

## (15) 音響逆問題の境界要素法解析

(音響インテンシティを補助情報とする振動源の同定)

BOUNDARY ELEMENT ANALYSIS OF ACOUSTIC INVERSE PROBLEMS

(SOUND SOURCE IDENTIFICATION USING ADDITIONAL INFORMATION ON ACOUSTIC INTENSITY)

田中 正隆<sup>\*1</sup>

山田 善啓<sup>\*2</sup>

Masataka TANAKA, Yoshihiro YAMADA

This paper is concerned with an application of the boundary element method to some inverse problems in acoustics. The inverse problem under consideration is defined such that the vibrating state is not known while the other data needed for boundary element analysis of the acoustic field are given. It is assumed that the acoustic intensity is measured at several selected points and these data are given as additional information. The inverse problem is reduced to a typical optimum problem, and solved by means of the usual optimization technique. A few sample problems are computed by using the proposed solution procedure, whereby the potential usefulness of the procedure is demonstrated.

Key Words: Sound Source Identification, Boundary Element Method, Acoustics, Acoustic Intensity, Optimization Technique

### 1. 緒言

騒音や振動の低減は工学上きわめて重要な課題であり、アクティブノイズコントロールなどの騒音制御や音源探査などの研究が大きな関心を集めている<sup>(1)</sup>。近年、コンピュータ技術の発達にともない、この種の問題を境界要素法(BEM)や有限要素法(FEM)などに基づいたコンピュータ解析ソフトウェアを用いて研究することが進められている<sup>(2)(3)</sup>。そして音場の解析においては、測定結果から音源に対するより詳細な情報を得ることが必要とされ、スカラー量である音圧に代わってベクトル量である音響インテンシティを用いた研究が進められている<sup>(4)-(6)</sup>。

著者ら<sup>(7)</sup>はさきに、音響インテンシティに関する補助情報をもとに境界要素解析ソフトウェアと最適化手法を用いて騒音源の位置や形状を同定する方法について考察し、3次元問題についての例題計算によりその有用性を確かめた。本研究では、騒音源の位置や形状などはすでにわかっているものとし、その振動状態のみが未知であると仮定した音響逆問題へこの方法を応用する。すなわち、この逆問題を振動状態を表す未知変数をパラメータとする最適化問題に帰着させ、音響順問題の境界要素解析ソフトウェアを用いて騒音源の振動状態を同定する。振動状態の同定に対して2種類の手法を提案し、それぞれの手法を用いて例題をいくつか解析し、本解法の有用性を確める。

\*1 工博 信州大学教授 工学部生産システム工学科

\*2 学生 信州大学大学院工学研究科

## 2. 複素音響インテンシティ

音場内部の任意の点  $x$  における  $i$  方向の複素音響インテンシティは、その点での音圧と粒子速度の積として次式で与えられる<sup>(4)-(6)</sup>。

$$I_{0i}(x) = \overline{P(x,t)} V_i(x,t) \quad (1)$$

ただし、 $P(x,t)$  は音圧、 $V_i(x,t)$  は  $i$  方向の粒子速度、上付バー(bar)は時間平均を示す。いま、任意の点  $x$  における音圧が、時間に関する次の調和関数で表わされるものと仮定する。すなわち、

$$P(x,t) = p(x) \exp(j\omega t) \quad (2)$$

ただし、 $\omega$  は角周波数、 $j = \sqrt{-1}$  である。このとき、式(1)の時間平均をとれば、複素音響インテンシティは次式で与えられることがわかる。

$$I_{0i}(x) = \frac{1}{2} p(x) \tilde{v}_i(x) = I_i(x) + j Q_i(x) \quad (3)$$

ただし、上付 $\sim$ は共役複素数を表す。式(3)において、実数部  $I_i(x)$  が従来の音響インテンシティ (Active Intensity) を、 $Q_i(x)$  が複素音響インテンシティの虚数部 (Reactive Intensity) を表す。

媒質が微小振幅で定常振動しているものと仮定すれば、音場内部では Euler の式が成立する<sup>(3)</sup>。式(2)をこの Euler の式に代入することにより、点  $x$  での  $i$  方向の粒子速度は、 $\rho$  を媒質の密度とすると次式で表される。

$$V_i(x,t) = \frac{j}{\omega \rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \exp(j\omega t) \quad (4)$$

したがって、式(1)~(4)を用いれば、複素音響インテンシティは次式で与えられることになる。

$$I_{0i}(x) = \frac{1}{2} p(x) \frac{-j}{\omega \rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (5)$$

音響インテンシティの数値計算では、式(4)の音圧勾配 ( $\partial p / \partial x_i$ ) は差分近似により求められることが多い。このため、この方法によれば差分間隔の大きさが数値計算の精度に大きく影響する。この難点を克服するために、本研究では、積分方程式を直接微分することにより式(5)の音圧勾配を求める方法を採用する。

## 3. 音響順問題の境界要素解析

音場内部の媒質が微小振幅で定常振動しているものと仮定しているので、音場内部の支配方程式は Helmholtz 方程式となる。これに対する境界積分方程式は、周知のように次式で与えられる<sup>(8)-(10)</sup>。

$$c(y)p(y) + \int_S q^*(y, y') p(y') dS(y') = -j\omega\rho \int_S p^*(y, y') v(y') dS(y') \quad (6)$$

ただし、係数  $c$  は境界の形状により決まる係数であり、 $v(y')$  は、式(2)と同じ時間依存性を仮定した粒子速度である。また、 $p^*(y, y')$  および  $q^*(y, y')$  は Helmholtz 方程式の基本解である。

音場内部の点  $x$  での音圧は、境界上の音圧および粒子速度を計算したのち、次式より求めることができる。

$$p(x) = - \int_S q^*(x, y) p(y) dS(y) - j\omega\rho \int_S p^*(x, y) v(y) dS(y) \quad (7)$$

本研究では式(5)の音圧勾配を、音場内部の音圧に対する積分方程式(7)を直接微分することにより次式から導く。

$$p_{,i}(x) = - \int_S q_{,i}^*(x, y) p(y) dS(y) - j\omega\rho \int_S p_{,i}^*(x, y) v(y) dS(y) \quad (8)$$

ただし、 $p_{,i}^*(x, y)$  と  $q_{,i}^*(x, y)$  は、それぞれ、基本解を点  $x$  において  $i$  方向の座標に関して微分したものである。

式(4)と式(8)より、音場内部の点 $x$ での $i$ 方向の粒子速度は次式で表わされる。

$$v_i(x) = -\frac{j}{\omega \rho} \int_S q_{i1}(x,y) p(y) dS(y) + \int_S p_{i1}(x,y) v(y) dS(y) \quad (9)$$

境界積分方程式(6)および音場内部の点に対する音圧と粒子速度に関する積分方程式(7)と(9)をそれぞれ境界要素法で離散化し、マトリックス表示すれば次式が得られる。

$$[H] \{p\}_r = [G] \{v\}_r \quad (10)$$

$$p_n = -[A] \{p\}_r + [B] \{v\}_r \quad (11)$$

$$v_{in} = -[C_i] \{p\}_r + [D_i] \{v\}_r \quad (12)$$

ただし、添字 $r$ と $n$ はそれぞれ境界上及び領域内部の値であることを示し、係数マトリックスの添字 $i$ は、音場内部の $i$ 方向の粒子速度に関するマトリックスであることを示す。

音場内部の任意の点での $i$ 方向の複素音響インテンシティは、式(11)と(12)で境界上の諸量と関係づけられる音圧値と粒子速度値を用いて、次式で計算できる。

$$I_{ci} = \frac{1}{2} p_n \tilde{v}_{in} \quad (13)$$

#### 4. 最適化手法を用いた振動状態の同定

本研究では、騒音源の位置及び形状はすでにわかっているものとし、騒音源の未知の振動状態を同定する方法について考察する。

最適化手法を用いた解析法の流れ図を図1に示す。音場内部のいくつかの点で複素音響インテンシティの測定値が補助情報として与えられるものとし、これを基本データとする。そして、振動状態を仮定して境界要素解析から得られる複素音響インテンシティと基本データとの残差平方和を目的関数として、最適化手法により振動状態を表す最適パラメータを求めればよい。本研究では、この問題を制約条件の無い非線形最適化問題として取り扱い、最適化手法としては、共役勾配法<sup>(11)-(13)</sup>を用いる。

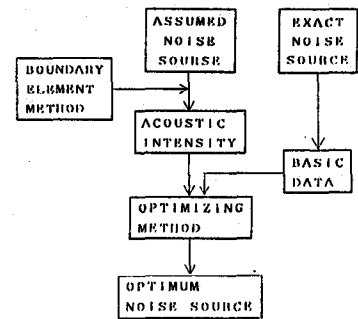


図1 振動状態の同定方法

本研究における最適化問題の目的関数 $W$ は次式のように定義できる。

$$W = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 \{ (I_{ni} - I_{eni})^2 + (Q_{ni} - Q_{eni})^2 \} \quad (14)$$

ただし、 $N$ は基本データの測定点数、 $I_{eni}$ と $Q_{eni}$ は基本データである。また、 $I_{ni}$ と $Q_{ni}$ は、それぞれ複素音響インテンシティの実数部と虚数部の $i$ 方向成分の大きさであり、音響インテンシティに対する境界要素解析より計算できる。

最適化手法において、 $k$ 回目の反復計算によるパラメータ $\{y\}$ の改良値を次式で計算する。

$$\{y\}^{k+1} = \{y\}^k + \alpha^k \{d\}^k \quad (15)$$

ただし、 $\{d\}^k$ は探索方向ベクトル、係数 $\alpha^k$ は探索方向ベクトルの大きさを決定するステップ幅であり、探索方向ベクトル $\{d\}$ の方向に沿った一次元探索<sup>(14)</sup>により決定される。

共役勾配法(Conjugate Gradient Method)において、探索方向ベクトルは次式で定義される。

$$\{d\}^k = -\{\nabla W\}^k + \beta^k \{d\}^{k-1} \quad (16)$$

ここで、 $\{\nabla W\}$ および、 $\beta^k$ は次式から求められる。

$$\nabla W = 2 [J]^T \{w\} \quad (17), \quad \beta^k = \frac{|\{\nabla W\}^k|^2}{|\{\nabla W\}^{k-1}|^2} \quad (18)$$

ただし、 $[J]$ はJacobi行列、 $\{w\}$ の成分は $w_n = (I_{ni} - I_{eni})$ である。

以上のことより、共役勾配法では次式を用いて反復計算を行えばよいことになる。

$$\{y\}^{k+1} = \{y\}^k - \alpha^k (\{\nabla W^k\} - \beta^k \{d\}^{k-1}) \quad (19)$$

最適化の収束判定においては、次に示す2式のうちのどちらかが満足された時、反復計算が収束したものとす。

$$|W^k - W^{k-1}| < \varepsilon \quad (20), \quad \sum_{n=1}^N |y_n^k - y_n^{k-1}| < \eta \quad (21)$$

ただし、 $\varepsilon$ および $\eta$ は収束判定値である。

## 5. 数値計算例と考察

前章までに述べた理論に基づいて開発した計算プログラムを用いて、例題を解析した結果を示す。解析対象として、半無限平面内に位置する大きさが既知の音源の振動状態の同定を取り上げる。音源の形は正方形と仮定する。

以下の2つの方法を用いて例題計算を行った。

方法1：騒音源の振動状態が次式で表されるものとし、その係数  $A_{mn}$  を未知パラメータとして最適化計算を行う。

$$v(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (-1)^{m+n} A_{mn} \cos\left(\frac{(2m-1)x_1}{2a} \pi\right) \cos\left(\frac{(2n-1)x_2}{2a} \pi\right) \quad (22)$$

ただし、 $2a (=1.0\text{m})$  は振動板の一辺の長さ、 $x_1, x_2$  は振動板上の直角座標を表す。

方法2：振動板を要素分割した節点における節点粒子速度を直接未知パラメータとして最適化計算を行う。

振動板の要素分割は、8節点アイソパラメトリック境界要素を用いて行う。音響インテンシティの基本データが与えられる測定点は、振動板から  $h (=0.25\text{m})$  だけ離れた平面上に配置するものとする。具体的な要素分割、および測定点の点数とその配置は計算例と共にのちに示す。なお、材料定数や計算上のパラメータの値は次のように仮定した。

$$\begin{aligned} \text{音速} : C_0 &= 340 \text{ m/s} & \text{周波数} : f &= 100 \text{ Hz} \\ \text{空気密度} : \rho &= 1.2 \text{ kg/m}^3 & \text{収束判定値} : \varepsilon = \eta &= 1.0 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

なお、以下の例題で示す目的関数の収束結果に関する図の縦軸は、次式で定義される残差  $R$  の値を示す。

$$R = \text{Log}_{10} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 \left\{ \left( \frac{I_{ni} - I_{0ni}}{R I_0} \right)^2 + \left( \frac{Q_{ni} - Q_{0ni}}{R Q_0} \right)^2 \right\} \quad (23)$$

$$R I_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (I_{0ni})^2}, \quad R Q_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (Q_{0ni})^2}$$

また、この数値実験では、同定すべき振動状態を与えて境界要素解析を行って得られる測定点での音響インテンシティの値を基本データとして用いる。

本研究では、振動板の振動状態に対して粒子速度の実数部のみを考慮して、以下の例題の解析を行った。

[例題1] 式(22)において、 $m=1, n=1$  として得られる図2に示す振動状態について、方法1と方法2をそれぞれ用いて解析を行った。振動板は、図3に示すように4要素21節点に分割した。このとき未知パラメータの数は、方法1において1個、方法2においては5個となる。また、測定点数は9点とし、その配置を図4に示す。最適化の反復計算の最初に仮定した振動状態を図5に、収束解として同定された振動状態を図6に示す。また、目的関数の収束結果を図7に示す。

[例題2] 図8に示す振動状態 ( $m=2, n=1$ ) について解析を行った。この振動状態に対して、振動板の要素分割は、図9に示すように6要素29節点とした。したがって、未知パラメータ数は、方法1で2個、方法2では9個となる。測定点数は13点とし、その配置を図10に示す。仮定した振動状態、同定された振動状態、および目的関数の収束結果をそれぞれ図11、図12、図13に示す。

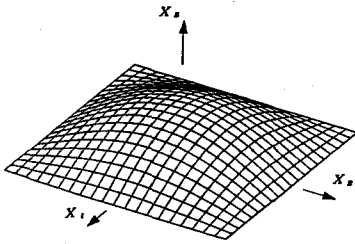


図2  $m=1, n=1$  の振動状態

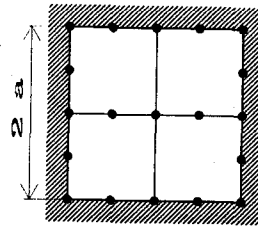


図3 要素分割図

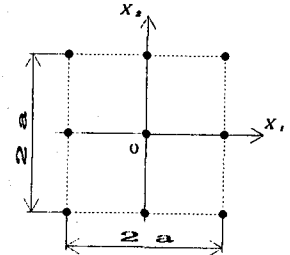


図4 測定点の配置

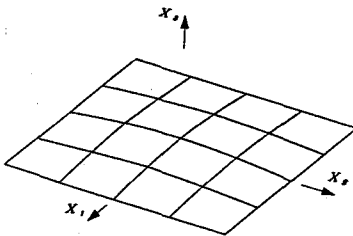


図5 最初の仮定

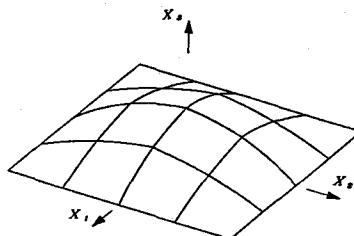


図6 同定結果

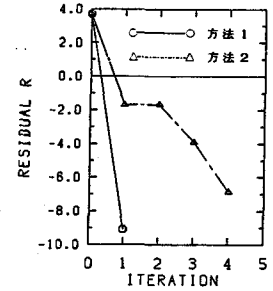


図7 目的関数の収束結果

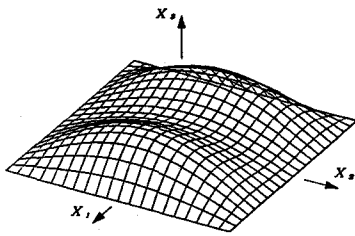


図8  $m=2, n=1$  の振動状態

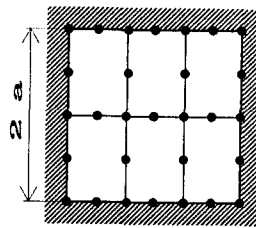


図9 要素分割図

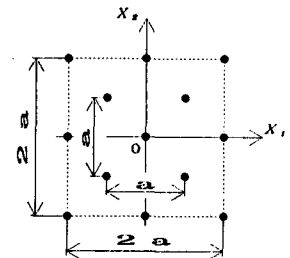


図10 測定点の配置

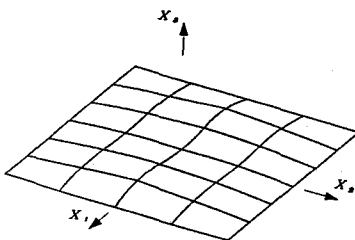


図11 最初の仮定

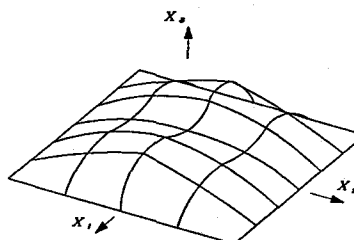


図12 同定結果

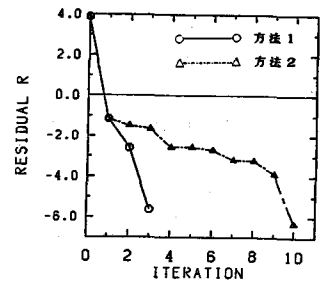


図13 目的関数の収束結果

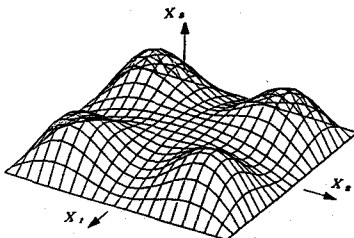


図14  $m=2, n=2$  の振動状態

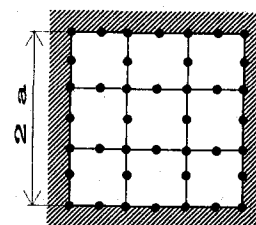


図15 要素分割図

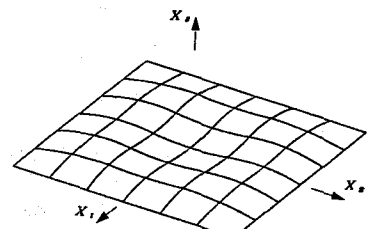


図16 最初の仮定

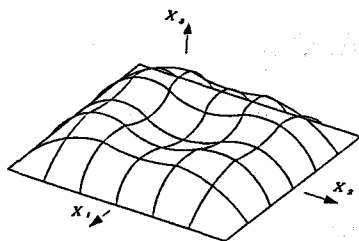


図 17 同定結果

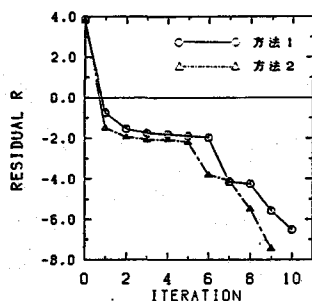


図 18 目的関数の収束結果

〔例題 3〕 図14に示す振動状態 ( $m=2, n=2$ ) について解析を行った。このとき、振動板の要素分割は図15に示すように9要素40節点とした。したがって、未知パラメータ数は方法1で4個、方法2で16個となる。測定点については例題2と同じ点数、配置とした。仮定した振動状態、同定された振動状態、および目的関数の収束結果をそれぞれ図16、図17、図18に示す。

以上のように、いずれの例題においても方法1、または方法2のどちらを用いても正確な振動状態が求められることがわかる。例題3において、方法1を用いたときの反復回数が、方法2を用いたときよりも多くなっているが、実際の計算時間は方法1を用いたときの方が短い。方法1では、未知パラメータ数が方法2に比べて少ないので一般に計算時間は短い。しかし、振動状態を式(22)で表すために解析対象の振動板形状が制約されることになる。一方、方法2では未知パラメータ数が多く計算時間は長くなるが、任意形状の騒音源に対する解析が可能である。

## 6. 結 言

本研究では、音場内部の点で得られる音響インテンシティを補助情報として用い、境界要素法と最適化手法により騒音源の未知の振動状態を同定する方法について考察した。振動状態同定のために2つの手法を提案した。そして、開発した計算プログラムにより例題をいくつか解析して、両手法の有用性を確かめた。本解法は、さらに複雑な音響逆問題への適用も可能である。両手法の長所を考慮して使い分けることにより、効率的な音響逆問題解析ができるものと考えられる。

## 参考文献

- (1) 騒音低減技術, 日経メカニカル, No.265, 1988, pp.40-60.
- (2) 橋秀樹・矢野博夫: 音響インテンシティ測定法の原理と応用, 騒音制御, 8-4, 1984, pp.4-9.
- (3) 日高新入・安久司郎・橋秀樹: 複素音響インテンシティによる音場解析, 日本音響学会誌, 43-12, 1987, pp.994-1000.
- (4) 石井哲: 騒音低減のアプローチとその技術課題(2), 機械の研究, 40-6, 1988, pp.677-681.
- (5) 矢崎士郎: 境界要素法による音響問題の解析とその応用, 信州大学大学院修士学位論文, 1989.
- (6) 田中正隆・矢崎士郎: 境界要素法による音響インテンシティ解析システムとその応用, 機論, 55-513, C, 1989-5, 掲載予定.
- (7) 田中正隆, 矢崎士郎・山田善啓: 境界要素法を用いた最適化手法による騒音源の同定, 機論, 55-518, A, 1989-10, 掲載予定.
- (8) 田中正隆・田中道彦: 境界要素解析の基礎, 培風館, 1984.
- (9) 境界要素法研究会編: 境界要素法の理論と応用, コロナ社, 1986.
- (10) Brebbia, C.A., Telles, J.C., and Wrobel, L.C.; 田中正隆 (訳), 境界要素解析—理論と応用, 丸善, 1984.
- (11) 坪井始・美咲隆吉: 表面電荷法による電極及び絶縁物形状の最適化, 境界要素法論文集, 3, 1986, pp.249-254.
- (12) Fox, R.L.: Optimization Methods for Engineering Design, Addison-Wesley Publishing Co., 1971.
- (13) 尾田十八・山崎光悦: 機械構造設計の最適化手法とその応用(4), 機械の研究, 40-8, 1988, pp.935-940.
- (14) Papalambros, P., and Wilde, Douglass J.: Principles of Optimal Design, Cambridge University Press, 1988.