

(16) 履歴型非線形システムの確率制御

STOCHASTIC ACTIVE CONTROL OF NONLINEAR HYSTERETIC SYSTEMS

奈良岡浩二* 李 再明**

勝倉 裕** 渡辺孝英**

by Koji NARAOKA, LI Zaiming,

Hiroshi KATUKURA and Takahide WATANABE

Since the sole application of either passive or active control for structures may not work or pay practically in some circumstances, the combination of them can be expected to be useful and efficient to circumvent the problem. This combined control is, essentially, to deal with the active control of nonlinear structures due to the nonlinearity of the passive control elements. In this paper, various active control laws for the nonlinear structures subjected to random excitation have been studied on the basis of stochastic linearization and further their feasibility and efficiency have been investigated by numerical examples. As the result it has been shown that among the imposed laws the follow-up control algorithm which makes good use of the nonlinearity is most efficient in terms of performance function J .

Key Words : Stochastic Active Control, Nonlinear Hysteretic Systems, Nonlinear State Equation, Stochastic Linearization

1. はじめに

地震外力を受ける建物の応答を制御する場合、アクティブフィードバック制御は必要となるエネルギー量が大きい¹⁾ため、単独で用いる場合には適用可能な構造物は柔で重量が比較的軽いものに限定される¹⁾。また、現実的に発生可能な力をパルスのに加えるパルス制御法も提案されているが^{2),3)}、その有効性は外力の大きさに依存する。このため、免震装置や粘弾性体などを用いたパッシブ制御とアクティブ制御を併用する方法が有効と考えられる⁴⁾。ここで、パッシブ制御で用いられる減衰要素などは、一般に履歴型非線形性を示すため、履歴型非線形性を考慮した制御手法が必要となると考えられる。一方、入力⁵⁾の確定的な性質を予測することは不可能であるため、入力のランダム性を考慮して制御アルゴリズムの有効性を確率的に評価する必要がある。以上のことから、本論文では履歴型非線形システムを対象として、入力のランダム性を考慮したランダム振動理論を制御理論に導入した確率制御の概念を示し、その有効性を確認するものである。

なお、既往の研究において、ランダムな外力を受ける非線形構造物を対象とした最適制御に関する研究例としては、各時刻における状態量から定まる評価関数を最小化する瞬間最適制御という概念を提案しているものがある⁴⁾。また、確率制御を扱った研究例として、ランダムな外力を受ける線形システムを対象としたものがある⁵⁾。

* 工修 清水建設(株) 大崎研究室

** 工博 清水建設(株) 大崎研究室

2. 制御システムの状態方程式

まず、検討対象とするシステムを1自由度の履歴型非線形システムとする。一般に、履歴型非線形システムにおける復元力 Q は、(1)式のように瞬間的なものと履歴成分の和として表現される。

$$Q = \alpha kx + (1 - \alpha)kD_y z \quad (1)$$

ここに、 α 、 k と D_y はそれぞれ剛性の降伏率、初期剛性および降伏変位を表す。 x は瞬間変位、 z は D_y で規格化された履歴成分であり、一般的には(2)式のように示されている^{6), 7)}。

$$\dot{z} = \lambda / D_y (\kappa \dot{x} - \beta \dot{x} |z|^n - \gamma |\dot{x}| z |z|^{n-1}) \quad (2)$$

ここに、 κ 、 β 、 γ と n は履歴ループを規定するパラメータである。 λ はいわゆる履歴係数で状態に依存する瞬間剛性を規定するものである。例えば、bilinearモデルに対しては $\lambda=1$ となる。場合によっては、 λ を表現するために、他の状態変数と状態に依存したパラメータの特性を定義する必要がある。(2)式から、一般的に、履歴特性がY.K.Wenモデル⁸⁾により記述される基本ループと状態に依存する瞬間剛性によって構成されることが理解できる。特に、 $\kappa=1.0$ 、 $\beta=\gamma=0.5$ 、 $n \rightarrow \infty$ の時、(2)式により表されたモデルはPiece-Wise-Linear型の履歴モデルとなる。

履歴型非線形性を有する装置あるいは材料が組み込まれたシステムを動的に制御する時の1自由度システムの非線形状態方程式は(1)と(2)式を用いて(3)式で表現することができる。

$$\frac{dX}{dt} = F(X) + CV + D(t) \quad (3)$$

ここに、 X は状態変数であり、 $x, z, \dot{x}$ の3つの要素から構成される。 V は制御力ベクトル、 $D(t)$ は外力ベクトルである。

3. 確率制御アルゴリズム

非線形構造物に対する最適な制御則を定めるため、まず、確率論的な等価線形システムを考える。外力ベクトル $D(t)$ を強度行列が Π のGaussian white noiseとする。確率論的な等価線形化手法⁹⁾を(3)式に適用すると、(4)式が得られる。

$$\frac{dX}{dt} = AX + CV + D(t) \quad (4)$$

ここに、

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & K_e/D_y & C_e/D_y \\ -\alpha\omega_0^2 & -(1-\alpha)D_y\omega_0^2 & -2h_0\omega_0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad D(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{x}_0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ z \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad (5)$$

ここに、 ω_0 、 h_0 は初期状態における固有円振動数と減衰定数である。また、 $\ddot{x}_0$ は強度が I_0 のGaussian white noiseである。(5)式において K_e と C_e は次のように与えられる。

$$K_e = E[\lambda]a \quad (6a) \quad C_e = E[\lambda]b \quad (6b)$$

ここに、 $E[\lambda]$ は λ の期待値を表し、応答の共分散行列 S により表現される。また、 a 、 b はY.K.Wenのモデル¹⁰⁾に対応する等価線形係数であり、確率論的な等価線形手法により簡単に評価することができる。つまり、 K_e と C_e は S により表現される。なお、 $S_{ij} = E[x_i x_j]$ である。制御力は、ある規準の下で表現されるフィードバック制御力とする。すなわち、 $V = HX$ とすると、 S は次の方程式を満足する。

$$\frac{dS}{dt} = (A + CH)S + S(A + CH)^t + \Pi \quad (7)$$

ここで、肩文字の t はベクトルあるいは行列の転置を表し、 Π は $\Pi_{33}=I_0$ で Π_{33} 以外の要素はゼロとなる行列である。また、 $t=0$ のときは、応答がゼロであるため、 $K_e(t=0)=0$ 、 $C_e(t=0)=1$ となる。

(4)式のシステムの可制御性を調べると、

$$\text{rank}[C, A_{(t=0)}^2 C] = 2 < 3 \quad (8)$$

このため、初期状態の等価線形システムは可制御性を満足しないことになる。また、履歴成分 z を観測することは、現実的には困難であるため、ここでは、履歴成分は観測できないと仮定する。しかしながら、 H を決めるため、(4)式のシステムが可制御性および可観測性を満足するようにする必要がある。

このために、まず、(7)式の共分散行列 S において x と $\dot{x}$ に係る要素だけを取り出す。つまり、

$$\sigma = \Gamma^t S \Gamma \quad \text{ここで } \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

なお、変換行列 Γ には次のような性質がある。

$$\Gamma \Gamma^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad (\text{単位行列}) \quad (10)$$

(7)式の両辺に左側と右側からそれぞれ Γ^t と Γ を乗じると、(11)式が得られる。

$$\frac{d\sigma}{dt} = (G + BK)\sigma + \sigma(G + BK)^t + E_0 \quad (11)$$

ここで、

$$G\sigma = \Gamma^t A S \Gamma \quad B = \Gamma^t C \quad K = H \Gamma \quad E_0 = \Gamma^t \Pi \Gamma \quad (12)$$

なお、(11)式の誘導において、(10)式の性質を用いている。(11)、(12)式から(11)式に係る等価線形システムは(13)式で与えられる。

$$\frac{dY}{dt} = GY + BU + W(t) \quad (13)$$

ここで、

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_e^2 & -2h_e \omega_e \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{x}_0 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad U = KY \quad (14)$$

$$\omega_e^2 = \alpha \omega_0^2 + (1 - \alpha) D_y \omega_0^2 \frac{S_{21} S_{33} - S_{23} S_{31}}{S_{33} S_{11} - S_{13} S_{31}} \quad (15a)$$

$$2h_e \omega_e = 2h_0 \omega_0 + (1 - \alpha) D_y \omega_0^2 \frac{S_{23} S_{11} - S_{21} S_{13}}{S_{33} S_{11} - S_{13} S_{31}} \quad (15b)$$

最終的に(13)式で与えられる確率的に等価線形なシステムは可制御かつ可観測となる。(13)式に基づいて線形システムに提案されている制御理論を非線形システムに拡張することが可能となる。ここで、制御則としては、表-1に示す4種類を検討対象とし、各制御則の有効性の検討を行った。評価関数は状態量の積分量の J と各時刻の状態量で決まる J^* 、制御則としてはそれぞれの評価関数に対して非線形性を無視して初期状態における線形システムのパラメータを用いる定値制御とシステムの非線形性に対応する等価な周期と減衰定数を用いる追従制御がある。それぞれの制御則により、制御行列 P が与えられる。なお、定値制御と

追従制御においては、 P はリカッチ行列となる。制御行列 P はフィードバックゲイン K と(16)式の関係がある。また、 Q 、 R は重み行列であり、肩文字の -1 は逆行列を示す。 T は外力の継続時間を表す。

$$K = -\frac{1}{2}R^{-1}B^tP \tag{16}$$

ここで、等価線形手法により応答を評価するとき、 $x, z, \dot{x}$ の3つの変数を用いた理由は、 x と $\dot{x}$ だけで評価する方法では、応答レベルが大きくなると精度が悪くなるためである。また、履歴成分 z を導入することにより、いろいろな復元力特性をもつシステムに対して、非線形状態方程式の定式化が可能となるためである。

表-1 検討対象とした制御則

制御則	係数行列	評価関数	制御行列 P
定値制御	$G_0 = G(t=0)$	$J = \int_0^T [Y^t Q Y + U^t R U] dt$	$P_0 G_0 - 1/2 B R^{-1} B^t P_0 + G_0^t P_0 + 2Q = 0$
瞬間定値制御	$G_0 = G(t=0)$	$J^* = Y^t Q Y + U^t R U$	$P_0^* = 2\{[I/\Delta t - G_0]^{-1}\}^t Q$
瞬間追従制御	$G = G(t)$	$J^* = Y^t Q Y + U^t R U$	$P^* = 2\{[I/\Delta t - G]^{-1}\}^t Q$
追従制御	$G = G(t)$	$J = \int_0^T [Y^t Q Y + U^t R U] dt$	$P G - 1/2 B R^{-1} B^t P + G^t P + 2Q = 0$

4. 適用例

各制御アルゴリズムの有効性を調べるため、(17)式に示す評価値 $J_x, J_{\dot{x}}, J_u, J_{total}$ の比較を行った。外力は強度 $I_0=1200(\text{cm}^2/\text{s}^3)$ のGaussian white noiseで、継続時間 T が40秒、時間刻みは0.02秒とした。システムに関しては、免震建屋にアクティブな制御力を加える場合を想定し、1自由度の履歴型非線形システムでモデル化した。復元力特性はbilinear型、初期周期と減衰定数はそれぞれ1秒と0.01、降伏変位 D_y は3cm、剛性の降伏率 $\alpha=0.1$ とした。また、表-1に示した評価関数における重み行列 Q は対角行列で対角成分の値は1とし、 R は 10^{-3} から 10^3 までの範囲で対数軸で等間隔となる20個の値を用いた。

$$J_x = \int_0^T E[x^2] dt \quad J_{\dot{x}} = \int_0^T E[\dot{x}^2] dt \quad J_u = \int_0^T E[U^t U] dt \quad J_{total} = J_x + J_{\dot{x}} + R J_u \tag{17}$$

評価値 $J_x, J_{\dot{x}}, J_u, J_{total}$ と重み係数 R との関係を図-1に示す。ここで、各評価値を比較するときは、同一の R に対するものと比較しなくてはならないことに留意する必要がある。次に、定値制御の場合の値で規格化した値を図-2に示す。 J_{total} の定値制御に対する比をみると、定値制御に対して最も効率がよくなる R の値が1つ存在することがわかる。制御アルゴリズムによる相違を時刻歴応答でみるため、 $R=0.1$ に対する結果を示す。図-3に等価周期と等価減衰定数の時間変化を示し、図-4には応答の共分散行列 S の S_{11}, S_{22}, S_{33} 要素の平方根の時刻歴応答を示す。図-5には制御行列 P の P_{11}, P_{12}, P_{22} 要素の時間変化を示す。

5. むすび

評価関数 J_{total} の比較から、検討対象とした制御則の中で追従制御が最も有効であることが確認された。瞬間定値制御と瞬間追従制御はほとんど差がなく、 R が約0.1以上では定値制御より有効となっている。

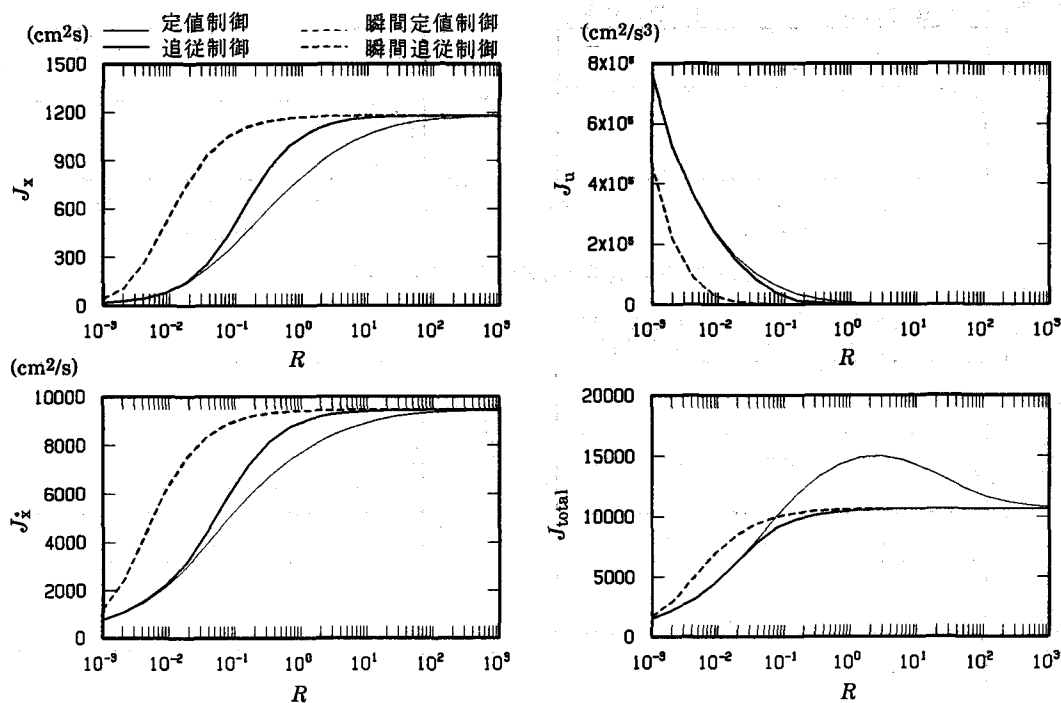


図-1 各評価値と重み係数 R との関係

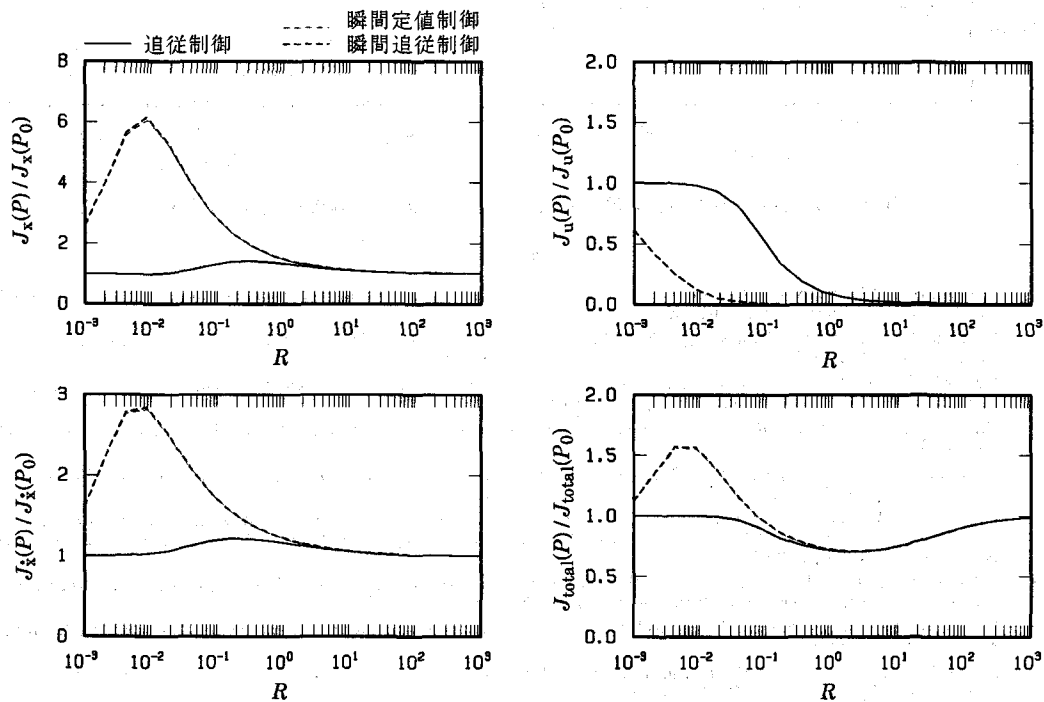


図-2 各評価値の定値制御に対する比と重み係数 R との関係

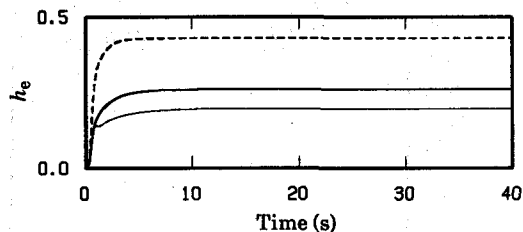
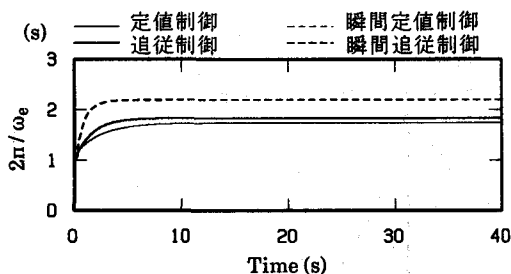


図-3 等価周期と等価減衰定数の時間変化

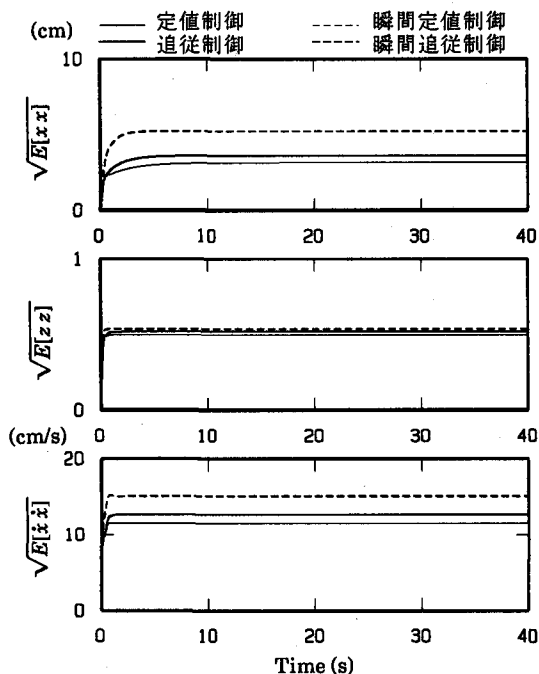


図-4 共分散行列Sの各要素の平方根の時刻歴応答

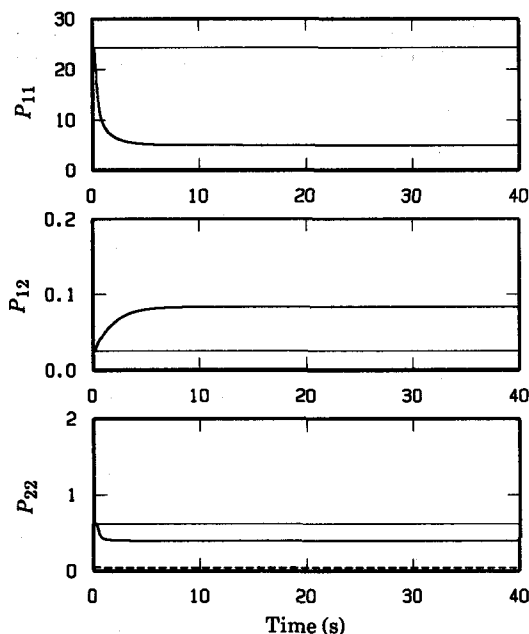


図-5 制御行列Pの各要素の時間変化

参考文献

- 1) Yang, J. N. and Giannopoulos, F. : "Active Tendon Control of Structures," *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 104, No. EM3, June, 1978, pp.561~568.
- 2) Masri, S. F., Bekey, G. A. and Caughey, T. K. : "Optimum Pulse Control of Flexible Structures," *Journal of Applied Mechanics*, Vol.48, 1981, pp.619~626.
- 3) Udawadia, F. E. and Tabaie, S. : "Pulse Control of Single-Degree-of-Freedom System," *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 107, No. EM6, December, 1981, pp.997~1009.
- 4) Yang, J. N., Long, F. X. and Wong, D. : "Optimal Control of Nonlinear Structures," *Journal of Applied Mechanics*, Vol.55, 1988, pp.931~938.
- 5) Abdel-Rohman, M. and Leipholz, H. H. : "Stochastic Control of Structures," *Journal of Structural Division*, ASCE, Vol. 107, No. ST7, July, 1981, pp.1313~1325.
- 6) Izumi, M., Li Zaiming and Katukura, H. : "Approach to stochastic response analysis of Piece-Wise-Linear hysteretic structural systems --- for bilinear model," *Journal of structural and construction engineering*, Trans. of Architecture Institute of Japan, No.390, August, 1988, pp.59~69.
- 7) Li Zaiming, Katukura H. and Izumi, M. : "Synthesis and Extension of One Dimensional Nonlinear Hysteretic Structural Models," submitted to *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE for publication.
- 8) Wen, Y. K. : "Method for Random Vibration of Hysteretic Systems," *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol.102, No. EM2, 1976, pp.249~263.
- 9) Atalik, T. S. and Utku, S. : "Stochastic Linearization of Multi-degree-of-freedom Non-linear Systems," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.4, 1976, pp.411~420.
- 10) Wen, Y. K. : "Equivalent Linearization for Hysteretic Systems under Random Excitation," *Transactions of the ASME*, Vol.47, March, 1980, pp.150~154.