}D \end{pmatrix} \quad G = \begin{Bmatrix} 0 \\ -M^{-1}m \end{Bmatrix}$$

ここで、定常応答状態において次のような確率論的評価規範を満たすような制御力 $U(t)$ を考える。

$$J = E[\frac{1}{2}\dot{Y}^T M \dot{Y} + \frac{1}{2}Y^T K Y + \sum_{i=1}^m r_i u_i^2] \rightarrow \min.$$

すなわち、構造物の振動エネルギー（運動エネルギー＋ひずみエネルギー）の期待値と、各制御力の分散の重み付き和を最小とするようなものを求める。概念図を Fig. 1 に示す。考えうるすべての制御は斜線部より上の領域に存在する。そのうち、この規範に基づく制御は、例えば同一の分散を持つ制御力の中で振動エネルギー期待値を最小にするものである、という意味で最適である。上式は次のようにも書ける。

$$J = E[X^T R_1 X + U^T R_2 U] \rightarrow \min.$$

ただし、 $R_1 = \frac{1}{2} \text{blockdiag}(K, M)$

$$R_2 = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_m)$$

2.2 ホワイトノイズ加速度地動入力に対する最適制御則

制御力 $U(t)$ を状態フィードバック

$$U(t) = FX(t) \quad (F: m \times 2n \text{ 行列})$$

の形式で与えると仮定する。 $\ddot{z}$ が定常なホワイトノイズ過程であるとしたとき、次のような行列代数方程式

$$PA + A^T P + PBR_2^{-1}B^T P + R_1 = 0 \quad (\text{Riccati 方程式})$$

の正定対称解 $P(2n \times 2n \text{ 行列})$ を用いて

$$F = -R_2^{-1}B^T P$$

とすれば、 J を最小にすることを示すことができる。

2.3 卓越周波数を持つ地動入力に対する最適制御則

地動変位 $z(t)$ が、正規ホワイトノイズ加振を受ける 1 自由度振動系の応答としてモデル化されると仮定する。このような地動 $z(t)$ のもとで J を最小とする最適な制御力は、前節の手法の応用によって、状態フィードバック（閉ループ）による制御力に、地動によって算出されるフィードフォワードの部分を加えたものになるという結果が得られる。

$$U(t) = F_X X(t) + F_Z Z(t) \quad (F_X: m \times 2n, F_Z: m \times 2 \text{ 行列})$$

ただし、

$$Z = (Z(t) \quad \dot{Z}(t))^T \quad (m=1 \text{ の場合})$$

この制御力を模式

図に示したのが、

Fig. 2 である。

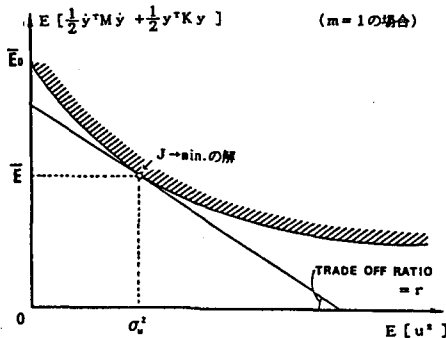


Fig. 1 Control Force and Vibration Energy

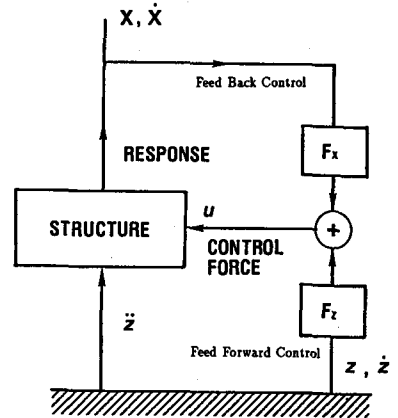


Fig. 2 Feed Back and Feed Forward Control

3. 遅延時間の補償方法

本研究では時間遅れを補償する方法として、現在から時間遅れの分だけ先の時刻において加えるべき制御力を、現在観測された状態量から推定する方法を考えた。

Fig. 3 で表される 1 自由度系が制御力 u を受ける場合の運動方程式は次のようになる。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u - m\ddot{z}$$

これを線形加速度法を用いて離散化すると

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_{t+1} + Gz_{t+1}$$

ただし、

$$x_t = \begin{pmatrix} x_t \\ \dot{x}_t \\ \ddot{x}_t \end{pmatrix} \quad A = \frac{1}{m + \frac{\Delta t}{2}c + \frac{\Delta t^2}{6}k} \begin{pmatrix} m + \frac{\Delta t}{2}c & \Delta tm + 2\Delta t^2c & \frac{\Delta t^2}{3}m + \frac{\Delta t^3}{12}c \\ -\frac{\Delta t}{2}k & m - \frac{\Delta t^2}{3}k & \frac{\Delta t}{2}m - \frac{\Delta t^2}{12}k \\ -k & -c - \Delta tk & -\frac{\Delta t}{2}c - \frac{\Delta t^2}{3}k \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{m + \frac{\Delta t}{2}c + \frac{\Delta t^2}{6}k} \begin{pmatrix} \frac{\Delta t^2}{6} \\ \frac{\Delta t}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \frac{-m}{m + \frac{\Delta t}{2}c + \frac{\Delta t^2}{6}k} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\Delta t}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Δt : 観測時間間隔

ここで、地動加速度 $\ddot{z}$ が正規ホワイトノイズ過程であるとする、最適制御理論を適用することにより制御力は $u_{t+1} = F_x x_{t+1}$ という形で表される。ところが、これでは x_{t+1} が観測されると同時に u_{t+1} を計算して加えなければならないので、現実には不可能である。

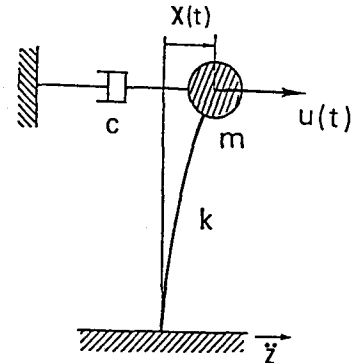


Fig. 3 SDOF System

そこで、 u_{t+1} を x_t から求めることを考える。それにはまず、 x_{t+1} を予測しなければならない。

まず、離散化された運動方程式を次のように変形する。

$$x_{t+1} = Ax_t + BF_x x_{t+1} + Gz_{t+1}$$

$$x_{t+1} = (I - BF_x)^{-1}(Ax_t + Gz_{t+1})$$

ここで、カルマンフィルターのアルゴリズムを用いることにより、構造物の応答は次のように予測することができる。

$$\hat{x}_{t+1/t} = (I - BF_x)^{-1}Ax_t$$

つまり、次のステップにおける外力を 0 と仮定して応答を求めればよいことになる。これは、ホワイトノイズの性質により、現在の地動と将来起こる地動とにまったく相関がないためだと考えられる。

地盤振動が卓越振動数を持つ場合にはその不規則波形が何らかのフィルターを通過したホワイトノイズであると仮定する。ここではそのようなフィルターとして 1 自由度振動系フィルターを地盤の

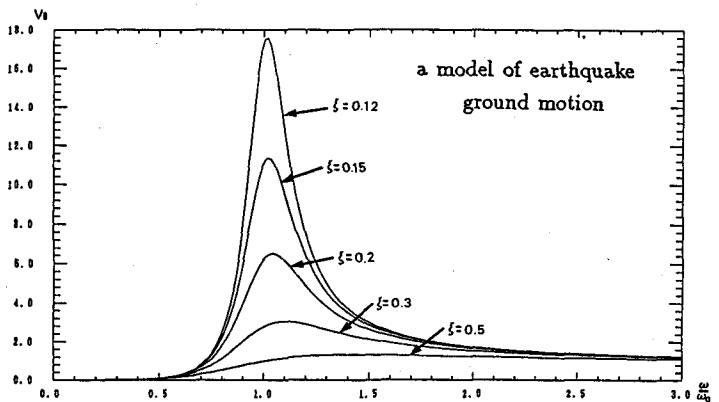


Fig. 4 Power Spectrum Model

モデルとして考える。つまり、地盤を1自由度の振動系である、とみなすのである。仮想的なフィルタへの入力を $w(t)$ とすると、地盤の運動方程式は次のようになる。

$$\ddot{z} + 2\zeta_g\omega_g\dot{z} + \omega_g^2 z = w$$

ここで ω_g は地盤の卓越振動数であり、 ζ_g はスペクトルのピークの高さを表す定数である。このフィルタへの仮想的な入力 w を強度 V_0 のホワイトノイズであるとするれば、加速度応答のパワースペクトルを求めると、

$$P(\omega) = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^4}{\left\{\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 - 1\right\}^2 + 4\zeta_g^2\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2} V_0$$

となる。このパワースペクトルモデルは Fig. 4 のようになる。

次に地盤の運動方程式を線形加速度法を用いて離散化すれば、

$$z_{t+1} = A_z z_t + G_z w_{t+1}$$

ただし、

$$z_t = \begin{pmatrix} z_t \\ \dot{z}_t \\ \ddot{z}_t \end{pmatrix} \quad G_z = \frac{1}{1 + \Delta t \zeta_g \omega_g + \frac{\Delta t^2}{6} \omega_g^2} \begin{pmatrix} \frac{\Delta t^2}{6} \\ \frac{\Delta t}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_z = \frac{1}{1 + \Delta t \zeta_g \omega_g + \frac{\Delta t^2}{6} \omega_g^2} \begin{pmatrix} 1 + \Delta t \zeta_g \omega_g & \Delta t + 4\Delta t^2 \zeta_g \omega_g & \frac{\Delta t^2}{3} + \frac{\Delta t^3}{6} \zeta_g \omega_g \\ -\frac{\Delta t}{2} \omega_g^2 & 1 - \frac{\Delta t^2}{3} \omega_g^2 & \frac{\Delta t}{2} - \frac{\Delta t^3}{12} \omega_g^2 \\ -\omega_g^2 & -2\zeta_g \omega_g - \Delta t \omega_g^2 & -\Delta t \zeta_g \omega_g - \frac{\Delta t^2}{3} \omega_g^2 \end{pmatrix}$$

これにカルマンフィルタのアルゴリズムを適用すると、地盤の状態は

$$\hat{z}_{t+1/t} = A_z z_t$$

として予測することができる。

また、地盤振動が卓越振動数を持つ場合には、制御力は $u_{t+1} = F_x x_{t+1} + F_z z_{t+1}$ という形で表されるので構造物の運動方程式は次のようになる。

$$x_{t+1} = (I - BF_x)^{-1} \{Ax_t + (G + BF_z)\hat{z}_{t+1/t}\}$$

すると、上で求めた地盤の状態の予測値を用いることにより構造物の応答は、

$$\hat{x}_{t+1/t} = (I - BF)^{-1} \{Ax_t + (G + BF_z)\hat{z}_{t+1/t}\}$$

として予測することができる。このように予測された応答を用いて制御力を

$$u_{t+1} = F_x \hat{x}_{t+1/t} + F_z \hat{z}_{t+1/t}$$

と設定すれば、遅延時間を考慮したアクティブコントロールを行うことができる。

4. 数値計算例

入力地震動として、ホワイトノイズと卓越振動数が0.8Hz、地盤の減衰定数が0.2の模擬地震動を作成した。そして $m=4(\text{kg} \cdot \text{sec}^2/\text{cm})$ 、減衰定数2%、固有周期2秒の1自由度振動系にこの地動が入力された場合の応答を前節で述べた方法を用いて制御力を予測した場合と、予測を行なわなかった場合について数値計算によって求めた。入力がホワイトノイズの場合について、遅延時間と振動エネルギーおよび制御力との関係を表した

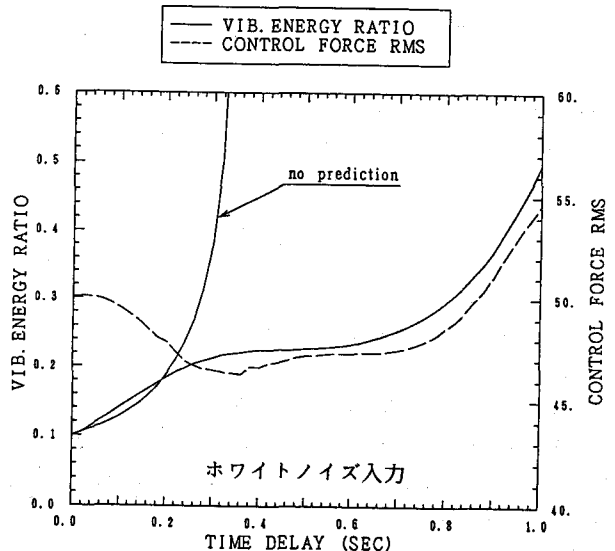


Fig. 5 Time Delay Effect Using Control Force Prediction

のが Fig. 5 である。振動エネルギーについては、制振効果がわかりやすいように、制御を行わない場合との比をとって、無次元化している。ここでは、制御力の予測を行った場合と行ななかった場合とを比較している。これを見ると、時間遅れが 0.2 秒までは制御力の予測を行なった場合と行なわなかった場合の制振効果にはそれほど差はみられない。ところが、0.2 秒を過ぎると制御力の予測を行ななかった場合は、振動エネルギーが急激に増加している。それに対して制御力の予測を行なった場合は時間遅れが 0.7 秒付近までは振動エネルギーがほぼ一定となっており、制御力を予測することにより時間遅れがよく補償されていることがわかる。しかし、0.7 秒を過ぎると振動エネルギーが増大しはじめ、また、制御力の標準偏差も増えはじめていることから予測による補償効果が薄れていくことがわかる。

次に入力地震動が卓越振動数を持つ場合について遅延時間と制振効果との関係を表わしたのが Fig. 6 である。これを見ても、制御力の予測を行なうことにより時間遅れがよく補償されていることがわかる。また、入力がホワイトノイズの場合と比べても、補償の効果がより大きく表れている。これは、ホワイトノイズの場合には外力を 0 とみなして予測を行なっているのに対して、卓越振動数を持つ場合には地動も予測しているため、構造物の応答がより正確に予測でき、制御力の設定がより正確にできているためと考えられる。

時間遅れが 0.4 秒の場合を例にとり、応答と制御力の時刻歴を求めた。Fig. 7 はホワイトノイズ入力の場合である。応答曲線を見ると制振効果は保たれているが、時間遅れがない場合よりも若干大きくなっている。また、制御力を見ると、位相のずれが見られる。このずれがある

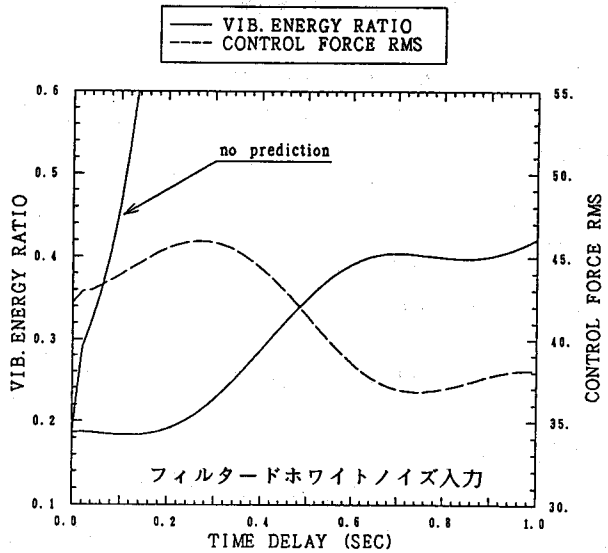


Fig. 6 Time Delay Effect Using Control Force Prediction

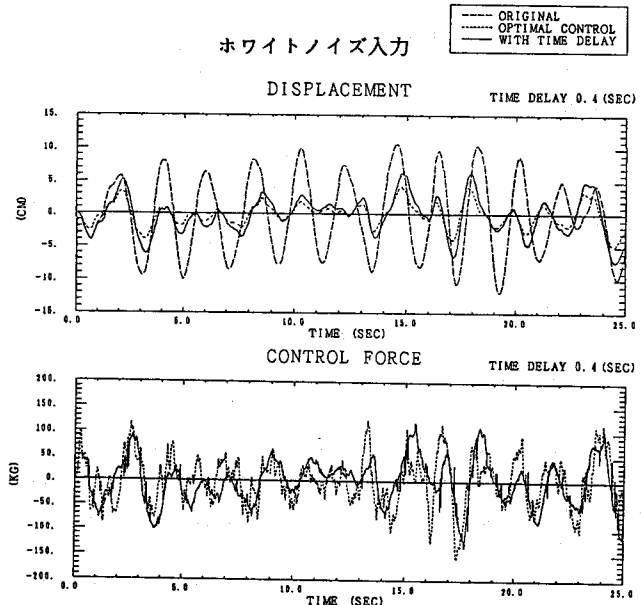


Fig. 7 Simulated Response and Control Force

と、振動を抑制しようとして加えた力が、ずれの時間の間は、逆に振動を増大させるように働くため、応答が大きくなったと考えられる。Fig. 8 は地動が卓越振動数を持つ場合であるが、この場合は応答曲線は、時間遅れがない場合とほとんど同じであり、制御力の位相のずれもあまり見られない。

5. まとめ

本研究では、まず地震動による構造物の振動をエネルギー規範を用いて最適にアクティブコントロールする手法について述べた。その後、加力装置の動作時間遅れを克服する方法として、将来加えるべき制御力を現在観測された情報から予測する方法を提案した。得られた結果をまとめると次のようになる。

1. 従来よりのフィードバックコントロールに加えてフィードフォワードコントロールを追加することにより、構造物振動をより合理的に制御することができる。
2. 外力がきわめて広帯域で、ホワイトノイズと見なせる場合には、構造物の応答は、制御力の遅延時間の間に作用する外力を0とおいて予測することができる。そして、予測された応答値に基づいて制御力が設定できる。
3. 地盤振動が卓越振動数を持つ場合には、その不規則波形をホワイトノイズ入力に対する1自由度系の出力とみなすことによって、一定時間後の地動の予測が行える。そして、構造物の応答の予測値は、予測された地動が作用する場合の応答を計算することにより求められ、これをもとに制御力が設定できる。

本研究では、入力される不規則地震動の周波数特性が事前にわかっているものとしたが、これが不明な場合や時間的に変動する場合には、地盤の特性を表すパラメーターを同定する問題を考える必要がある。

参考文献

1. H. Kwakernaak and R. Sivan, "Linear Optimal Control Systems," Wiley Interscience, 1972.
2. J. N. Yang and M. J. Lin, "Optimal Critical-Mode Control of Building under Seismic Load," Proc. ASCE, Vol.108(EM6), pp.1167-1185, 1982.
3. L. Meirovitch and L. M. Silverberg, "Control of Structures Subjected to Seismic Excitation," Proc. ASCE, Vol.109(EM2), pp.604-618, 1983.
4. H. H. W. Leipholz and M. Abdel-Rohman, "Control of Structures," Martinus Nijhoff Publishers, 1986.
5. T. Kobori, "Active Seismic Response Control," Proc. 9WCEE, Vol. 8, pp.435-446, 1988.
6. 片山 徹, "応用カルマンフィルター," 朝倉書店, 1983年4月.

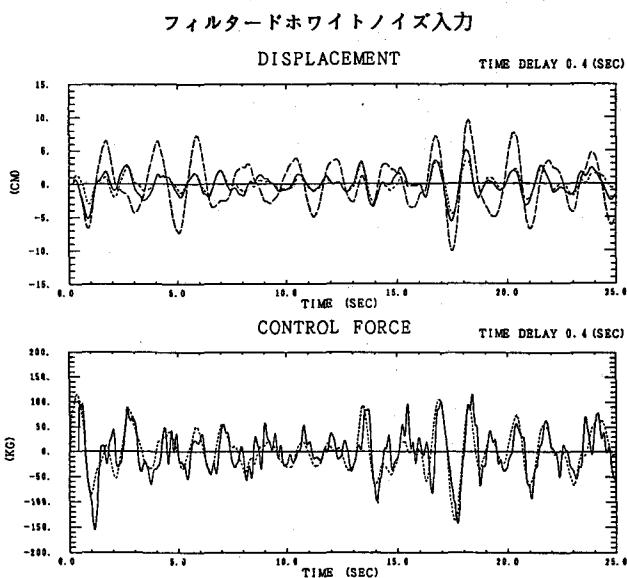


Fig. 8 Simulated Response and Control Force